



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

STUDIENARBEIT

Thema: Beanspruchungsanalyse mit Dehnungsmessstreifen an kohlenstofffaserverstärkten Kunststoffen unter besonderer Berücksichtigung der Querempfindlichkeit der Dehnungsmessstreifen

vorgelegt von: cand.-Ing. Katrin Bernert
geb. am 20.07.1980 in Karl-Marx-Stadt heute Chemnitz

Studiengang: Maschinenbau – Angewandte Mechanik

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. habil. Jochen Naumann
PD Dr.-Ing. habil. Martin Stockmann

Bernert, Katrin

Beanspruchungsanalyse mit Dehnungsmessstreifen an kohlenstofffaserverstärkten Kunststoffen (CFK) unter besonderer Berücksichtigung der Querempfindlichkeit der Dehnungsmessstreifen (DMS)

Studienarbeit an der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Chemnitz, Institut für Mechanik, 2003

55 Seiten
8 Literaturzitate
6 Tabellen
16 Abbildungen
3 Anlagen

Wegen ihrer Festigkeitseigenschaften werden heute zunehmend kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe (CFK) eingesetzt. Für die Auslegung der Konstruktion und für Beanspruchungsanalysen ist die Kenntnis der Materialparameter (Elastizitäts- und Schubmoduln, Querdehnzahlen) unabdingbar. Bei deren experimenteller Bestimmung mit Hilfe von Dehnungsmessungen wird das Messergebnis durch die systembedingte Querempfindlichkeit der Dehnungsmessstreifen (DMS) verfälscht. Dies beeinflusst wiederum die Genauigkeit der identifizierten Werkstoffkennwerte und späterer Beanspruchungsanalysen. Daher wurden nicht nur die Materialparameter von vier verschiedenen Beispielwerkstoffen ermittelt, sondern auch der Einfluss der Querempfindlichkeit auf die Identifikation der Kennwerte und auf eine Beanspruchungsanalyse untersucht.

Schlagworte

Biegeversuch, Dehnungsmessstreifen (DMS), kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff (CFK), Materialparameter, Orthotropie, Querempfindlichkeit, Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	III
Kurzzeichenverzeichnis.....	IV
Abbildungsverzeichnis	VII
Tabellenverzeichnis	VII
1. Einleitung	1
2. Theoretische Grundlagen	3
2.1. Hooke'sches Gesetz für orthotrope, linear-elastische Werkstoffe	3
2.2. Biegeversuche zur Ermittlung der Materialparameter	6
2.2.1. Experimentelle Untersuchungen mit Dehnungsmessstreifen an Biegeproben.....	6
2.2.2. Ermittlung der Elastizitätsmoduln und der Querdehnzahlen.....	8
2.2.3. Ermittlung des Schubmoduls	9
3. Versuchsdurchführung.....	11
3.1. Material und Proben	11
3.2. Versuchsaufbau und -ablauf.....	12
3.3. Versuchsverhalten und Messergebnisse.....	15
4. Versuchsauswertung	19
4.1. Ermittlung der Materialparameter aus den Versuchsdaten	19
4.1.1. Visualisierung der Spannungs-Dehnungs-Verläufe	19
4.1.2. Regressionsanalyse	23
4.2. Ermittelte Materialparameter	27
5. Symmetrieausgleich der Nachgiebigkeitsmatrix.....	30
5.1. Bedingte Approximation mit Lagrange'schem Multiplikator	30
5.2. Ergebnisse der Approximation, Beurteilung	33
6. Einfluss der Querempfindlichkeit	35
6.1. Querempfindlichkeit.....	35
6.2. Einfluss auf die Ermittlung der Materialparameter.....	36
6.2.1. Fehleranalyse	36
6.2.2. Diskussion	38
6.3. Einfluss auf die Beanspruchungsanalyse.....	40
6.3.1. Fehleranalyse für die Normalspannungen.....	41
6.3.2. Fehleranalyse für die Schubspannung	42
6.3.3. Diskussion	46
7. Zusammenfassung.....	53
Literaturverzeichnis	55
Anlagenverzeichnis.....	55

Kurzzeichenverzeichnis

Abkürzungen

CFK	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
DMS	Dehnungsmessstreifen
ESZ	ebener Spannungszustand

Formelzeichen

a	$[m]$	Länge
b	$[m]$	Breite
C		Koordinatentransformationsmatrix (ebene Drehung)
d	$[m]$	Dicke
E_i	$[N/mm^2]$	Elastizitätsmodul bezüglich der Koordinate i
F	$[N]$	Kraft
G_{ij}	$[N/mm^2]$	Schubmodul bezüglich der Koordinaten i und j
i, j		Koordinatenrichtungen
k_l, k_q		Dehnungsempfindlichkeiten eines DMS in Längs- und Querrichtung
l	$[m]$	Hebelarm
L		Lagrange-Funktion
m		Anstieg der Regressionsgeraden
M	$[Nm]$	Biegemoment
n		Anzahl der Beobachtungen
N		Anzahl der Geraden
p		Achsenabschnitt einer Geraden

q	Querempfindlichkeit
Q	reduzierte Steifigkeitsmatrix
Q_x, Q_y	Abweichungsquadrate bezüglich x und y
Q_{xy}	Abweichungsprodukt
S	Standardabweichung
S	Nachgiebigkeitsmatrix
\tilde{S}	reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix
t	Lagrange'scher Multiplikator
T^e	Transformationsmatrix für das Hooke'sche Gesetz
x	unabhängige Größe
$y = y(x)$	abhängige Größe

$\underline{\epsilon} = (\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31} \quad \gamma_{12})^T$	Verzerrungsvektor
$\tilde{\underline{\epsilon}} = (\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \gamma_{12})^T$	reduzierter Verzerrungsvektor
ν_{ij}	Querdehnzahl bezüglich der Koordinaten i und j
$\nu_0 = 0,285 = const.$	standardisierte Querdehnzahl zur Bestimmung des k-Faktors eines DMS
$\underline{\sigma} = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{23} \quad \tau_{31} \quad \tau_{12})^T$	Spannungsvektor
$\tilde{\underline{\sigma}} = (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \tau_{12})^T$	reduzierter Spannungsvektor
φ	Drehwinkel $[\circ, rad]$

Indizes

k	Zählindex
$\overset{Anz}{x}$	Anzeigewert einer Messgröße (ohne Korrektur für die Querempfindlichkeit)

Kurzzeichenverzeichnis

\bar{x}	Mittelwert
\hat{x}	für Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix ausgeglichene Größe
\hat{x}	Größen nach der Koordinatentransformation (ebene Drehung)

verwendete Koordinatensysteme

1, 2, 3	Koordinaten des werkstoffbezogenen Koordinatensystems
x, y, z	Koordinaten des Koordinatensystems im Versuch
l, q	Koordinaten des DMS-bezogenen Koordinatensystems: Achsen längs und quer zur Messrichtung

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1	Faseranordnung bei uni- und bidirektional verstärkten CFK	3
Abb. 2	4-Punkt-Biegeversuch mit Verlauf des Biegemoments M	7
Abb. 3	Zuschnitt und Bezeichnung der Proben relativ zur Faserrichtung	12
Abb. 4	Gesamt- und Detailansicht Versuchstand	13
Abb. 5	Prinzipskizze Punktlager	17
Abb. 6	Probe mit Punktlagerung	17
Abb. 7	Messdaten: Material HT090, Probe 30 unter 45° , Zugseite	18
Abb. 8	Messdaten: Material HT0, Probe 50 in Faserrichtung, Zugseite	18
Abb. 9	Verlauf $ \sigma_x(\varepsilon_x) $ des Materials HT090	21
Abb. 10	Verlauf $ \varepsilon_y(\varepsilon_x) $ des Materials HT090	22
Abb. 11	Verlauf $ \sigma_x(2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)) $ des Materials HT090	22
Abb. 12	Rechtwinklige DMS-Rosette mit drei DMS	40
Abb. 13	Koordinatentransformation zur Bestimmung von ε_{135°	44
Abb. 14	Verlauf der Koeffizientenfunktion K	47
Abb. 15	Spannungen bei vorgegebenen Dehnungen am Werkstoff HT0	50
Abb. 16	Spannungen bei vorgegebenen Dehnungen am Werkstoff HT090	51

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1	Versuchsverhalten der Proben	15
Tabelle 2	gerundete Regressionsergebnisse des Materials HT090 für den E-Modul E_1	26
Tabelle 3	experimentell ermittelte Materialparameter und deren Standardabweichung	27
Tabelle 4	Erfüllung der Symmetriebedingung (32)	29
Tabelle 5	Materialparameter für HT090 mit Symmetrieausgleich	33
Tabelle 6	Materialparameter, ausgeglichen und gerundet	34

1. Einleitung

Kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe (CFK) werden heute zunehmend für Leichtbaukonstruktionen eingesetzt, da sie durch ihre Struktur bei geringem spezifischem Gewicht und geringer Wandstärke eine hohe Festigkeit gewährleisten.

Für die Auslegung von CFK-Bauteilen, z.B. mit Hilfe von FEM-Analysen, oder auch einer experimentell gestützten Spannungsermittlung am Prototyp ist die Kenntnis der Materialparameter des Werkstoffes von zentraler Bedeutung. Derzeit werden die Elastizitäts- und Schubmoduln sowie die Querdehnzahlen in experimentellen Untersuchungen an einfachen Beanspruchungszuständen bestimmt, indem die einwirkenden Belastungen sowie die daraus resultierenden Dehnungen gemessen und über das Hooke'sche Gesetz in Verbindung gebracht werden.

In Versuchen zur Identifikation der Werkstoffkennwerte und auch zur experimentellen Bestimmung von Spannungen werden heute zumeist Dehnungsmessstreifen (DMS) verwendet. Dabei werden die DMS aber nicht nur von der zu messenden Dehnung in Längsrichtung, sondern auch von auftretenden Dehnungen quer zur Messrichtung beeinflusst. Diese unerwünschte Eigenschaft wird durch die so genannte Querempfindlichkeit charakterisiert und führt im Allgemeinen zur Verfälschung der Messergebnisse.

Gegenstand dieser Arbeit ist daher nicht nur die experimentelle Identifikation der Materialparameter von charakteristischen CFK, sondern auch die Untersuchung des Einflusses der Querempfindlichkeit der DMS auf die Bestimmung der Werkstoffkonstanten sowie auf eine experimentelle Beanspruchungsanalyse.

Dafür werden in Kapitel 2 zunächst die theoretischen Grundlagen der für CFK gültigen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen und der daraus folgenden Symmetriebedingung für die Nachgiebigkeitsmatrix erläutert. Daraus wird eine Methode zur experimentellen Ermittlung der Elastizitäts- und Schubmoduln sowie der Querdehnzahlen abgeleitet.

Die experimentelle Umsetzung dieses Verfahrens ist in den Kapiteln 3 (Versuchsdurchführung) und 4 (Versuchsauswertung) dokumentiert. Dafür standen vier CFK zur Verfügung, für deren Herstellung zwei verschiedene Fasertypen jeweils einmal uni- und einmal bidirektional angeordnet wurden. Da die experimentell ermittelten Materialparameter die Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix nicht von vorn herein gewährleisten, wird in Kapitel 5 eine entsprechende Angleichung der Kennwerte vorgenommen.

Einleitung

In Kapitel 6 schließt sich die theoretische Analyse des Einflusses der Querempfindlichkeit der DMS auf die Identifikation der Materialkonstanten und auf eine beliebige Beanspruchungsanalyse an, die praxisrelevante Schlussfolgerungen auf den Umgang mit der Querempfindlichkeit von DMS ermöglicht.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Hooke'sches Gesetz für orthotrope, linear-elastische Werkstoffe

Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff (CFK) ist ein Verbundmaterial, bei dem Fasern aus Kohlenstoff schichtweise in eine Kunststoffmatrix eingebettet sind. Die räumliche Anordnung dieser Fasern besitzt großen Einfluss auf das Materialverhalten. Am gebräuchlichsten sind unidirektional und bidirektional verstärkte CFK, bei denen die Fasern entsprechend Abb. 1 entweder nur parallel zueinander oder aber senkrecht zueinander angeordnet sind.

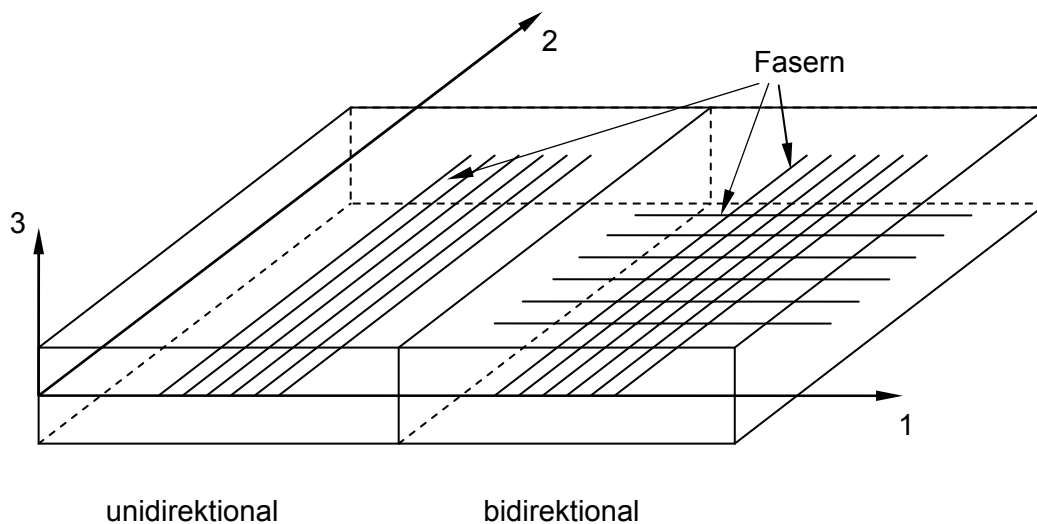


Abb. 1 Faseranordnung bei uni- und bidirektional verstärkten CFK

Bei uni- bzw. bidirektionaler Verstärkung existieren im CFK drei Ebenen, bezüglich derer die Materialeigenschaften symmetrisch sind. Dies sind entsprechend dem in Abb. 1 eingeführten Koordinatensystem die 1–2–Ebene des Werkstoffes, zu der die einzelnen Faserschichten parallel ausgerichtet sind, sowie die 1–3– und 2–3–Ebene, d. h. in Faserrichtung oder senkrecht dazu. Damit liegt im Werkstoff Orthotropie vor.

Im elastischen Verformungsbereich beschreibt das für Orthotropie gültige Hooke'sche Gesetz den Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen im Material [1]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Hierfür wird die verkürzende Matrix-Schreibweise verwendet:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{S} \cdot \underline{\sigma} \quad (2)$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix \underline{S} enthält für diesen allgemeinen Fall zwölf Materialkennwerte: je ein Elastizitätsmodul E_i , ein Schubmodul G_{ij} sowie eine Querdehnzahl ν_{ij} bezüglich jeder Koordinatenrichtung $i, j = 1, 2, 3$. Die Elastizitätsmoduln E_i beschreiben den linearen Zusammenhang zwischen den Dehnungen ε_i und den zugeordneten Normalspannungen σ_i , während die Schubmoduln G_{ij} die Proportionalität zwischen den Schubverzerrungen γ_{ij} und den Schubspannungen τ_{ij} abbilden. Wird ein Körper in eine Koordinatenrichtung i gedehnt, tritt im Allgemeinen auch eine Querkontraktion in der j -Richtung auf. Deren Größe wird durch die Querdehnzahl ν_{ij} charakterisiert.

Wegen der Symmetrie des Spannungstensors sowie der Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen [1] ergeben sich für Gleichung (1) drei Symmetriebedingungen, die die Elastizitätsmoduln mit den Querdehnzahlen verknüpfen. Somit sind nur neun der zwölf Parameter unabhängig voneinander.

Es erfolgt außerdem eine Entkopplung zwischen Dehnungen und Gleitungen im Hooke'schen Gesetz für orthotrope Werkstoffe, d.h. die Normalspannungen σ_{11} , σ_{22} und σ_{33} bewirken ausschließlich Dehnungen in alle drei Koordinatenrichtungen, während die Tangen-

tialspannungen τ_{23} , τ_{31} und τ_{12} nur – von den Dehnungen unabhängige – Schubverzerrungen hervorrufen.

Auf Grund ihrer guten Festigkeitseigenschaften werden CFK oft als dünnwandige Bauteile verwendet. Wegen der geringen Werkstoffdicke liegt dann meist ein ebener Spannungszustand (ESZ) vor, bei dem nur die Normalspannungen σ_{11} und σ_{22} sowie die Schubspannung τ_{12} in der Werkstoffebene auftreten. Alle anderen Spannungen sind Null bzw. vernachlässigbar klein:

$$\sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0 \quad (3)$$

Die Anwendung der Bedingungen (3) für den ESZ auf das Stoffgesetz (1) lässt die zur 1–2–Ebene senkrechten Verzerrungen γ_{23} und γ_{31} ebenfalls Null werden:

$$\gamma_{23} = \gamma_{31} = 0 \quad (4)$$

In den verbleibenden Gleichungen ist die Dehnung ε_{33} eine abhängige Größe, die über die Bedingung $\sigma_{33} = 0$ eliminiert werden kann. Daraus ergibt sich das Hooke'sche Gesetz für die Abhängigkeit der Verzerrungen von den auftretenden Spannungen in einer reduzierten Form:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \quad (5)$$

In der Matrix-Schreibweise soll die Tilde darauf hinweisen, dass es sich um reduzierte Vektoren und Matrizen handelt:

$$\underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{\tilde{S}} \cdot \underline{\tilde{\sigma}} \quad (6)$$

Durch Umformen und Invertieren von (5) bzw. (6) wird die Beziehung für die Abhängigkeit der Spannungen von den Verzerrungen gewonnen:

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\tilde{S}}^{-1} \cdot \underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{Q} \cdot \underline{\tilde{\varepsilon}} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & \frac{E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Durch die Einschränkung auf einen ebenen Spannungszustand sind in der reduzierten Steifigkeitsmatrix \underline{Q} nur noch fünf Materialparameter enthalten, die durch die Symmetriebedingung

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \quad (9)$$

miteinander verknüpft sind. Diese Nebenbedingung für die Elemente der Steifigkeitsmatrix bewirkt, dass nur vier der fünf Werkstoffkennwerte unabhängig voneinander sind.

Bei Kenntnis von $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}$ und G_{12} sowie entweder der Spannungen oder der Verzerungen kann das orthotrope Verhalten von dünnwandigen Bauteilen im elastischen Bereich mit Hilfe der Gleichungen (8) beschrieben werden.

2.2. Biegeversuche zur Ermittlung der Materialparameter

Zur Analyse des Materialverhaltens bei gegebener Beanspruchung ist die Kenntnis der Materialkonstanten erforderlich. Sind die Parameter des Werkstoffes nicht bekannt, können sie experimentell bestimmt werden. Dafür eignen sich insbesondere Biegeversuche, die sowohl im Zug- als auch im Druckbereich unkomplizierte Messungen erlauben.

2.2.1. Experimentelle Untersuchungen mit Dehnungsmessstreifen an Biegeproben

Bei einem 4-Punkt-Biegeversuch wie in Abb. 2 wird die Probe von zwei Auflagern gestützt und durch zwei Lager auf der entgegengesetzten Seite mit jeweils $\frac{F}{2}$ belastet. Sind dabei die Hebelarme l zwischen jeweils einem Auf- und einem Drucklager gleich groß, stellt sich im Bereich zwischen beiden Drucklagern eine reine Biegung mit einem konstanten Biegemoment M ein. In diesem Gebiet werden die DMS zur Messung der Längs- und Querdehnung appliziert.

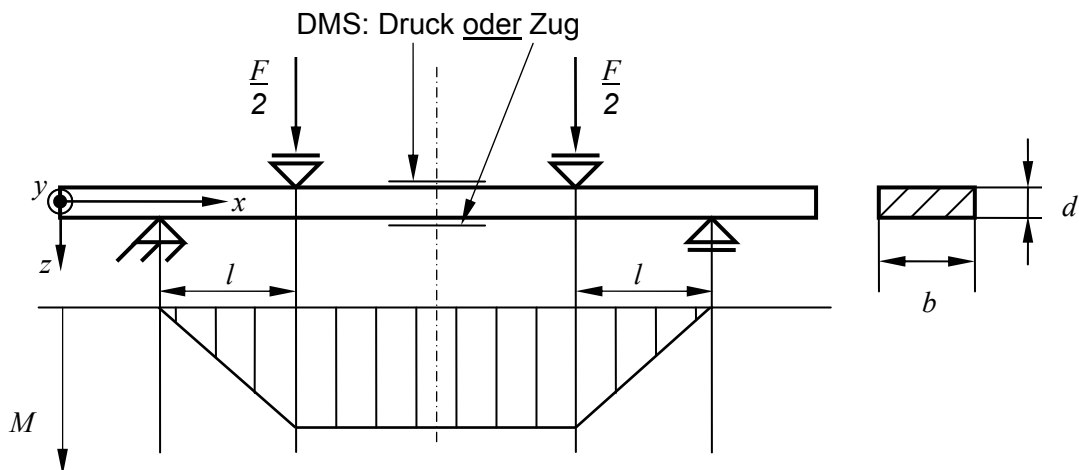


Abb. 2 4-Punkt-Biegeversuch mit Verlauf des Biegemoments M

Das Biegemoment im Bereich der reinen Biegung ist

$$M = \frac{F}{2}l \quad (10)$$

und bewirkt dort einen einachsigen Spannungszustand. Dies vereinfacht die Analyse, da nur eine Spannung in Probenlängsrichtung existiert. Diese Spannung nimmt auf der Ober- bzw. Unterseite der Probe, an der die Dehnungen gemessen werden können, den Wert

$$\sigma_x(z = \pm \frac{d}{2}) = \pm \frac{3Fl}{bd^2} \quad (11)$$

an. Die unterschiedlichen Vorzeichen entstehen durch die Betrachtung von Zug- ($z = +\frac{d}{2}$) und Druckseite ($z = -\frac{d}{2}$).

Das Hooke'sche Gesetz (8) vereinfacht sich somit unter Beachtung der Koordinaten x , y und z zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} \\ \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Zusätzlich zur in (11) aus der wirkenden Kraft F bestimmten Längsspannung σ_x werden zur Ermittlung der Materialparameter E_x und ν_{xy} über das Hooke'sche Gesetz (12) die Längs- und Querdehnungen ε_x und ε_y an der Probenoberfläche benötigt. Sie werden im Allgemeinen mit Dehnungsmessstreifen (DMS) an der Zug- oder Druckseite der Probe gemessen.

2.2.2. Ermittlung der Elastizitätsmoduln und der Querdehnzahlen

Mit dem Hooke'schen Gesetz für Orthotropie bei einem einachsigen Spannungszustand (12) können aus gemessenen Dehnungen ε_x und ε_y sowie der Kraft F der Elastizitätsmodul E_x und die Querdehnzahl ν_{xy} der Probe bestimmt werden. Nach Umformen dieser Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma_x(\varepsilon_x) &= E_x \varepsilon_x \\ \varepsilon_y(\varepsilon_x) &= -\nu_{xy} \varepsilon_x\end{aligned}\tag{13}$$

Spannung σ_x und Querdehnung ε_y können somit als Funktion von der Längsdehnung ε_x betrachtet werden. In diesen Gleichungen muss nicht mehr nach Zug- und Druckversuch unterschieden werden, da beide Dehnungen auf der Zug- und Druckseite ebenfalls verschiedene Vorzeichen tragen.

Werden diese Zusammenhänge (13) in einem $\varepsilon_x - \sigma_x$ - und einem $\varepsilon_x - \varepsilon_y$ -Diagramm dargestellt, entstehen durch die Konstanz der Materialparameter Geraden, deren Anstieg gleich dem Wert des Werkstoffkennwertes ist.

Um einen einfachen Vergleich verschiedener Messungen zu ermöglichen, ist es zweckmäßig, die Betragsdarstellung für die graphische Darstellung zu wählen:

$$\begin{aligned}|\sigma_x(\varepsilon_x)| &= E_x |\varepsilon_x| \\ |\varepsilon_y(\varepsilon_x)| &= \nu_{xy} |\varepsilon_x|\end{aligned}\tag{14}$$

Aus dieser Analyse können der Elastizitätsmodul E_x und die Querdehnzahl ν_{xy} bezüglich der Längsrichtung x der Probe gewonnen werden. Wird die Probe so angefertigt, dass die 1-Richtung des Werkstoffes mit der Längsachse im Versuch zusammenfällt ($x = 1$, $y = 2$), werden demnach die Parameter E_1 und ν_{12} bestimmt. Um für das orthotrope Material alle vier Parameter E_1 , E_2 , ν_{12} und ν_{21} zu ermitteln, müssen also zwei Proben untersucht wer-

den, deren Längsrichtungen jeweils einer der Koordinatenrichtungen 1 bzw. 2 des Werkstoffes entsprechen.

2.2.3. Ermittlung des Schubmoduls

Bei Biegeversuchen in eine der beiden Koordinatenrichtungen 1 oder 2 des Materials hat nach den Beziehungen (12) der Schubmodul G_{12} wegen der reinen Biegung keinerlei Bedeutung. Um im Versuch einen Schubanteil zu erzeugen, darf die Längsachse der Probe also nicht genau mit einer Koordinatenachse zusammentreffen. Besonders geeignet für die Bestimmung des Schubmoduls ist ein Biegeversuch, der an einer Probe stattfindet, deren Längsachse unter dem Winkel von 45° zur 1- und 2-Richtung liegt. In diesem Fall löschen sich viele Terme in den Bestimmungsgleichungen gegenseitig aus und die zu bestimmende Größe ist nur von wenigen Messgrößen abhängig.

Bei einem solchen Versuch ist es für die mathematische Beschreibung notwendig, das Hooke'sche Gesetz einer Koordinatentransformation in ein entsprechend gedrehtes $\hat{1}-\hat{2}$ -System zu unterziehen. Nach Altenbach [1] ergibt sich für die allgemeine Transformation von Gleichung (6):

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \hat{S} \cdot \underline{\hat{\sigma}} = T^\varepsilon \cdot S \cdot (T^\varepsilon)^T \cdot \underline{\hat{\sigma}} \quad (15)$$

Darin bezeichnet T^ε die Transformationsmatrix. Sie bewirkt in (15) die Transformation der Nachgiebigkeitsmatrix S und nimmt bei einer ebenen Drehung um den Winkel $\varphi = 45^\circ$ folgende Gestalt und Werte an:

$$T^\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi \\ -2 \cos \varphi \sin \varphi & 2 \cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Eine Transformation der Verzerrungs- und Spannungsvektoren $\underline{\hat{\varepsilon}}$ und $\underline{\hat{\sigma}}$ ist nicht erforderlich, da diese Größen der auftretenden Schubverzerrung γ_{xy} sowie den Messgrößen ε_x , ε_y und σ_x aus einem Versuch mit einer 45° -Probe nach Abb. 2 zugeordnet werden können:

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\gamma}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \underline{\hat{\sigma}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\tau}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Auch hier stellt sich durch das konstante Biegemoment M ein einachsiger Spannungszustand ein, d.h. es existieren weder eine Spannung σ_y in Querrichtung noch eine Schubspannung τ_{xy} .

Nach Einsetzen von (16) in (15) und unter Beachtung des ebenen und einachsigen Spannungszustandes im Versuch entsprechend (17) führen die Beziehungen auf

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\frac{1-\nu_{xy}}{4E_x} + \frac{1-\nu_{yx}}{4E_y} + \frac{1}{4G_{xy}} \right) \sigma_x \\ \varepsilon_y &= \left(\frac{1-\nu_{xy}}{4E_x} + \frac{1-\nu_{yx}}{4E_y} - \frac{1}{4G_{xy}} \right) \sigma_x \\ \gamma_{xy} &= \left(-\frac{1+\nu_{xy}}{2E_x} + \frac{1+\nu_{yx}}{2E_y} \right) \sigma_x \neq 0 \quad \text{für } \sigma_x \neq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Durch Subtraktion der ersten beiden Gleichungen aus (18) ergibt sich

$$\sigma_x = 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)G_{xy} \quad (19)$$

Diese Gleichung lässt sich ebenfalls als Funktion $\sigma_x = \sigma_x(2(\varepsilon_x - \varepsilon_y))$ interpretieren und als Betragsdarstellung

$$\left| \sigma_x(2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)) \right| = G_{xy} \left| 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \right| \quad (20)$$

in ein entsprechendes Diagramm eintragen. Da auch der Schubmodul $G_{xy} = G_{12}$ eine Konstante ist, wird sich wiederum eine Gerade ergeben, deren Anstieg gleich dem Wert des Materialkennwertes ist.

Die Beziehung (19) rechtfertigt in ihrer Einfachheit den gewählten Winkel von 45° für die Ermittlung des Gleitmoduls. Danach werden für dessen Bestimmung wie in den anderen Versuchen zur Bestimmung der Elastizitätsmoduln und der Querdehnzahlen lediglich zwei Dehnungsmessungen an einer Probenoberfläche sowie die Messung der wirkenden Kraft benötigt.

3. Versuchsdurchführung

Grundlage einer Beanspruchungsanalyse von CFK-Bauteilen ist die genaue Kenntnis der Materialparameter. Bei deren experimenteller Bestimmung kommen häufig Dehnmessstreifen (DMS) zum Einsatz. Der Aufbau der DMS bedingt deren Querempfindlichkeit [2]. Diese übt einen Einfluss auf die Exaktheit der Messwerte und damit ebenfalls auf die Genauigkeit der zu identifizierenden Werkstoffparameter oder Spannungen in einer Beanspruchungsanalyse aus.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen daher die Materialkennwerte von Beispielmaterialien experimentell ermittelt sowie der Einfluss der Querempfindlichkeit auf die Versuchsergebnisse untersucht werden.

3.1. *Material und Proben*

Für die Untersuchungen standen insgesamt vier verschiedene Werkstoffe zur Verfügung. Sie unterscheiden sich durch zwei verschiedene Fasertypen, die auf jeweils zwei verschiedene Weisen ausgerichtet sind.

Das Material „HT“ wurde aus dem SIGRAFIL-Prepreg CE1201 hergestellt, dessen Fasern eine hohe Zugfestigkeit besitzen. Der Werkstoff „HM“ wurde dagegen aus dem HAUFLEER-Prepreg HM DU 450 FT109 38% gefertigt und weist mit 640GPa einen sehr hohen Elastizitätsmodul der Fasern auf. Für beide Werkstoffe wurden jeweils 10 Prepregs übereinander angeordnet.

Beide Prepregs sind unidirektional verstärkt und wurden jeweils durch eine entsprechende Schichtung zu je einem unidirektional und einem bidirektional verstärkten CFK verarbeitet. Unidirektionale Verstärkung bedeutet, dass alle Fasern parallel zueinander liegen. Sie nehmen dabei einen Winkel von 0° zum Bezugsrand ein, weshalb diese Werkstoffe durch den Zusatz „0“ gekennzeichnet wurden. Bei bidirektionaler Verstärkung liegen die Fasern senkrecht zueinander unter den Winkeln von 0° und 90° zum Rand. Sie wurden daher mit „090“ benannt.

In Kapitel 2.2 wird erläutert, dass für die Ermittlung aller Materialparameter eines orthotropen Materials drei verschiedene Proben benötigt werden: eine Probe in Faserrichtung des Werkstoffes, eine weitere senkrecht dazu sowie eine dritte Probe unter dem Winkel von 45° zu den beiden ersten. Abb. 3 verdeutlicht diesen Aspekt und zeigt den verwendeten Zuschnitt sowie die Nummerierung mit „10“, „30“ und „50“ für die verschiedenen Proben.

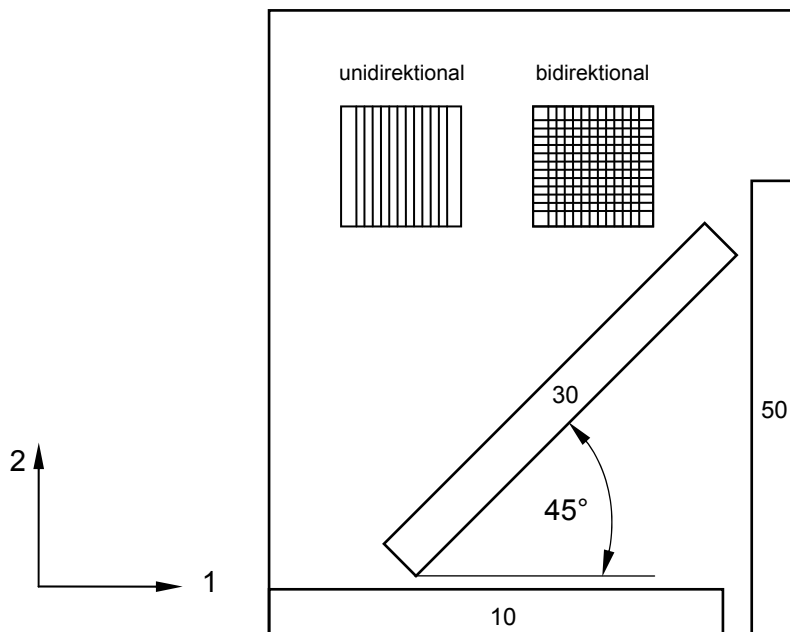


Abb. 3 Zuschnitt und Bezeichnung der Proben relativ zur Faserrichtung

Für eine konsequente und nachvollziehbare Indizierung in den Formeln wird die Längsrichtung der Probe „10“ als 1–Richtung festgelegt.

Die Proben wurden jeweils mit einer Länge von $a = 145\text{mm}$ und die Breite $b = (12 \pm 0.1)\text{mm}$ gefertigt. Die Materialdicke betrug $d = 2\text{mm}$. Für eine exakte Auswertung müssen sowohl Breite als auch Dicke der Proben einzeln vermessen werden.

Somit standen insgesamt zwölf Proben, je drei von den vier Werkstoffen HT0, HT090, HM0 und HM090, für die Untersuchung zur Verfügung.

3.2. Versuchsaufbau und -ablauf

Entsprechend der in Kapitel 2.2 erläuterten Methode zur Bestimmung der Materialparameter mit einem 4-Punkt-Biegeversuch bildet die Prinzipskizze in Abb. 2 die Grundlage für die verwendete Versuchsanordnung, die Abb. 4 zeigt.

Für die Durchführung der Versuche stand eine Prüfmaschine UTS 100 zur Verfügung, die Zug- und Druckversuche mit einer maximalen Prüfkraft von $F = 100\text{kN}$ und Traversengeschwindigkeiten von $v = 0,001 \dots 500\text{mm}/\text{min}$ ermöglicht. Durch das Absenken der Traverse, an der die in Abb. 4 sichtbare Kraftmessdose und der Stempel angebracht sind, wird eine Kraft aufgebracht, die durch die Brücke gleichmäßig auf die beiden oberen Lager aufgeteilt

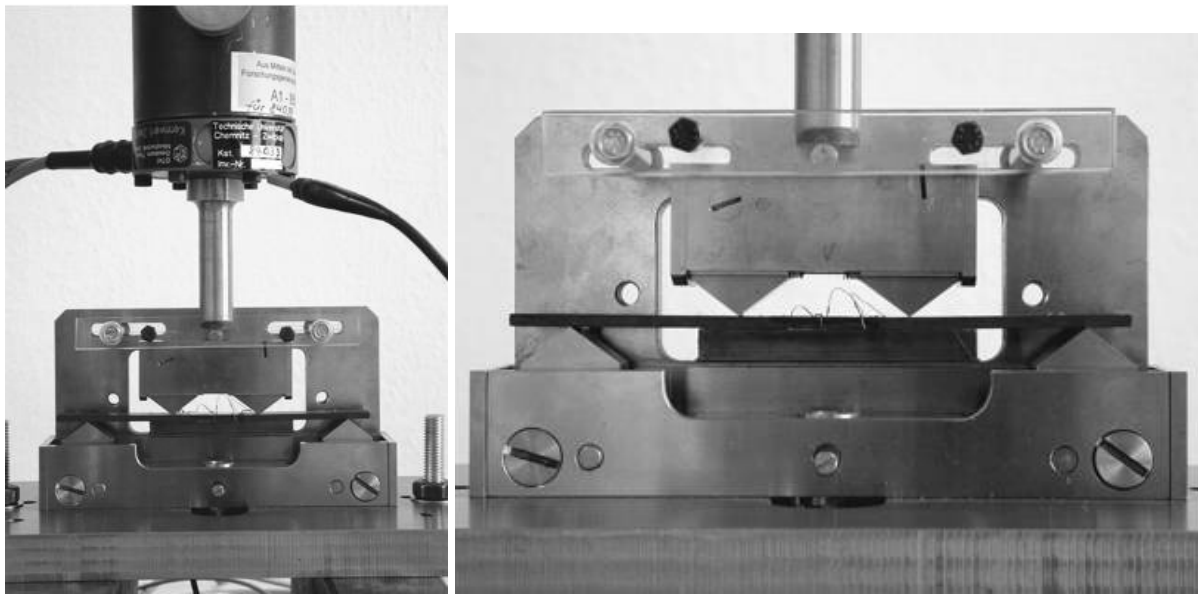


Abb. 4 Gesamt- und Detailansicht Versuchstand

und auf die Probe übertragen wird. Unterhalb dieser beiden Lager sind die Probe sowie die beiden Auflager im Bild gut sichtbar. Alle Lager sind im mechanischen Sinne rollengelagert als Loslager ausgeführt.

Im Versuchsverlauf wurde die weggesteuerte Traverse mit einer konstanten Geschwindigkeit von $1\text{ mm}/\text{min}$ abgesenkt und nach einer kurzen Haltezeit wieder angehoben. Zu Beginn und Ende eines Versuches hatte der Stempel keinen Kontakt zum darunter liegenden Bauteil, um Lastfreiheit zu garantieren. Der Bereich vom Start des Versuches bis zum ersten Kontakt ist für die Auswertung ohne Bedeutung, aber in den Messwertsätzen mit enthalten.

Der zurückzulegende Traversenweg betrug in den meisten Versuchen $5,5\text{ mm}$. Damit wurde eine Längsdehnung von etwa $5000\ \mu\text{m}/\text{m}$ erreicht. Allerdings hielten nicht alle Probematerialien einer solch großen Dehnung stand, so dass für einige Proben der Traversenweg auf $1,5\text{ mm}$ reduziert wurde, was eine Längsdehnung von etwa $1000\ \mu\text{m}/\text{m}$ ergab.

Die Messgrößen sind entsprechend den Ausführungen in Kapitel 2.2 die wirkende Kraft und die daraus resultierenden Dehnungen in Längs- und Querrichtung der Probe während des Versuches sowie die Probengeometrie.

Zur Messung der Dehnungen wurde jeweils eine T-Rosette vom Typ 6/120XY11 der Firma Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH (HBM) verwendet, die einen k-Faktor von 2,05 und eine Querempfindlichkeit von 0,6% aufweist. Die DMS sind bezüglich der Temperaturkompensation für ferritischen Stahl angepasst. Da aber alle Experimente an den vorliegenden

Versuchsdurchführung

CFK unter Laborbedingungen bei konstanter Umgebungstemperatur stattfanden und auf Grund der geringen Speisespannung von $2,5V$ bei diesen relativ großen DMS nur geringe Eigenerwärmung auftritt, können die Temperatureinflüsse auf die Messergebnisse vernachlässigt werden.

Die DMS-Rosette wurde mittig auf einer Probenseite appliziert. Diese Oberfläche wurde in je einem Versuch als Zug- und als Druckseite platziert. In Abb. 4 sind die DMS selbst auf Grund der Perspektive nicht zu sehen.

Die beiden DMS der Rosette wurden einzeln an zwei verschiedenen Kanälen des Messverstärkers MGCPlus der Firma HBM betrieben. Sie wurden als Viertelbrücke mit einer Brückenspeisespannung von $2,5V$ in Vierleitertechnik an die Anschlussplatte AP14 angeschlossen.

Für die Kraftmessung wurde eine doppelt bestückte Kraftmessdose der Firma Gassmann Theiss Messtechnik GmbH (GTM) mit einer Nennlast von $5kN$ verwendet. Einer der Messkanäle wurde an die Steuerung der UTS-Prüfmaschine angeschlossen, der andere wiederum an den Messverstärker MGCPlus (Anschlussplatte AP01).

Der für die Dehnungs- und Kraftmessungen eingesetzte Verstärker ML55 arbeitet als Trägerfrequenzverstärker mit einer Frequenz von $4,8kHz$.

Während des Versuchs wurden die wirkende Kraft F an der Kraftmessdose sowie die von den DMS gemessenen Dehnungen ε_x und ε_y über die Auswertungssoftware CatMan 4.0 mit einer Frequenz von $1Hz$ (bei einem Traversenweg von $5,5mm$) bzw. $5Hz$ (Traversenweg von $1,5mm$) aufgezeichnet.

Die geometrischen Abmessungen der Proben, Breite b und Dicke d , wurden mit einer Messschraube und die Länge l des Hebelarmes mit einem Stahlmaßstab ermittelt.

Große Aufmerksamkeit bei der Durchführung muss der Positionierung von Probe und Drucklagern gewidmet werden, denn es ist unbedingt erforderlich, dass die beiden Hebelarme l die selbe Länge besitzen. Außerdem darf die Probe nicht schief im Versuchsstand liegen, da sonst keine reine Biegung mehr vorläge und dies die Ergebnisse verfälschen würde.

Der Versuchsstand darf die Verformung der Probe nicht behindern. Die Ausführung beider Auflager als Loslager ermöglicht eine Bewegung der Lager infolge der Durchbiegung. Kleine Durchbiegungen verursachen zunächst eine Bewegung der Auflager nach außen, während große Durchbiegungen eine Bewegung nach innen hervorrufen. Dieser Spielraum muss unbedingt vorgesehen werden und wurde durch das Justieren der Lager mit je einem Folien-

streifen geringer Dicke zwischen dem Anschlag und dem Lager realisiert. Nach Versuchsbeginn, bevor die Lager den Spielraum nach innen benötigten, wurden diese Streifen entfernt.

In vielen Versuchen traten Oszillationen in den Kraftmesswerten auf. Trotz großer Anstrengungen konnten sie nicht abgestellt werden. Es wird vermutet, dass diese Schwankungen durch äußere Einflüsse, z.B. über das Stromnetz, hervorgerufen wurden.

3.3. *Versuchsverhalten und Messergebnisse*

Eine kurze Übersicht über das Verhalten der verschiedenen Werkstoffproben im Versuch bietet Tabelle 1.

Tabelle 1 Versuchsverhalten der Proben

Probe Material	10 – Fasern quer (und längs)		30 – Fasern unter 45°		50 – Fasern längs (und quer)	
	Zug	Druck	Zug	Druck	Zug	Druck
HT090	normal	normal	Restdehnung	Restdehnung	normal	normal
HT0	entfällt	Bruch	Restdehnung Torsion → Punktlager	Restdehnung Torsion → entfällt	normal	normal
HM090	entfällt	Knacken	Restdehnung	Restdehnung	Knacken	entfällt
HMO	normal	normal	Restdehnung Torsion → Punktlager	Restdehnung Torsion → entfällt	Knacken	entfällt

Bei Proben mit „normalem“ Versuchsverhalten gelang eine problemlose Versuchsdurchführung ohne Auffälligkeiten.

Bei manchen Proben wurde ein hörbares Knacken während der Belastung registriert. Ein solches Knacken entsteht, wenn die Fasern im Inneren des Werkstoffes reißen, weil sie der steigenden Belastung nicht länger standhalten können. Dabei wird das Material zerstört, auch wenn es äußerlich noch unversehrt erscheint. In diesen Fällen konnten daher auch die Versuche auf der anderen Seite (Zug/Druck) nicht durchgeführt werden.

Versuchsdurchführung

Das Knacken trat nur bei den HM-Proben auf, die bis auf 5,5mm Durchsenkung belastet werden sollten. Eine Längsdehnung von etwa $5000 \frac{\mu\text{m}}{\text{m}}$ war nicht erreichbar, was sich durch den hohen E-Modul der Fasern mit 640GPa und der daraus resultierenden Steifigkeit erklären lässt. Für die restlichen Proben dieses Materials wurde deshalb die Belastung auf einen Weg von 1,5mm bzw. eine Längsdehnung von etwa $1000 \frac{\mu\text{m}}{\text{m}}$ reduziert.

Bei der unidirektionalen HT0_10-Probe trat ein glatter, plötzlicher Bruch ein. Da die Kohlenstofffasern bei dieser Probe quer zur Längsachse des Balkens liegen, wird die Belastung hauptsächlich von der Kunststoffmatrix getragen, die allerdings durch die eingebetteten Fasern stark gestört wird. Es ist anzunehmen, dass der Kunststoff von den Fasern abriss und dies zum Bruch der Probe führte.

Es fällt auf, dass bei fast allen Proben unter 45° nach Versuchsende eine Restdehnung zurückblieb, wenn bereits keine Kraft mehr auf die Probe einwirkte. Die Restdehnung in Längsrichtung betrug bei den HT-Werkstoffen bei einer vorausgegangenen Maximaldehnung von etwa $5000 \frac{\mu\text{m}}{\text{m}}$ bis zu $250 \frac{\mu\text{m}}{\text{m}}$ (vergleiche Abb. A1.3, A1.4 und A1.8 in Anlage 1). Das Material HM090 wies im Zugversuch eine Restdehnung von etwa $250 \frac{\mu\text{m}}{\text{m}}$ bei einer vorangegangenen Längsdehnung von $1100 \frac{\mu\text{m}}{\text{m}}$ auf (Abb. A1.12).

Das Auftreten von derartigen Restdehnungen lässt sich damit erklären, dass bei diesen Proben nicht die Fasern auf Dehnung beansprucht werden, sondern allein das verbindende Harz. Da Harze naturgemäß viskoelastische Eigenschaften aufweisen, überträgt sich dieser Effekt bei einem solchen Versuch auch auf den Verbundwerkstoff.

Bei den unidirektionalen Proben unter 45° wurde während des Versuchs eine starke Verdrillung der Probe beobachtet, wobei die Linienlager auf Punktlager reduziert wurden. Da die ursprüngliche Versuchseinrichtung mit Linienlagern die freie Verformung der Probe stark behinderte, wurden die Biegeversuche auf der Zugseite mit modifizierten Lagern wiederholt.

Zu diesen Zweck wurden je drei Halbstifte auf die Proben aufgeklebt, die im Zusammenspiel mit der restlichen Versuchseinrichtung entsprechend der Skizze in Abb. 5 drei Punktlager ergaben. Das vierte Lager blieb als Linienlager bestehen, um den Versuch handhabbar zu gestalten. Zudem kann davon ausgegangen werden, dass die Probe fähig ist, sich an ein Lager anzupassen und jegliche Verformungen an den anderen Lagern auszuspielen. Abb. 6 zeigt die eingebaute Probe mit drei Punkt- und einem Linienlager.

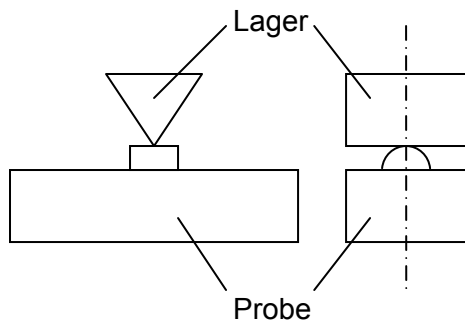


Abb. 5 Prinzipskizze Punktlager

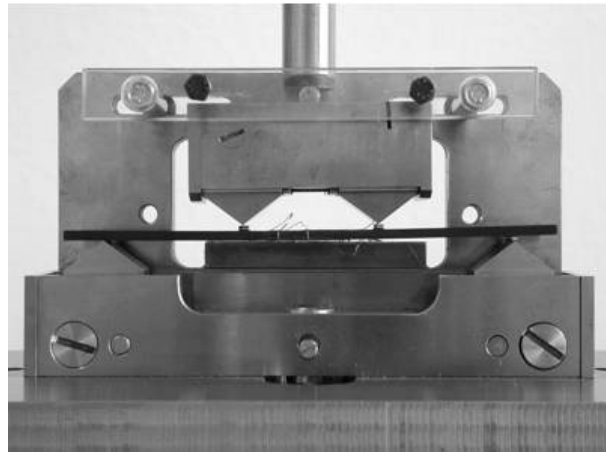


Abb. 6 Probe mit Punktlagerung

Entsprechend Tabelle 1 wurden insgesamt 18 verwertbare Datensätze mit den Messgrößen Längsdehnung ε_x , Querdehnung ε_y und Kraft F während der einzelnen Versuchsabläufe aufgezeichnet.

In Abb. 7 und Abb. 8 sind beispielhaft zwei Messwertsätze graphisch dargestellt. Man erkennt darin deutlich die Be- und Entlastungswege, die durch eine Haltezeit im Umkehrpunkt getrennt werden. Zu Beginn der Messung geht eine kurze Zeit voraus, in der der Stempel bis zum Kontakt auf die Lagerbrücke abgesenkt wird. Erst ab dem Kontakt steigen Kraft und Dehnungen signifikant an.

Bei den Versuchen, bei denen ein Knacken oder ein Bruch auftraten, ist wegen der Materialzerstörung nur die Belastungskurve bis zu diesem Punkt verwendbar.

Im Vergleich der vorliegenden Datensätze ist die bei den 45°-Proben verbleibende Restdehnung in Abb. 7 gut sichtbar. Bei diesen Proben liegen außerdem Längs- und Querdehnung in der gleichen Größenordnung. Die Proben in bzw. quer zur Faserrichtung erfahren dagegen erheblich unterschiedliche Längs- und Querdehnungen.

Alle weiteren Messwert-Diagramme befinden sich in Anlage 1.

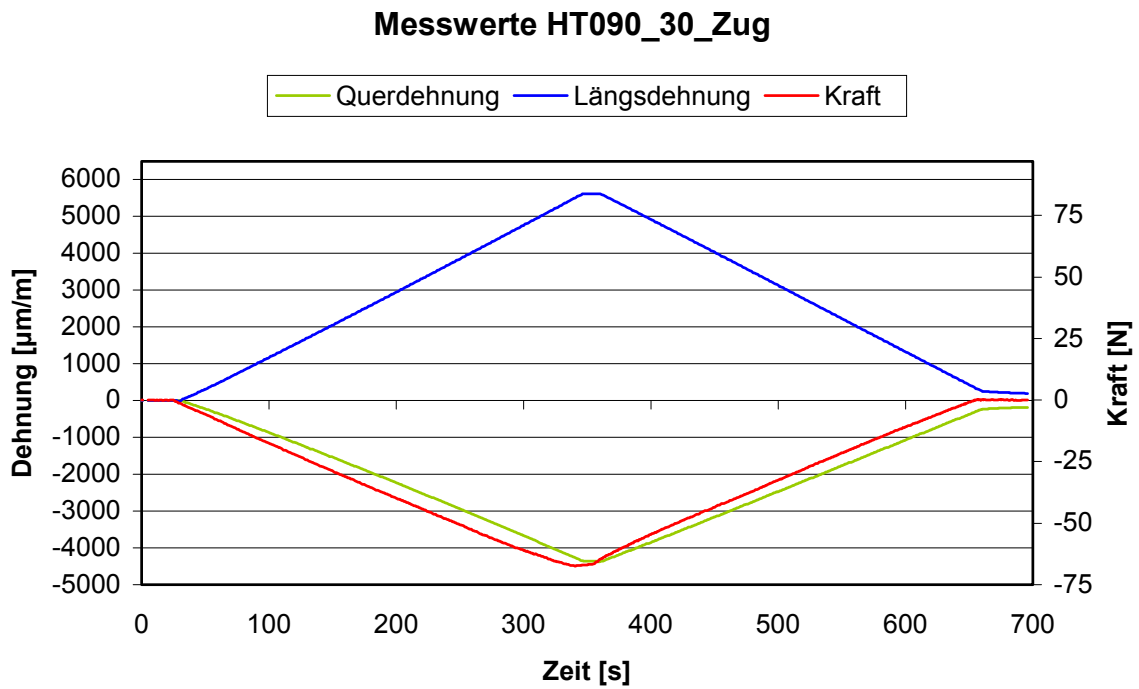


Abb. 7 Messdaten: Material HT090, Probe 30 unter 45° , Zugseite

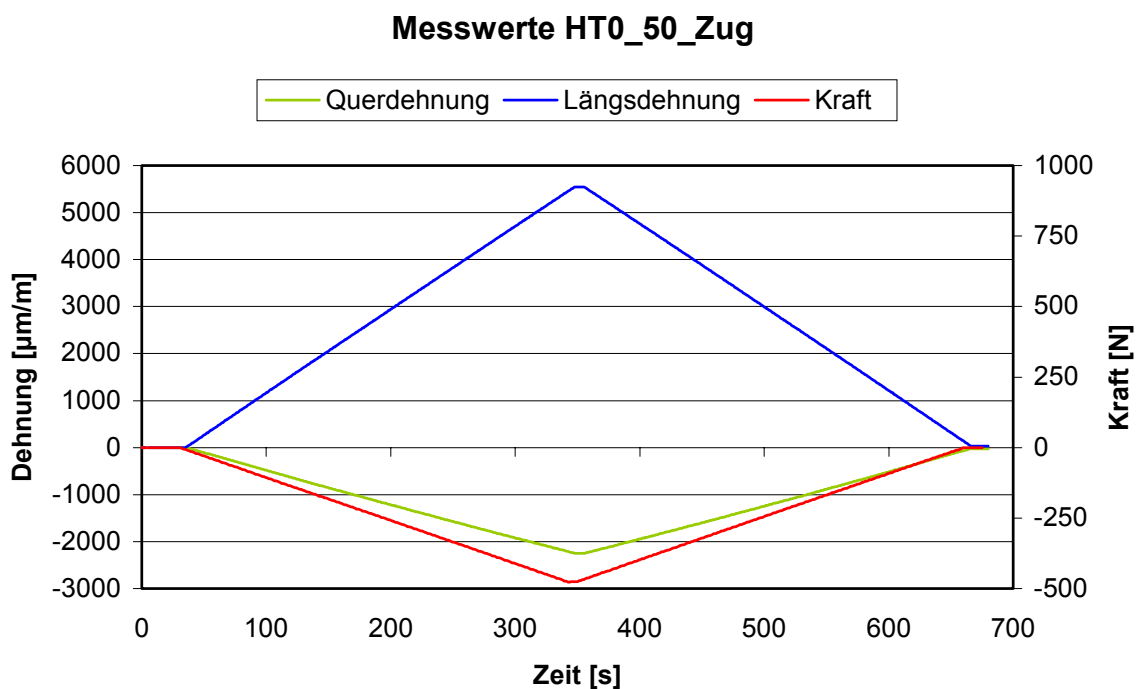


Abb. 8 Messdaten: Material HT0, Probe 50 in Faserrichtung, Zugseite

4. Versuchsauswertung

4.1. Ermittlung der Materialparameter aus den Versuchsdaten

Die Ermittlung der Materialkonstanten der Probenwerkstoffe aus den Messdaten erfolgte in zwei Schritten. Zuerst wurde eine Visualisierung der Verläufe $|\sigma_x(\varepsilon_x)|$, $|\varepsilon_y(\varepsilon_x)|$ sowie $|\sigma_x(2(\varepsilon_x - \varepsilon_y))|$ entsprechend den Gleichungen (14) und (20) aus Kapitel 2.2 durchgeführt. In den dabei entstandenen Diagrammen sind die Werkstoffparameter als Anstiege der Geraden enthalten. Zur genauen Bestimmung dieser Werte schloss sich daher eine Regressionsanalyse an.

Die Rechnungen und Darstellungen erfolgten mit Hilfe der Software „Microsoft Excel“, die bereits automatisch mit doppelter Genauigkeit, d.h. mit 15 Stellen, rechnet.

4.1.1. Visualisierung der Spannungs-Dehnungs-Verläufe

Bei Messungen mit Dehnungsmessstreifen hängt das Messergebnis nicht nur von der zu messenden Dehnung in Längsrichtung des DMS ab, sondern wird auch von einer Dehnung quer zur Messrichtung beeinflusst [2]. Diese baulich bedingte Querempfindlichkeit führt zu einem systematischen Fehler, der nach [3] mit den Beziehungen

$$\varepsilon_l = \frac{1 - \nu_0 q}{1 - q^2} \left(\overset{Anz}{\varepsilon_l} - q \overset{Anz}{\varepsilon_q} \right) \quad (21)$$

korrigiert werden kann.

Die Indizes l und q beziehen sich dabei auf die Längs- und Querrichtung des DMS. Die gesuchte korrigierte Dehnung in Messrichtung des DMS ist ε_l . Sie wird bestimmt durch die Querempfindlichkeit q der verwendeten DMS, die Konstante ν_0 sowie durch die Anzeigewerte der Längsdehnung $\overset{Anz}{\varepsilon_l}$ und der Querdehnung $\overset{Anz}{\varepsilon_q}$ an der Messstelle, die mit zwei zueinander senkrechten DMS (z.B. mit einer T-Rosette) gemessen werden.

Überträgt man die Gleichung (21) vom DMS-bezogenen Koordinatensystem auf das im Versuch verwendete $x - y - z$ -Koordinatensystem, ergeben sich unter der Voraussetzung, dass

Versuchsauswertung

die Querempfindlichkeit für beide DMS der Rosette gleich groß ist, folgende Korrekturbeziehungen für die Dehnungen in x - und y -Richtung:

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu_0 q}{1-q^2} \left(\overset{Anz}{\varepsilon_x} - q \overset{Anz}{\varepsilon_y} \right) \text{ und } \varepsilon_y = \frac{1-\nu_0 q}{1-q^2} \left(\overset{Anz}{\varepsilon_y} - q \overset{Anz}{\varepsilon_x} \right) \quad (22)$$

Die Konstante $\nu_0 = 0,285$ ist das verwendete Dehnungsverhältnis $\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l}$ im Versuch zur Bestimmung des k-Faktors des DMS, [2]. Somit wird eine Querdehnung von $\varepsilon_q = \nu_0 \varepsilon_l = -0,285 \cdot \varepsilon_l$ bereits im k-Faktor berücksichtigt. Im Allgemeinen tritt jedoch eine Abweichung vom realen Wert auf, die bei der Auswertung der Messergebnisse berücksichtigt, d.h. berichtigt werden sollte.

Aus den Geometriedaten, Breite b und Dicke d , dem Hebelarm l und der Kraftmessung F wird die wirkende Längsspannung an der Materialoberfläche nach (11) zu

$$\sigma_x \left(z = \pm \frac{d}{2} \right) = \pm \frac{3Fl}{bd^2}$$

berechnet.

Die korrigierten Dehnungen ε_x und ε_y bilden zusammen mit der Randspannung σ_x die Grundlage für die Visualisierung der Materialparameter entsprechend Kapitel 2.2.2 und Kapitel 2.2.3. Dafür werden diese drei Größen betragsmäßig in entsprechende Diagramme nach (14) und (20) angetragen. Nach (14) ergeben sich aus den Experimenten mit den Proben in 1- und 2-Richtung Darstellungen für

$$\begin{aligned} |\sigma_x(\varepsilon_x)| &= E_x |\varepsilon_x| \\ |\varepsilon_y(\varepsilon_x)| &= \nu_{xy} |\varepsilon_x| \end{aligned}$$

und nach (20) aus den Versuchen mit den 45°-Proben

$$\left| \sigma_x \left(2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \right) \right| = G_{xy} \cdot \left| 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \right|$$

Der Elastizitätsmodul E_x kann demnach einem $|\varepsilon_x| - |\sigma_x|$ -Diagramm, die Querdehnzahl ν_{yx} einem $|\varepsilon_x| - |\varepsilon_y|$ -Diagramm und der Schubmodul G_{xy} einem $|2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)| - |\sigma_x|$ -Diagramm der entsprechenden Versuche entnommen werden. Da die Parameter des Werkstoffmodells Konstanten sind, sollten die Messwertpaare $(\sigma_x, \varepsilon_x)$, $(\varepsilon_y, \varepsilon_x)$ und $(\sigma_x, 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y))$ nähe-

rungsweise auf einer Geraden liegen, deren Anstieg dem jeweiligen Materialkennwert entspricht.

Bei der Erstellung und Auswertung der Diagramme muss die Orientierung der Proben bezüglich der 1- und 2-Richtung des Materials beachtet werden, da bei orthotropem Material im Allgemeinen zwei verschiedene Elastizitätsmoduln E_1 und E_2 sowie Querdehnraten ν_{12} und ν_{21} auftreten. Beim Probenzuschnitt wurde festgelegt, dass die Längsrichtung der Probe „10“ der 1-Richtung entspricht, d.h. $x = 1$ und $y = 2$. Aus den Versuchen mit den Proben „10“ lassen sich daher der Elastizitätsmodul E_1 und die Querdehnraten ν_{12} gewinnen. Die Größen E_2 und ν_{21} werden durch die Versuche an den Proben „50“ bestimmt.

Die Abb. 9, Abb. 10 und Abb. 11 zeigen diese Auswertungsdiagramme beispielhaft für das Material HT090. Anlage 2 fasst die Diagramme für alle vier untersuchten Materialien zusammen.

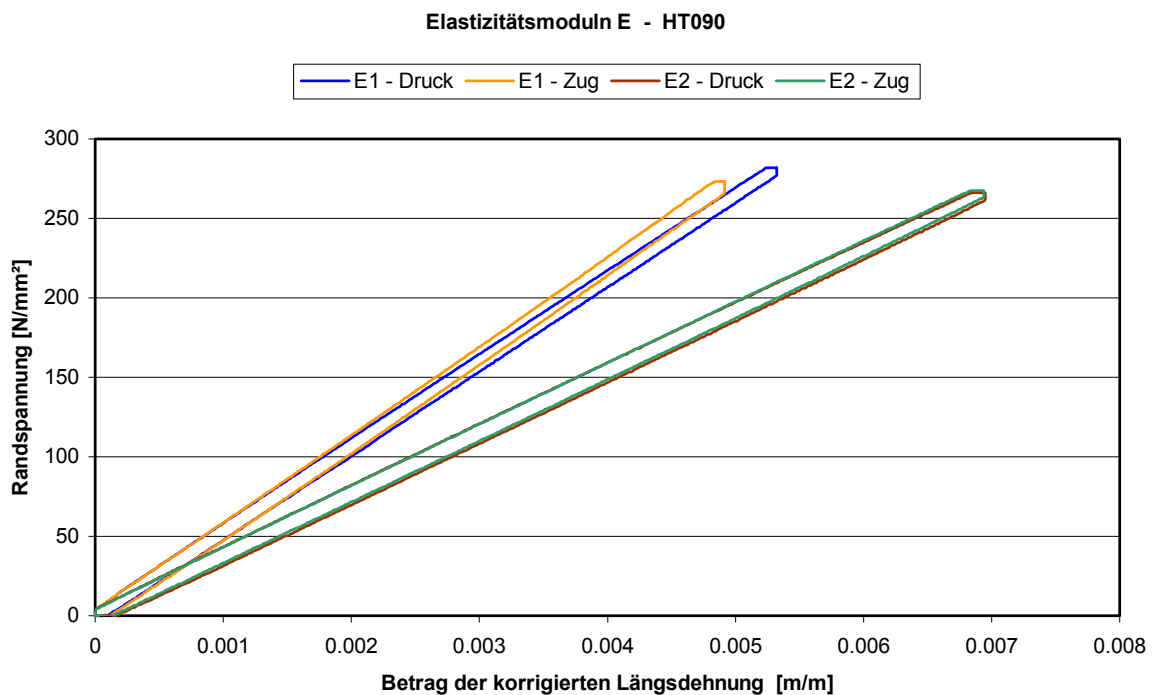


Abb. 9 Verlauf $|\sigma_x(\varepsilon_x)|$ des Materials HT090

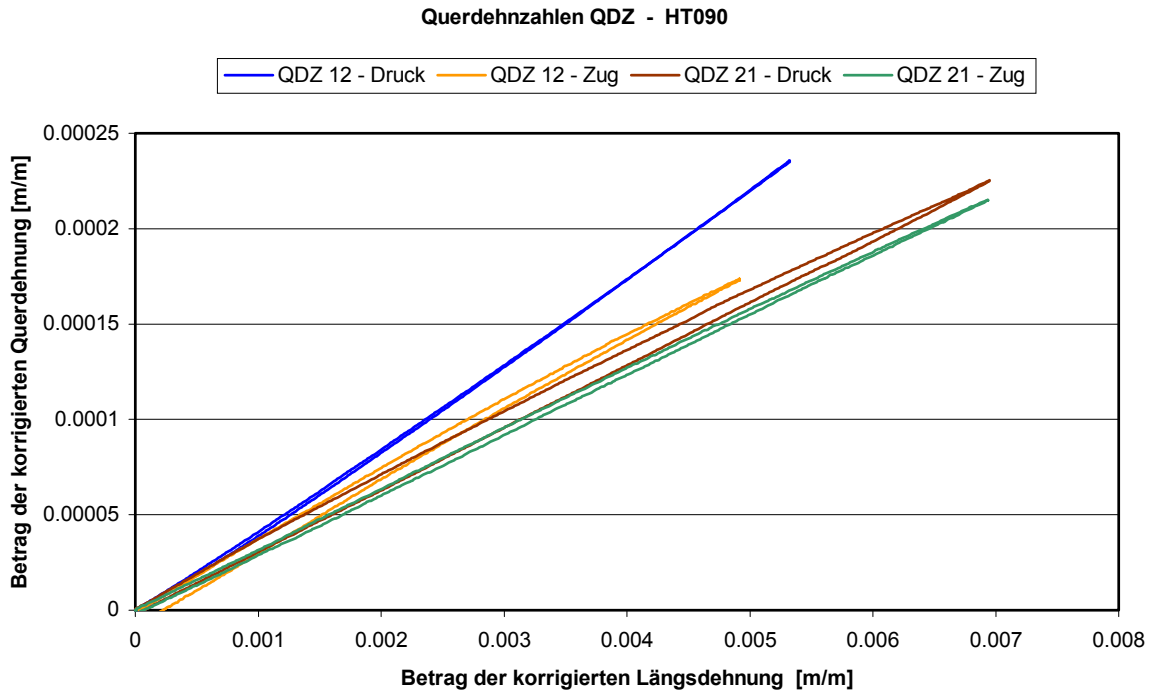


Abb. 10 Verlauf $|\varepsilon_y(\varepsilon_x)|$ des Materials HT090

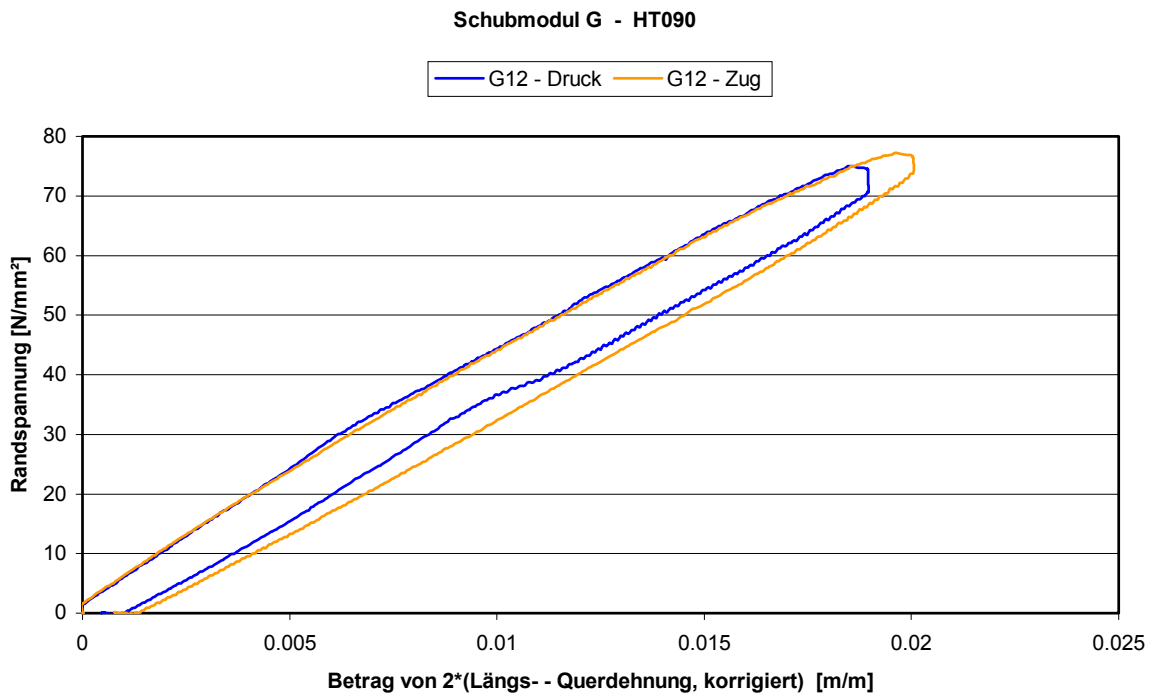


Abb. 11 Verlauf $|\sigma_x(2(\varepsilon_x - \varepsilon_y))|$ des Materials HT090

Die einzelnen Kurven werden jeweils von einer großen Anzahl an Messwerten gebildet. In normal verlaufenen Versuchen wurden etwa 700 bis 900 Wertepaare aufgezeichnet. Die genaue Anzahl hängt hierbei von der Länge der Zeit ab, die bis zum ersten Kontakt von Stempel und Probe verging, sowie von der Haltezeit im Umkehrpunkt. Trat ein Knacken oder Bruch der Probe auf, wurde die Messung eher abgebrochen, aber es liegen in allen diesen Fällen dennoch etwa 180 bis 300 Messpunkte vor, die eine Auswertung im Bereich bis zum Versagen gestatten.

Die erhaltenen Kurven besitzen tatsächlich einen annähernd linearen Verlauf. Die vorhandenen Abweichungen davon sind u. a. zufälligen Messungenauigkeiten und Abweichungen des tatsächlichen Materialverhaltens vom linear-elastischen Werkstoffmodell geschuldet.

Bei fast allen Versuchen fallen der Belastungs- und der Entlastungszeit nicht exakt zusammen. Beide Kurventeile liegen aber mit gleichem Anstieg parallel zueinander, was für die Bestimmung der Parameter vollkommen ausreichend ist.

Die Ursache dafür, dass beide Kurventeile nicht zusammenfallen, liegt vermutlich darin, dass es bei der Aufzeichnung der Dehnungs- und Kraftmesswerte Probleme mit der Zeitsynchronität gab. Oft hinkte die Aufzeichnung der Kraftmesswerte denen der Dehnung etwas hinterher (siehe Messwertdiagramme in Anlage 1). Dieses generelle Problem der verwendeten Versuchseinrichtung ist schon länger bekannt, konnte aber bis jetzt nicht behoben werden.

Um die Teilkurven zur Überdeckung zu bringen, müsste der Datensatz in Be- und Entlastung geteilt sowie beide Teilmessreihen bezüglich eines Punktes nach Beginn der Kraftaufbringung genullt werden. Dieses Vorgehen entspräche dem Aufbringen einer Vorlast, was wegen der Linearität und der damit verbundenen Superposition legitim ist. Die Geraden würden bei diesem Verfahren nur verschoben; ihr Anstieg bliebe aber gleich. Aus diesem Grund kann man auf diesen zusätzlichen Verfahrensschritt verzichten und die Anstiege aus den Teilgeraden ermitteln.

4.1.2. Regressionsanalyse

Liegen entsprechende Datenreihen für Diagramme wie in Abschnitt 4.1.1 vor, müssen als nächstes die Anstiege der Geraden ermittelt werden. Diese Werte sind die gesuchten Materialparameter.

Zusätzlich dazu soll eine Varianz oder Standardabweichung für die Werkstoffkennwerte angegeben werden, mit der eine Aussage über die Genauigkeit der experimentell bestimmten Werkstoffkonstanten getroffen werden kann.

Zu diesem Zweck wird die Messreihe zunächst in einen Belastungs- und einen Entlastungsteil zerlegt, in denen der Vor- und Nachspann der Messung sowie die Messpunkte im Umkehrpunkt nicht mehr enthalten sind. Danach werden diese Teildatensätze mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate linear approximiert und die zugehörigen Standardabweichungen mit gängigen Methoden der Statistik, z.B. nach Sachs [4], abgeschätzt.

Die lineare Regression erfolgt mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate. Für die Koeffizienten m und p einer Approximationsgeraden $y = mx + p$ gelten nach [2] folgende Beziehungen:

$$m = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k - \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k\right)}{n}}{\sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2}{n}} \quad (23)$$

$$\text{und } p = \frac{\sum_{k=1}^n y_k - m \sum_{k=1}^n x_k}{n} \quad (24)$$

Die Größen x_k und y_k bezeichnen die $k = 1 \dots n$ Beobachtungspunkte.

Bei dieser mit der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Regressionsgeraden $y = mx + p$ berechnet sich die Standardabweichung S_m des Regressionskoeffizienten m zu

$$S_m = \frac{S_{y,x}}{\sqrt{Q_x}} \quad (25)$$

Die Größe $S_{y,x}$ ist die Standardabweichung der Regression. Sie beschreibt die Güte der Approximation und ist ein Maß dafür, wie nahe die Ausgangsdaten bereits an der Gerade liegen. Für eine Messkurve, die bereits annähernd die Form einer Geraden besitzt, wird $S_{y,x}$ einen relativ kleinen Wert annehmen, während sich für eine stark gekrümmte Datenreihe eine relativ große Standardabweichung ergeben wird.

Diese Standardabweichung hat den Wert

$$S_{y,x} = \sqrt{\frac{Q_y - \frac{(Q_{xy})^2}{Q_x}}{n-2}} \quad (26)$$

Die Abweichungsquadrate oder auch Fehlerquadratsummen Q_x bzw. Q_y der beiden vorgegebenen Größen x und y sind ein Maß dafür, wie stark diese Größen um ihren Mittelwert \bar{x} bzw. \bar{y} streuen:

$$Q_x = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \quad \text{bzw.} \quad Q_y = \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 \quad (27)$$

$$\text{mit } \bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \quad \text{bzw.} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{n} \quad (28)$$

Das Produkt der Abweichungen beider Größen vom jeweiligen Mittelwert beschreibt den Grad des Miteinandervariierens der Datenpunkte und heißt mittleres Abweichungsprodukt Q_{xy} . Seine Berechnung erfolgt analog zu den Fehlerquadratsummen Q_x bzw. Q_y :

$$Q_{xy} = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \quad (29)$$

Die verwendete Software „Microsoft Excel“ unterstützt sowohl die Approximation als auch die Regressionsanalyse mit eigenen Werkzeugen. Diese legen ebenfalls die Methode der kleinsten Quadrate für die Regression selbst sowie das Analysetool „Anova“ für dessen Varianzanalyse zu Grunde.

Für jede zu bestimmende Materialkonstante entstehen durch die Zerlegung der Messkurven in einen Be- und einen Entlastungsteil sowie die Durchführung der Versuche auf der Zug- und auf der Druckseite $N \in \{1,2,3,4\}$ einzelne Teilgeraden. Die Regressionsanalyse liefert für jede Teilgerade je einen Wert für den Anstieg, d.h. für den Werkstoffkennwert, und dessen Standardabweichung. Diese N Ergebnisse müssen zu einer Angabe zusammengefasst werden.

Unter den vereinfachenden Annahmen, dass die Teilkurven jeweils durch gleich viele Messwertpaare definiert werden und gleiche Varianzen besitzen – was annähernd zutrifft –, kön-

Versuchsauswertung

nen die Regressionskoeffizienten m , d.h. die jeweiligen Materialkennwerte, nach [5] arithmetisch durch

$$\bar{m} = \frac{\sum_{k=1}^N m_k}{N} \quad (30)$$

gemittelt und die Standardabweichungen der einzelnen Teilkurven zu einer Standardabweichung \bar{S}_m innerhalb der Messreihen („innere Standardabweichung“) nach [5] und [6] zusammengefasst werden:

$$\bar{S}_m = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N S_{m_k}^2}{N}} \quad (31)$$

Für das Beispielmateriale HT090 sind diese Ergebnisse in Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2 gerundete Regressionsergebnisse des Materials HT090 für den E-Modul E_1
Querempfindlichkeit $q = 0,006$; B = Belastung und E = Entlastung

Größe Versuch	Approximation $y = mx + p$		Standardabweichung...	
	p	$m = E_1$ in $[\text{N/mm}^2]$...der Approximation	...des Koeffizienten $m = E_1$ in $[\text{N/mm}^2]$
10 Druck2 B	5,4	52900	0,56	20,4
10 Druck2 E	-5,5	53000	0,17	6,5
10 Zug B	2,8	55700	0,69	28,4
10 Zug E	-8,3	55500	0,65	28,3
Mittelwert		54300		22.7

Sowohl an den kleinen Standardabweichungen für die Approximation als auch optisch an den Geraden in Abb. 9 ist erkennbar, dass die Messkurve nur eine geringe Krümmung aufweist. Das bedeutet, dass die durchgeführte Regression einen vernachlässigbar kleinen Fehler einbringt.

Das Material HT090 besitzt einen mittleren E-Modul $\bar{E}_1 \cong 54300 \text{ N/mm}^2$, der mit einer inneren Standardabweichung von $\bar{S}_{E_1} \cong 22,7 \text{ N/mm}^2$ behaftet ist. Dies führt auf eine relative Genauigkeit von $\frac{\bar{S}_{E_1}}{\bar{E}_1} = 4,2 \cdot 10^{-4}$. Es ist daher davon auszugehen, dass die Approximation ausreichend genau erfolgte.

Die Auswertung für die Querdehnzahlen und den Schubmodul erfolgt analog.

4.2. Ermittelte Materialparameter

Tabelle 3 fasst die ermittelten Werkstoffkennwerte und deren innere Standardabweichungen der Versuchsmaterialien zusammen.

Tabelle 3 experimentell ermittelte Materialparameter und deren Standardabweichung

Material Kennwert	HT090	HT0	HM090	HM0
\bar{E}_1 in $[\text{N/mm}^2]$	54300	8300	144000	5500
\bar{S}_{E_1} in $[\text{N/mm}^2]$	22,7	5,5	331,4	45,7
\bar{E}_2 in $[\text{N/mm}^2]$	38500	98500	101900	190100
\bar{S}_{E_2} in $[\text{N/mm}^2]$	10,7	33,0	113,0	1360,7
$\bar{\nu}_{12}$ in $[\text{m/m}]$	0,040	0,030	0,041	0,006
$\bar{S}_{\nu_{12}}$ in $[\text{m/m}]$	$5,2 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$
$\bar{\nu}_{21}$ in $[\text{m/m}]$	0,032	0,430	0,006	0,400
$\bar{S}_{\nu_{21}}$ in $[\text{m/m}]$	$3,1 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-3}$
\bar{G}_{12} in $[\text{N/mm}^2]$	3900	3700	3600	3900
$\bar{S}_{G_{12}}$ in $[\text{N/mm}^2]$	10,0	2,5	9,1	6,1

Versuchsauswertung

Die meisten Standardabweichungen liefern darin eine relative Abweichung von $\frac{\bar{S}_{m_x}}{\bar{x}} \leq 3\%$ des Materialparameters x . Nur der Kennwert E_1 beim Material HM0 besitzt eine relative Abweichung von $\frac{\bar{S}_{E_1}}{\bar{E}_1} = 8,3\%$ und somit eine erhöhte Unsicherheit.

Bei der Betrachtung dieser Werkstoffkennwerte ist erkennbar, dass bei den bidirektionalen CFK, HT090 und HM090, beide Elastizitätsmoduln und beide Querdehnzahlen etwa die gleiche Größenordnung besitzen. Die unidirektionalen Materialien HT0 und HM0 weisen dagegen E-Moduln und Querdehnzahlen deutlich verschiedener Größenordnungen auf. Eine Ausnahme zu diesen Aussagen bilden nur die Querdehnzahlen des Werkstoffes HM090, die im Gegensatz zu den Querdehnzahlen des im Aufbau vergleichbaren Materials HT090 weit auseinander liegen.

An der unterschiedlichen Größe der Elastizitätsmoduln lässt sich bei den unidirektionalen CFK sehr gut die Faserrichtung erkennen. Die Fasern versteifen den Kunststoff in ihrer Längsrichtung, so dass die Faserrichtung gleich der Richtung mit dem größeren Elastizitätsmodul, hier die 2 – Richtung, sein muss. Dies entspricht der in Kapitel 3.1 getroffenen Festlegung der 1 – und 2 – Richtung bezüglich des Probenzuschnittes.

Insgesamt sind die Elastizitätsmoduln in Faserrichtung bei den HM-Werkstoffen 2 bis 2,6-mal größer als bei den HT-Werkstoffen. Die Ursache dafür ist der deutlich höhere E-Modul der HM-Fasern, der sich auf den Kompositwerkstoff überträgt.

Anhand der Größe der Querdehnzahlen kann festgestellt werden, dass bei bidirektionalem Material die Querdehnung durch die senkrechte Faseranordnung in beiden Richtungen behindert wird. Die entsprechenden unidirektionalen Werkstoffe weisen im Gegensatz dazu eine sehr hohe Querdehnung bei Belastung in Faserrichtung, und eine relativ niedrige bei Belastung quer zu den Fasern auf. Im ersten Falle tragen die Kohlenstofffasern in Längsrichtung. Dabei werden sie länger und dünner, wobei sie durch nichts daran gehindert werden. Der Kunststoff passt sich an. Im zweiten Fall möchte sich der Kunststoff in der Querrichtung zusammenziehen, kann das aber wegen der eingebetteten starren Fasern nicht, was zu einer sehr niedrigen Querdehnzahl führt.

Alle Schubmoduln sind annähernd gleich groß, was ein Indiz dafür ist, dass bei den entsprechenden Versuchen bzw. bei Schubverformungen nur der Kunststoff selbst zum Tragen kommt und Art sowie Anordnung der Fasern unerheblich sind.

In Kapitel 2.1 wurde ausgeführt, dass die Werkstoffkonstanten der Symmetriebedingung (9)

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2$$

genügen müssen. Zur Überprüfung der Erfüllung dieser Bedingung wird folgende vereinfachte Form verwendet:

$$\nu_{21}E_1 - \nu_{12}E_2 = 0 \quad (32)$$

Für jedes Material wird die linke Seite dieser Gleichung, die wegen der gewählten Darstellungsform gleichzeitig dem Fehler entspricht, aus den ermittelten Größen berechnet. Tabelle 4 zeigt einen Vergleich der verschiedenen Werkstoffe:

Tabelle 4 Erfüllung der Symmetriebedingung (32)

	HT090	HT0	HM090	HMO
$\bar{\nu}_{21}\bar{E}_1 - \bar{\nu}_{12}\bar{E}_2$	197,6	614,0	-3313,9	-920,6

Ursache für diese teilweise recht hohe Abweichung von der Symmetrie können Messungenauigkeiten sowie eine Abweichung der Probenlängsachse von der exakten Faserrichtung sein.

5. Symmetrieausgleich der Nachgiebigkeitsmatrix

5.1. Bedingte Approximation mit Lagrange'schem Multiplikator

Entsprechend Kapitel 2.1 muss die allgemeine Symmetriebedingung (9) bzw. (32) für die Nachgiebigkeitsmatrix

$$v_{21}E_1 = v_{12}E_2 \quad \text{bzw.} \quad v_{21}E_1 - v_{12}E_2 = 0$$

von den Werkstoffkonstanten erfüllt werden. Dafür müssen die ermittelten mittleren Materialparameter \bar{E}_1 , \bar{E}_2 , \bar{v}_{12} und \bar{v}_{21} aneinander angepasst werden.

Die einzelnen Größen sollen dabei nach Möglichkeit nur gering verändert werden. Diese Bedingung lässt sich über das Minimum des Fehlerquadrates, d.h. des Quadrates der jeweiligen Korrektur einer Größe, realisieren.

Da die Elastizitätsmoduln und die Querdehnzahlen verschieden groß sind und auch unterschiedliche Genauigkeiten besitzen, wird jeweils der relative Wert $\frac{x}{S_x}$ jeder Größe betrachtet.

Diese Relativwerte liegen bei gleichen relativen Fehlern, d.h. bei gleicher relativer Genauigkeit, in der selben Größenordnung und gewährleisten zudem, dass Parameter mit relativ hoher Standardabweichung, d.h. mit höherer Ungenauigkeit, stärker korrigiert werden als Kennwerte mit geringer Unsicherheit.

Die Symmetriengleichung (32) stellt in der Approximation eine Nebenbedingung dar, die von den ausgeglichenen Materialkonstanten \hat{E}_1 , \hat{E}_2 , \hat{v}_{12} und \hat{v}_{21} erfüllt werden muss:

$$\hat{v}_{21}\hat{E}_1 - \hat{v}_{12}\hat{E}_2 = 0 \quad (33)$$

Ein geeignetes Mittel für eine solche bedingte Ausgleichung ist nach Schwarz [7] die Einführung eines so genannten Lagrange'schen Multiplikators ι . Er verknüpft die Nebenbedingung mit der Summe der Fehlerquadrate in der Lagrange-Funktion und ist zunächst eine zusätzliche Unbekannte.

Die Lagrange-Funktion L nimmt unter Beachtung aller aneinander anzugleichenden Materialparameter sowie der Nebenbedingung folgende Form an:

$$L = \sum (\text{relative Fehler})^2 - 2t(\text{Nebenbedingung} = 0)$$

$$= \left(\frac{\hat{E}_1 - \bar{E}_1}{\bar{S}_{E_1}} \right)^2 + \left(\frac{\hat{E}_2 - \bar{E}_2}{\bar{S}_{E_2}} \right)^2 + \left(\frac{\hat{v}_{12} - \bar{v}_{12}}{\bar{S}_{v_{12}}} \right)^2 + \left(\frac{\hat{v}_{21} - \bar{v}_{21}}{\bar{S}_{v_{21}}} \right)^2 - 2t(\hat{v}_{21}\hat{E}_1 - \hat{v}_{12}\hat{E}_2) \quad (34)$$

→ *Min*

Die Minimierung dieser Funktion gewährleistet, dass die Korrekturen möglichst klein sind und die Nebenbedingung mit den ausgeglichenen Werten erfüllt wird. Die notwendige Bedingung für ein solches Minimum lautet

$$\text{grad}(L) = 0 \quad (35)$$

Dafür wird die Lagrange-Funktion L nach allen Variablen, d.h. nach den gesuchten Kenngrößen \hat{E}_1 , \hat{E}_2 , \hat{v}_{12} und \hat{v}_{21} sowie nach dem Lagrange'schen Multiplikator t , abgeleitet:

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{E}_1} = \frac{2(\hat{E}_1 - \bar{E}_1)}{\bar{S}_{E_1}^2} - 2t\hat{v}_{21} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{E}_2} = \frac{2(\hat{E}_2 - \bar{E}_2)}{\bar{S}_{E_2}^2} + 2t\hat{v}_{12} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{v}_{12}} = \frac{2(\hat{v}_{12} - \bar{v}_{12})}{\bar{S}_{v_{12}}^2} + 2t\hat{E}_2 = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{v}_{21}} = \frac{2(\hat{v}_{21} - \bar{v}_{21})}{\bar{S}_{v_{21}}^2} - 2t\hat{E}_1 = 0 \quad (39)$$

Die partielle Ableitung nach dem Lagrange-Multiplikator t liefert wiederum die Nebenbedingung:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -2(\hat{v}_{21}\hat{E}_1 - \hat{v}_{12}\hat{E}_2) = 0 \quad (40)$$

Die Ableitungen bezüglich der Materialparameter, die Beziehungen (36), (37), (38) und (39) können nach den gesuchten Kennwerten \hat{E}_1 , \hat{E}_2 , \hat{v}_{12} und \hat{v}_{21} in Abhängigkeit des Multiplikators t aufgelöst werden.

Symmetrieausgleich der Nachgiebigkeitsmatrix

Die Kombination der Beziehungen (36) und (39) ergibt Gleichungen für $\hat{E}_1(t)$ und $\hat{\nu}_{21}(t)$:

$$\hat{E}_1(t) = \frac{\bar{E}_1 + \bar{\nu}_{21} \bar{S}_{E_1}^2 t}{1 - \bar{S}_{E_1}^2 \bar{S}_{\nu_{21}}^2 t^2} \quad (41)$$

$$\hat{\nu}_{21}(t) = \frac{\bar{\nu}_{21} + \bar{E}_1 \bar{S}_{\nu_{21}}^2 t}{1 - \bar{S}_{E_1}^2 \bar{S}_{\nu_{21}}^2 t^2} \quad (42)$$

Das Auflösen von (37) und (38) nach $\hat{E}_2(t)$ und $\hat{\nu}_{12}(t)$ liefert

$$\hat{E}_2(t) = \frac{\bar{E}_2 - \bar{\nu}_{12} \bar{S}_{E_2}^2 t}{1 - \bar{S}_{E_2}^2 \bar{S}_{\nu_{12}}^2 t^2} \quad (43)$$

$$\hat{\nu}_{12}(t) = \frac{\bar{\nu}_{12} - \bar{E}_2 \bar{S}_{\nu_{12}}^2 t}{1 - \bar{S}_{E_2}^2 \bar{S}_{\nu_{12}}^2 t^2} \quad (44)$$

Diese Gleichungen werden als Funktionen der experimentell gefundenen Werkstoffkenngrößen in Abhängigkeit des Lagrange'schen Multiplikators t betrachtet. Der Multiplikator t bestimmt darin die Größe der Modifikation: Bei sinkendem Wert von $|t|$, verringert sich die Korrektur ebenfalls. Ist $t = 0$, so wird der ursprüngliche Wert nicht verändert.

Zur Bestimmung von t werden die Beziehungen (41), (42), (43) und (44) in die Nebenbedingung (33) eingesetzt:

$$\frac{(\bar{\nu}_{21} + \bar{E}_1 \bar{S}_{\nu_{21}}^2 t)(\bar{E}_1 + \bar{\nu}_{21} \bar{S}_{E_1}^2 t)}{(1 - \bar{S}_{E_1}^2 \bar{S}_{\nu_{21}}^2 t^2)} - \frac{(\bar{\nu}_{12} - \bar{E}_2 \bar{S}_{\nu_{12}}^2 t)(\bar{E}_2 - \bar{\nu}_{12} \bar{S}_{E_2}^2 t)}{(1 - \bar{S}_{E_2}^2 \bar{S}_{\nu_{12}}^2 t^2)} = 0 \quad (45)$$

Es ergibt sich eine Gleichung sechsten Grades für t , die nach dem Einsetzen der bekannten Parameter \bar{E}_1 , \bar{E}_2 , $\bar{\nu}_{12}$ und $\bar{\nu}_{21}$ sowie deren Standardabweichungen \bar{S}_{E_1} , \bar{S}_{E_2} , $\bar{S}_{\nu_{12}}$ und $\bar{S}_{\nu_{21}}$ leicht numerisch lösbar ist. Die Lösungen wurden mit Hilfe des Formelmanipulationsprogramms Maple ermittelt. Der Quelltext dafür befindet sich in Anlage 3.

Für die verschiedenen Probematerialien liefert Maple jeweils zwei reelle Lösungen für die Gleichung (45). Da die Korrektur der Werkstoffparameter möglichst gering sein soll, ist von diesen Lösungen die betragskleinere als t für die Berechnung der Materialkonstanten auszuwählen. Für die Ermittlung der korrigierten Parameter werden der Multiplikator t sowie die entsprechenden bekannten Größen für Materialparameter und Standardabweichungen in die

Formeln (41), (42), (43) und (44) eingesetzt. Die so berechneten Werkstoffkennwerte \hat{E}_1 , \hat{E}_2 , $\hat{\nu}_{12}$ und $\hat{\nu}_{21}$ genügen nun der Symmetriebedingung (33).

Für das Beispiel-Material HT090, Tabelle 3, liefert Maple für den Lagrange-Multiplikator t aus Gleichung (45) die Lösungen $t_1 \cong -22,5$ und $t_2 \cong 34709,0$. Entsprechend obigen Ausführungen muss $t = -22,5$ gesetzt werden. Die damit korrigierten Materialparameter sind in Tabelle 5 aufgeführt und erfüllen die Nebenbedingung.

Tabelle 5 Materialparameter für HT090 mit Symmetrieausgleich

Kennwerte	HT090
\hat{E}_1 in $[\frac{N}{mm^2}]$	53935,66132
\hat{E}_2 in $[\frac{N}{mm^2}]$	38631,34544
$\hat{\nu}_{12}$ in $[\frac{m}{m}]$	0,042853727
$\hat{\nu}_{21}$ in $[\frac{m}{m}]$	0,030693925
$\hat{\nu}_{21}\hat{E}_1 - \hat{\nu}_{12}\hat{E}_2$	≈ 0

5.2. Ergebnisse der Approximation, Beurteilung

Mit einer sinnvollen Rundung der berechneten Größen ergeben sich die in Tabelle 6 zusammengestellten ausgeglichenen Materialkennwerte. Der Schubmodul ist zum Vergleich aufgeführt, auch wenn er nicht an der Erfüllung der Symmetriebedingung beteiligt ist.

Tabelle 6 Materialparameter, ausgeglichen und gerundet

	HT090	HT0	HM090	HM0
\hat{E}_1 in $[\frac{N}{mm^2}]$	53900	8300	144300	4100
\hat{E}_2 in $[\frac{N}{mm^2}]$	38600	98500	101800	213700
$\hat{\nu}_{12}$ in $[\frac{m}{m}]$	0,043	0,036	0,010	0,006
$\hat{\nu}_{21}$ in $[\frac{m}{m}]$	0,031	0,430	0,007	0,322
\bar{G}_{12} in $[\frac{N}{mm^2}]$	3900	3700	3600	3900

Der Vergleich der Materialparameter der einzelnen Werkstoffe vor (Tabelle 3) und nach (Tabelle 6) dem Symmetrieausgleich zeigt beträchtliche Unterschiede in der jeweiligen Größe der Korrektur.

Das Material HT090 erfährt bei jeweils kleinen Standardabweichungen nur geringe Änderungen der vier kritischen Kennwerte. Allerdings weisen die unkorrigierten Parameter im Vergleich zu den anderen Werkstoffen bereits eine relativ gute Erfüllung der Symmetriebedingung auf (siehe Tabelle 4).

Die Elastizitätsmoduln von HT0 erfahren bei dem Symmetrieausgleich keine Korrektur, während die Querdehnzahlen durch ihre im Vergleich zum HT090 größere Standardabweichung stärker abgeändert werden.

Der Werkstoff HM090 zeigt vor der Approximation die schlechteste Erfüllung der Symmetriebedingung, was zu deutlich größeren Modifikationen führt. Durch ihre Größe dominieren allerdings die Elastizitätsmoduln gegenüber den Querdehnzahlen, so dass letztere viel stärker verändert werden. Zu beachten ist vor allem die mit etwa -78% sehr große relative Korrektur von $\hat{\nu}_{12}$. Sie erscheint deshalb so groß, weil die Querdehnzahl ν_{12} mit einem absoluten Wert von $\nu_{12} \cong 0,006$ sehr klein ist.

Wegen der vergleichsweise hohen Standardabweichung der Elastizitätsmoduln von HM0 werden diese um einen größeren Betrag korrigiert, während die Änderung der Querdehnzahlen auf Grund der relativ kleineren Standardabweichung geringer ausfällt.

Bis auf die Korrektur der Querdehnzahl $\hat{\nu}_{12}$ für das Material HM090 sind alle Modifikationen nicht übermäßig groß, so dass die erhaltenen Werkstoffparameter akzeptiert werden können.

6. Einfluss der Querempfindlichkeit

Die Querempfindlichkeit ist eine baulich bedingte Eigenschaft von Dehnungsmessstreifen, die einen systematischen Fehler der gemessenen Dehnung bewirkt, der zur ungenauen Bestimmung der Werkstoffkonstanten führen kann. Diese Parameter und die DMS-Messungen in einer Beanspruchungsanalyse verfälschen die zu ermittelnden Spannungen.

Im Folgenden soll daher die Querempfindlichkeit kurz erläutert und ihr Einwirken auf die Identifikation der Materialparameter sowie der Einfluss in einer Beanspruchungsanalyse untersucht werden.

6.1. Querempfindlichkeit

Bei Messungen mit Dehnungsmessstreifen (DMS) treten oft zweiachsige Spannungszustände an den jeweiligen Bauteiloberflächen auf. Dabei wirkt nicht nur eine Längsdehnung, sondern auch eine Querdehnung auf den DMS ein, die ebenfalls den Widerstand des Messgitters verändert. Das Messergebnis in Längsrichtung ist dadurch mit einem Fehler behaftet.

Diese Eigenschaft der Dehnungsmessstreifen wird durch die so genannte Querempfindlichkeit q charakterisiert. Sie gibt das Verhältnis der Dehnungsempfindlichkeiten des DMS in Längs- und Querrichtung, k_l und k_q , wider:

$$q = \frac{k_q}{k_l} \quad (46)$$

Die Bestimmung des k-Faktors eines DMS ist standardisiert und wird bei einem einachsigen Spannungszustand und einer Werkstoff-Querdehnzahl von $\nu_0 = 0,285$ durchgeführt. Dadurch ist eine Widerstandsänderung, die eine Querdehnung von $\varepsilon_q = -\nu_0 \varepsilon_l = -0,285 \varepsilon_l$ erzeugt, bereits im k-Faktor berücksichtigt.

Besitzt ein DMS eine von Null verschiedene Querempfindlichkeit q , misst er nur dann fehlerfrei, wenn er bei einem einachsigen Spannungszustand längs der Spannungsrichtung appliziert wird und der Werkstoff des Messobjektes eine Querdehnzahl von $\nu = \nu_0 = 0,285$ aufweist.

Bedingt durch die Bauart des Dehnungsmessstreifens kann die Querempfindlichkeit sowohl im positiven als auch negativen Bereich liegen. Zumeist ist sie jedoch positiv und hat einen Wert zwischen 0,5...3%.

Dies und weiteres bezüglich des durch die Querempfindlichkeit auftretenden Fehlers kann bei Keil [2] ausführlich nachgelesen werden.

6.2. Einfluss auf die Ermittlung der Materialparameter

Gegenstand dieser Untersuchung ist die bei der Bestimmung der Werkstoffkonstanten auftretende Abweichung zwischen berechnetem und wahrem Wert der Materialparameter, wenn bei der Auswertung der entsprechenden Versuche die Querempfindlichkeit vernachlässigt oder nur ungenau berücksichtigt wird.

6.2.1. Fehleranalyse

Der Fehler einer Größe wird durch die Differenz zwischen dem falschen und dem richtigen Wert beschrieben. Wird ein Materialkennwert ohne Berücksichtigung der Querempfindlichkeit der DMS direkt aus den Anzeigewerten $\overset{Anz}{\varepsilon_x}$ und $\overset{Anz}{\varepsilon_y}$ der DMS ermittelt, so ergibt sich der dabei entstehende Fehler aus der Differenz zwischen dem aus der Anzeige bestimmten und dem wirklichen Wert der jeweiligen Kenngröße:

$$\begin{aligned}\Delta E_x &= \overset{Anz}{E_x} - E_x, \\ \Delta \nu_{xy} &= \overset{Anz}{\nu_{xy}} - \nu_{xy} \\ \text{sowie } \Delta G_{xy} &= \overset{Anz}{G_{xy}} - G_{xy}\end{aligned}\tag{47}$$

Mit den Beziehungen (13) und (19) für die Abhängigkeit der Werkstoffkennwerte von den Messgrößen Spannung σ_x sowie Längs- und Querdehnung ε_x und ε_y ergibt sich für die Fehler

$$\Delta E_x = \frac{\overset{Anz}{\sigma_x}}{\overset{Anz}{\varepsilon_x}} - \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x},\tag{48}$$

$$\Delta \nu_{xy} = -\frac{\overset{Anz}{\varepsilon_y}}{\overset{Anz}{\varepsilon_x}} + \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\tag{49}$$

$$\text{und } \Delta G_{xy} = \frac{\sigma_x}{2 \left(\begin{matrix} Anz \\ \varepsilon_x - \varepsilon_y \end{matrix} \right)} - \frac{\sigma_x}{2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)} \quad (50)$$

Die darin enthaltenen Anzeigewerte für die Längs- und Querdehnung $\begin{matrix} Anz \\ \varepsilon_x \end{matrix}$ und $\begin{matrix} Anz \\ \varepsilon_y \end{matrix}$ können mit Hilfe der Beziehungen (22)

$$\varepsilon_x = \frac{1 - \nu_0 q}{1 - q^2} \left(\begin{matrix} Anz \\ \varepsilon_x - q \varepsilon_y \end{matrix} \right) \text{ und } \varepsilon_y = \frac{1 - \nu_0 q}{1 - q^2} \left(\begin{matrix} Anz \\ \varepsilon_y - q \varepsilon_x \end{matrix} \right)$$

eliminiert werden. Durch Auflösen dieser Gleichungen wird folgender Zusammenhang zwischen den Anzeigewerten $\begin{matrix} Anz \\ \varepsilon_x \end{matrix}$ und $\begin{matrix} Anz \\ \varepsilon_y \end{matrix}$ und den wahren Dehnungen ε_x und ε_y erhalten:

$$\begin{matrix} Anz \\ \varepsilon_x \end{matrix} = \frac{\varepsilon_x + q \varepsilon_y}{1 - \nu_0 q} \text{ und } \begin{matrix} Anz \\ \varepsilon_y \end{matrix} = \frac{\varepsilon_y + q \varepsilon_x}{1 - \nu_0 q} \quad (51)$$

Nach Einsetzen dieser Beziehungen (51) in die Gleichungen (48), (49) und (50) ergeben sich die absoluten Fehler des jeweiligen Materialparameters. Für bessere Vergleichbarkeit wird außerdem der relative Fehler jedes Kennwertes durch Bezug des absoluten Fehlers auf die Größe des Werkstoffparameters bestimmt.

Der absolute Fehler ΔE_x des Elastizitätsmoduls ergibt sich entsprechend dieser Vorgehensweise zu

$$\Delta E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} q \frac{-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} - \nu_0}{1 + q \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}} = E q \frac{\nu_{xy} - \nu_0}{1 - q \nu_{xy}} \quad (52)$$

Sein relativer Fehler $\frac{\Delta E_x}{E_x}$ ist

$$\frac{\Delta E_x}{E_x} = q \frac{\nu_{xy} - \nu_0}{1 - q \nu_{xy}} \quad (53)$$

Absoluter und relativer Fehler der Querdehnzahl ν_{xy} berechnen sich zu

$$\Delta \nu_{xy} = q \frac{\frac{\varepsilon_y^2}{\varepsilon_x^2} - 1}{1 - q \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}} = q \frac{\nu_{xy}^2 - 1}{1 + q \nu_{xy}} \quad (54)$$

$$\text{und } \frac{\Delta \nu_{xy}}{\nu_{xy}} = q \frac{\nu_{xy}^2 - 1}{(1 + q \nu_{xy}) \nu_{xy}} \quad (55)$$

Die Fehler des Schubmoduls G_{xy} werden durch

$$\Delta G_{xy} = G_{xy} q \frac{1 - \nu_0}{1 - q} \quad (56)$$

$$\text{und } \frac{\Delta G_{xy}}{G_{xy}} = q \frac{1 - \nu_0}{1 - q} \quad (57)$$

beschrieben.

6.2.2. Diskussion

Bei Betrachtung der absoluten und relativen Fehler für die einzelnen Werkstoffkennwerte wird festgestellt, dass die Querempfindlichkeit verschieden große Einflüsse auf die unterschiedlichen Parameter ausübt.

Alle Fehler für die drei Materialkennwerte sind nichtlinear in q . Die Fehler des E-Moduls und der Querdehnzahl können allerdings mit der Näherung

$$1 - \nu_0 q \approx 1 \text{ wegen } \nu_0 q \ll 1 \quad (58)$$

$$\text{bzw. } 1 + \nu_{xy} q \approx 1 \text{ wegen } \nu_{xy} q \ll 1$$

problemlos, d.h. ohne dabei einen größeren Fehler zu machen, linearisiert werden. Damit sind die absoluten und relativen Fehler für die Elastizitätskonstante und die Querdehnzahl (annähernd) proportional zur Querempfindlichkeit der eingesetzten Dehnungsmessstreifen.

Der absolute Fehler des Elastizitätsmoduls (52) ist durch den linearen Zusammenhang mit dem jeweiligen E-Modul des vorliegenden Materials stark von der jeweiligen Analysesituation abhängig, so dass darüber keine nähere Aussage getroffen werden kann. Daher wird im

Folgendes der relative Fehler (53) betrachtet, der nur von der Querempfindlichkeit q , der Konstante ν_0 sowie der Querdehnzahl ν_{xy} des Werkstoffes abhängt.

Gilt für das zu untersuchende Material $\nu_{xy} = \nu_0 = 0,285$, so sind der absolute und relative Fehler gleich Null: $\frac{\Delta E_x}{E_x} = 0$ bzw. $\Delta E_x = 0$. Dies spiegelt die Tatsache wider, dass die Kalibrierung des DMS bei einer Querdehnzahl von $\nu_0 = 0,285$ stattfindet und somit eine Querdehnung dieser Größe bereits im k-Faktor berücksichtigt ist.

Bei einer fiktiven, relativ großen Querempfindlichkeit von 3% bewegt sich der relative Fehler bei Querdehnzahlen zwischen $\nu_{xy} = 0 \dots 0,5$ im Bereich zwischen $\frac{\Delta E_x}{E_x} = -0,0086 \dots 0,0065$.

Diese Werte zeigen deutlich, dass der Einfluss der Querempfindlichkeit auf die Bestimmung des Elastizitätsmoduls vernachlässigbar klein ist.

Der absolute Fehler der Querdehnzahl (54) ist ebenso wie der relative Fehler (55) nur von der Querempfindlichkeit q , der Konstante ν_0 und der Querdehnzahl ν_{xy} selbst abhängig. Da die Querdehnzahl sehr kleine Werte annehmen kann, kann der relative Fehler selbst bei geringem absoluten Fehler schnell sehr große Werte erreichen.

Die beispielhafte Berechnung des absoluten Fehlers $\Delta \nu_{xy}$ bei der fiktiven Querempfindlichkeit von $q = 0,03$ ergibt im Bereich von Querdehnzahlen $\nu_{xy} = 0 \dots 0,5$ Fehler zwischen $\Delta \nu_{xy} = -0,03 \dots -0,022$, d.h. die unter Vernachlässigung der Querempfindlichkeit ermittelten Querdehnzahlen sind kleiner als die wahren Werte. Selbst gegenüber einer großen Querdehnzahl, z.B. $\nu_{xy} = 0,5$, ergibt dies einen relativen Fehler von etwa 4,4%. Je kleiner die zu bestimmende Querdehnzahl selbst ist, desto höher ist die relative Abweichung.

Soll in einer Messung also eine (kleine) Querdehnzahl genau bestimmt werden, so sind unbedingt die Dehnungen mit den Gleichungen (22) zu korrigieren oder DMS mit geringer Querempfindlichkeit zu verwenden.

Die Gleichung (56) für den absoluten Fehler bei der Ermittlung des Schubmoduls zeigt eine lineare Abhängigkeit vom wahren Wert des Gleitmoduls, aber im Gegensatz zu den Fehlern des Elastizitätsmoduls und der Querdehnzahl keinen Zusammenhang mit der Querdehnzahl des vorliegenden Materials. Der relative Fehler (57) wird somit allein durch die Querempfindlichkeit der DMS bestimmt.

Für die fiktive Querempfindlichkeit von $q = 0,03$ wird ein relativer Fehler von $\frac{\Delta G_{xy}}{G_{xy}} = 0,0221$

erreicht. Der reale Schubmodul liegt also etwas unter dem ohne Beachtung der Querempfindlichkeit berechneten Wert. Dieser relative Fehler ist zwar nicht vernachlässigbar, aber immer noch klein.

Im Vergleich des Einflusses der Querempfindlichkeit der DMS auf die experimentelle Bestimmung der Materialparameter wird festgestellt, dass die Ermittlung der Querdehnzahlen kritisch ist. Die Bestimmung des Schubmoduls ist mit einem geringen und die des Elastizitätsmoduls mit einem vernachlässigbar kleinen Fehler behaftet. Diese Abweichungen können aber durch eine Korrektur der gemessenen Dehnungen entsprechend den Gleichungen (22) vermieden werden.

6.3. Einfluss auf die Beanspruchungsanalyse

Ziel einer Beanspruchungsanalyse mit Hilfe von Dehnungsmessstreifen ist die Bestimmung der an einer Bauteiloberfläche wirkenden Spannungen. Sind die Orthotropierichtungen 1 und 2 des CFK bekannt, können die auftretenden Normalspannungen σ_{11} und σ_{22} sowie die Schubspannung τ_{12} bei Kenntnis der Materialparameter über das reduzierte Hooke'sche Gesetz (8) aus den Dehnungen ε_{11} und ε_{22} sowie der Schubverzerrung γ_{12} berechnet werden.

Dabei ist für die Bestimmung von γ_{12} die vollständige Kenntnis des Verzerrungszustandes notwendig, was durch die Messung dreier beliebiger Dehnungen z.B. mit einer rechtwinkligen (vgl. Abb. 12) oder einer Delta-DMS-Rosette realisiert werden kann.

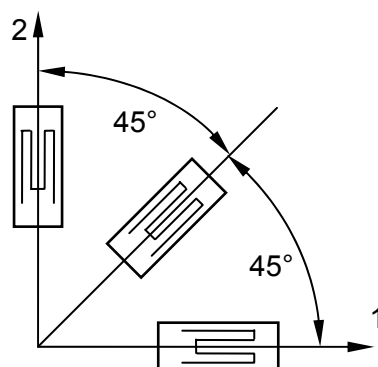


Abb. 12 Rechtwinklige DMS-Rosette mit drei DMS

Diese Dehnungsmesswerte sind bei Vernachlässigung der Querempfindlichkeit der DMS im Allgemeinen mit einem systematischen Fehler beaufschlagt, der die Genauigkeit der ermittelten Spannungen beeinflusst. Von Interesse ist daher die Abweichung der ermittelten Spannungen von den wahren Werten, die unter Beachtung der Querempfindlichkeit bestimmt werden können.

6.3.1. Fehleranalyse für die Normalspannungen

Nach dem reduzierten Hooke'schen Gesetz (8) werden die Normalspannungen zu

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} (\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22})$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} (\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11})$$

berechnet. Alle darin enthaltenen Dehnungen sind die wirklichen Dehnungen, die aus den Anzeigewerten über die Querempfindlichkeitskorrektur (22) erhalten werden.

Der absolute Fehler, der bei der Bestimmung der Spannung ohne Berücksichtigung der Querempfindlichkeit der DMS auftritt, wird durch die Differenz zwischen diesem so berechneten und dem wahren Wert der Spannung beschrieben:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{11} &= \sigma_{11}^{Anz} - \sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \left[\left(\varepsilon_{11}^{Anz} + \nu_{21} \varepsilon_{22}^{Anz} \right) - (\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}) \right] \\ \Delta\sigma_{22} &= \sigma_{22}^{Anz} - \sigma_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \left[\left(\varepsilon_{22}^{Anz} + \nu_{12} \varepsilon_{11}^{Anz} \right) - (\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11}) \right] \end{aligned} \quad (59)$$

Mit den Beziehungen (51) können die Anzeigewerte ε_{11}^{Anz} und ε_{22}^{Anz} der Dehnungen eliminiert werden:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \left[\left(\frac{\varepsilon_{11} + q\varepsilon_{22}}{1 - \nu_0 q} + \nu_{21} \frac{\varepsilon_{22} + q\varepsilon_{11}}{1 - \nu_0 q} \right) - (\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}) \right] \\ \Delta\sigma_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \left[\left(\frac{\varepsilon_{22} + q\varepsilon_{11}}{1 - \nu_0 q} + \nu_{12} \frac{\varepsilon_{11} + q\varepsilon_{22}}{1 - \nu_0 q} \right) - (\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11}) \right] \end{aligned} \quad (60)$$

Die absoluten Fehler der Normalspannungen ergeben sich nach Umformen zu

$$\Delta\sigma_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{21}\nu_{12}} \frac{q}{1-\nu_0 q} \left[\varepsilon_{11}(\nu_{21} + \nu_0) + \varepsilon_{22}(1 + \nu_0\nu_{21}) \right]$$

$$\Delta\sigma_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}} \frac{q}{1-\nu_0 q} \left[\varepsilon_{22}(\nu_{12} + \nu_0) + \varepsilon_{11}(1 + \nu_0\nu_{12}) \right]$$
(61)

Die relativen Fehler $\frac{\Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}}$ und $\frac{\Delta\sigma_{22}}{\sigma_{22}}$ werden durch Einsetzen erhalten:

$$\frac{\Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{1}{1-\nu_0 q} q \left[\nu_0 + \frac{\nu_{21} + \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}{1 + \nu_{21} \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}} \right]$$

$$\frac{\Delta\sigma_{22}}{\sigma_{22}} = \frac{1}{1-\nu_0 q} q \left[\nu_0 + \frac{\nu_{12} + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}}{1 + \nu_{12} \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}} \right]$$
(62)

6.3.2. Fehleranalyse für die Schubspannung

Nach dem reduzierten Hooke'schen Gesetz (8) ergibt sich die Schubspannung τ_{12} aus

$$\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}$$

Die in dieser Beziehung enthaltene Schubverzerrung γ_{12} kann mit Hilfe einer Drehtransformation aus drei beliebigen Dehnungen bestimmt werden.

In Analogie zu der Bestimmung des Schubmoduls entsprechend Kapitel 2.2.3 bietet sich auch hier die Verwendung einer rechtwinkligen Rosette anstatt einer Delta-Rosette an, da dies die notwendigen Berechnungen vereinfacht. Außerdem werden bei einer rechtwinkligen Rosette bereits zwei zueinander senkrechte Dehnungen gemessen. Dies ist für die Querempfindlichkeitskorrektur (21) von Vorteil, da diese paarweise senkrechte Dehnungen verlangt.

Für eine Messung mit einer rechtwinkligen Rosette entsprechend Abb. 12, bei der die einzelnen DMS unter den Winkeln von 0° , 45° und 90° angeordnet sind, gilt nach [8]:

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_{0^\circ} - \varepsilon_{90^\circ} \quad (63)$$

Es bietet sich an, die Rosette so auf den Versuchskörper aufzubringen, dass die Dehnungen ε_{0° und ε_{90° mit den Orthotropierichtungen des Werkstoffes übereinstimmen:

$$\varepsilon_{0^\circ} = \varepsilon_{11} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{90^\circ} = \varepsilon_{22} \quad (64)$$

Damit gilt für die Schubspannung

$$\tau_{12} = G_{12} (2\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \quad (65)$$

Der absolute Fehler $\Delta\tau_{12}$ der Schubspannung wird wiederum durch die Differenz aus dem unter Vernachlässigung der Querempfindlichkeit der DMS berechneten und dem wahren Wert beschrieben:

$$\Delta\tau_{12} = G_{12} \left[\left(2 \overset{\text{Anz}}{\varepsilon_{45^\circ}} - \overset{\text{Anz}}{\varepsilon_{11}} - \overset{\text{Anz}}{\varepsilon_{22}} \right) - (2\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \right] \quad (66)$$

Für die Elimination der Anzeigewerte der Dehnungen aus dieser Gleichung werden entsprechend Gleichung (51) paarweise senkrechte Dehnungen benötigt. Die Dehnungen ε_{11} und ε_{22} erfüllen diese Bedingung und können miteinander in Verbindung gebracht werden:

$$\overset{\text{Anz}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\varepsilon_{11} + q\varepsilon_{22}}{1 - \nu_0 q} \quad \text{und} \quad \overset{\text{Anz}}{\varepsilon_{22}} = \frac{\varepsilon_{22} + q\varepsilon_{11}}{1 - \nu_0 q} \quad (67)$$

Für die Dehnung ε_{45° wird die dazu senkrechte Dehnung ε_{135° benötigt, um mit Hilfe von

$$\overset{\text{Anz}}{\varepsilon_{45^\circ}} = \frac{\varepsilon_{45^\circ} + q\varepsilon_{135^\circ}}{1 - \nu_0 q} \quad (68)$$

die Anzeigewerte aus der Gleichung (66) entfernen zu können.

Die unbekannte Dehnung ε_{135° kann durch eine Koordinatentransformation aus den drei Dehnungen ε_{11} , ε_{22} und ε_{45° gewonnen werden, weil durch diese der Verzerrungszustand vollständig bekannt ist. Dafür wird das Koordinatensystem um den Winkel $\varphi = 45^\circ$ in ein neues $\hat{1}-\hat{2}$ -System gedreht, vgl. Abb. 13, worin die Dehnung $\hat{\varepsilon}_{22}$ der gesuchten Dehnung ε_{135° des ursprünglichen Systems entspricht.

Einfluss der Querempfindlichkeit

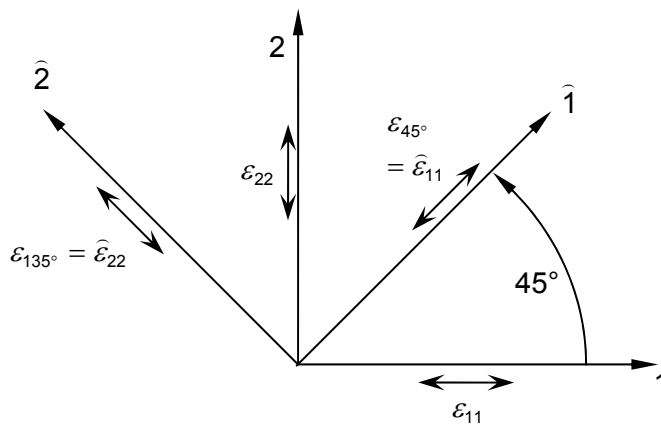


Abb. 13 Koordinatentransformation zur Bestimmung von ε_{135°

Die Transformation wird mit der Transformationsmatrix \mathbf{C} , die für eine ebene Drehung um $\varphi = 45^\circ$ die Form

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (69)$$

annimmt, durch die Gleichung

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \mathbf{C} \underline{\varepsilon} \mathbf{C}^T \quad (70)$$

beschrieben. In ausführlicher Schreibweise ergibt sich damit für die Dehnungen im gedrehten System

$$\begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{11} & \hat{\varepsilon}_{12} & 0 \\ \hat{\varepsilon}_{12} & \hat{\varepsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \varepsilon_{12} & \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) & \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \varepsilon_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12}$ ist, kann mit der Gleichung (63) ε_{12} ebenfalls durch die Dehnungen ε_{11} , ε_{22} und ε_{45° dargestellt werden:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12} = \varepsilon_{45^\circ} - \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (72)$$

Die gesuchte Dehnung ε_{135° berechnet sich somit zu

$$\varepsilon_{135^\circ} = \widehat{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - \varepsilon_{45^\circ} \quad (73)$$

Mit (63) lässt sich diese Beziehung auch schreiben als

$$\varepsilon_{135^\circ} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - \gamma_{12}}{2} \quad (74)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (67) und (68) in die Gleichung (66) werden die Anzeige-
werte der Dehnungen $\overset{Anz}{\varepsilon_{11}}$, $\overset{Anz}{\varepsilon_{22}}$ und $\overset{Anz}{\varepsilon_{45^\circ}}$ eliminiert

$$\Delta\tau_{12} = G_{12} \left[\left(2 \frac{\overset{Anz}{\varepsilon_{45^\circ}} + q\overset{Anz}{\varepsilon_{135^\circ}}}{1 - \nu_0 q} - \frac{\overset{Anz}{\varepsilon_{11}} + q\overset{Anz}{\varepsilon_{22}}}{1 - \nu_0 q} - \frac{\overset{Anz}{\varepsilon_{22}} + q\overset{Anz}{\varepsilon_{11}}}{1 - \nu_0 q} \right) - (2\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \right] \quad (75)$$

und mit Hilfe der Beziehung (74) wird die Dehnung ε_{135° entfernt. Damit ergibt sich nach dem Umformen für den absoluten Fehler der Schubspannung τ_{12}

$$\Delta\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}q \frac{\nu_0 - 1}{1 - \nu_0 q} = \tau_{12}q \frac{\nu_0 - 1}{1 - \nu_0 q} \quad (76)$$

Der relative Fehler der Schubspannung ist

$$\frac{\Delta\tau_{12}}{\tau_{12}} = q \frac{\nu_0 - 1}{1 - \nu_0 q} \quad (77)$$

6.3.3. Diskussion

Auch bei einer Beanspruchungsanalyse werden die Messergebnisse durch die Querempfindlichkeit der verwendeten Dehnungsmessstreifen verfälscht. Dieser Einfluss verursacht unterschiedlich große Abweichungen zu den wirklichen Werten.

Ein Vergleich der absoluten und relativen Fehler der Normalspannungen σ_{11} und σ_{22} zeigt, dass die Gleichungen jeweils die selbe Form aufweisen. Im Folgenden wird daher nur der Einfluss der Querempfindlichkeit auf die Normalspannung σ_{11} ausführlich betrachtet. Die Aussagen gelten analog für die Spannung σ_{22} .

Der absolute Fehler $\Delta\sigma_{11}$ der Normalspannung (61) wird durch den vorhandenen E-Modul und die gemessenen Dehnungen bestimmt und ist somit stark von der jeweiligen Analytensituation abhängig. Daher wird zunächst der relative Fehler (62)

$$\frac{\Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{1}{1-\nu_0 q} q \left[\nu_0 + \frac{\nu_{21} + \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}{1 + \nu_{21} \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}} \right]$$

für die Diskussion herangezogen.

Die Näherung (58)

$$1 - \nu_0 q \approx 1 \text{ wegen } \nu_0 q \ll 1$$

führt ohne großen Fehler auf eine Linearisierung des relativen Fehlers bezüglich der Querempfindlichkeit q . Damit und mit der Koeffizientenfunktion

$$K\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right) = \nu_0 + \frac{\nu_{21} + \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}{1 + \nu_{21} \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}} \quad (78)$$

kann er auch als

$$\frac{\Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}} \approx \left[\nu_0 + \frac{\nu_{21} + \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}{1 + \nu_{21} \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}} \right] q = K\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right) \cdot q \quad (79)$$

geschrieben werden.

Somit ist der relative Fehler $\frac{\Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}}$ proportional zur eingeführten Koeffizientenfunktion K sowie der Querempfindlichkeit q . Den Haupteinfluss übt dabei die Funktion K aus, die von dem Dehnungsverhältnis $\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$ und der Querdehnzahl ν_{21} des vorliegenden Materials abhängt. Im Gegensatz zur Querempfindlichkeit q kann sie auch Werte annehmen, die deutlich größer als eins sind. Abb. 14 zeigt exemplarisch den Kurvenverlauf von K bei verschiedenen Querdehnzahlen $\nu_{21} = (0, 0,05, 0,1, 0,2, 0,5)$.

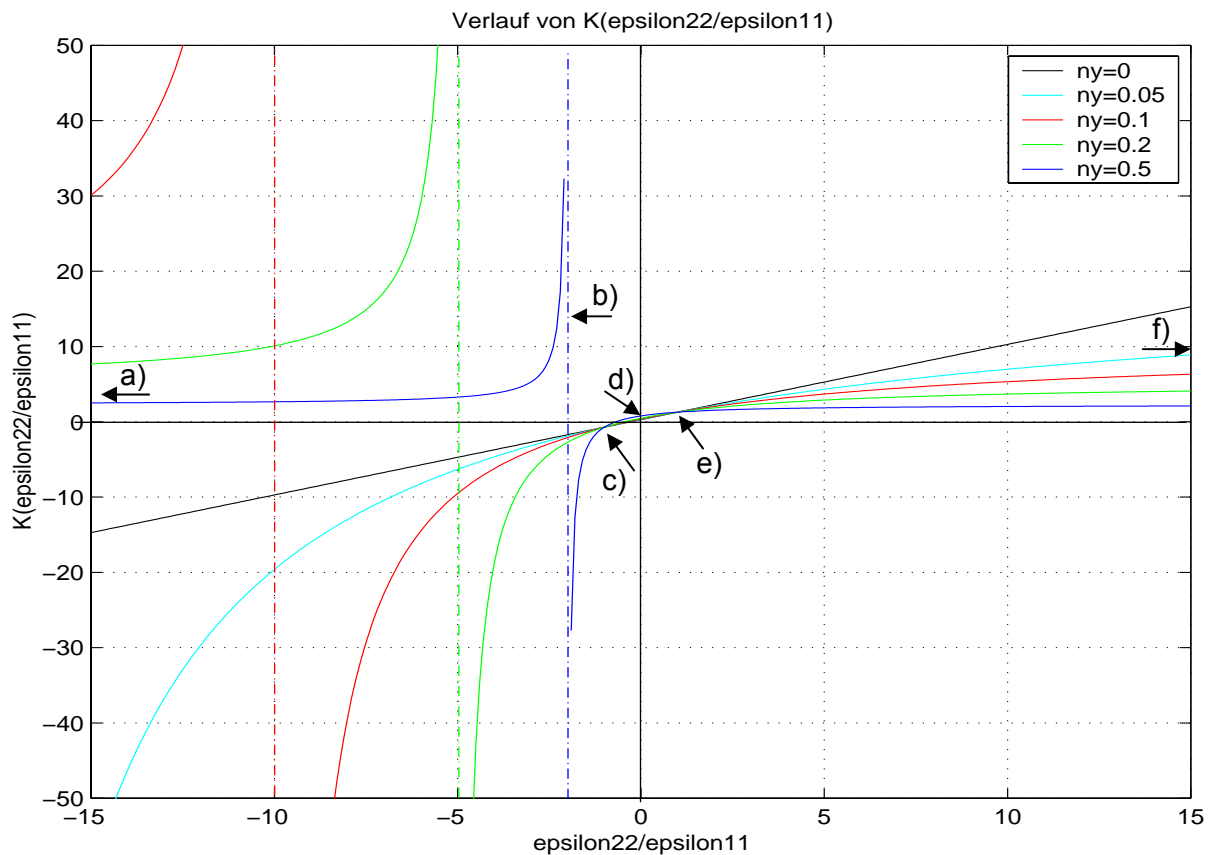


Abb. 14 Verlauf der Koeffizientenfunktion K

Eine Kurvendiskussion zeigt folgende Eigenschaften von K :

- Für den Sonderfall $\nu_{21} = 0$ wird die Funktion K zu einer Geraden:

$$K\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right) = \nu_0 + \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (80)$$

Die Funktion K und damit auch der relative Fehler $\frac{\Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}}$ sind hier proportional zum Dehnungsverhältnis $\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$. Dieser Sonderfall wird in den folgenden Betrachtungen nicht weiter berücksichtigt.

- Im Unendlichen a) und f) strebt K gegen den konstanten Wert

$$\lim_{\substack{\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \rightarrow \pm\infty}} (K) = \nu_0 + \frac{1}{\nu_{21}} = \text{const.} \quad (81)$$

Bei sehr kleinen Querdehnzahlen ν_{21} kann dieser Grenzwert einen großen Betrag erreichen.

- Es existiert eine Polstelle b)

$$K\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right) \rightarrow \pm\infty \text{ bei } \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{1}{\nu_{21}} \text{ bzw. } \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \quad (82)$$

- Die Schnittpunkte mit den Achsen sind

$$K\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}\right) = 0 \text{ bei } \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\nu_{21} + \nu_0}{1 + \nu_{21}\nu_0} \quad (83)$$

$$\text{und d) } K\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = 0\right) = \nu_0 + \nu_{21} = \text{const.} \quad (84)$$

- Es existieren keine Extremstellen.
- Bei betragsgleichen Dehnungen $|\varepsilon_{22}| = |\varepsilon_{11}|$ nimmt K konstante Werte an:

$$\text{c) } K\left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -1\right) = \nu_0 - 1 = -0,175 = \text{const.} \quad (85)$$

$$e) K \left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = 1 \right) = \nu_0 + 1 = 1,285 = \text{const.} \quad (86)$$

Da der relative Fehler der Normalspannung proportional zu K ist, wird er dann groß, wenn K einen hohen Betrag besitzt. Dies tritt vor allem in der näheren Umgebung der Polstelle sowie bei kleinen Querdehnzahlen ν_{21} auch bei großen Dehnungsverhältnissen $\left| \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \right|$ ein. In der unmittelbaren Nähe der Nullstelle $\frac{-1-3\nu_0}{4\nu_{21}+3\nu_0\nu_{21}} \leq \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \leq \frac{1-3\nu_0}{2\nu_{21}+3\nu_0\nu_{21}}$ ist $K \leq \left| \frac{1}{3} \right|$ und für eine fiktive, relativ große Querempfindlichkeit von $q = 0,03$ somit der Gesamtfehler $\frac{\Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}} \approx K \cdot q \leq \pm 0,01$ vernachlässigbar klein. Im Bereich zwischen $-1 \leq \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \leq 1$ liegen die Funktionswerte zwischen $-0,715 \leq K \leq 1,285$. Damit ist der relative Fehler mit $\frac{\Delta\sigma_{11}}{\sigma_{11}} \approx K \cdot q \leq \pm 0,04$ zwar nicht mehr vernachlässigbar, aber immer noch klein.

Dieser relative Fehler muss allerdings kritisch betrachtet werden, da hier – wie auch bei der Ermittlung der Querdehnzahlen – bei Bezug des absoluten Fehlers auf kleine Spannungen schnell große Werte für den relativen Fehler entstehen. Diese dürfen nicht überbewertet werden.

Die Polstelle der Funktion K bei $\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{1}{\nu_{21}}$ bzw. $\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}$ entspricht einer einachsigen Beanspruchung des Werkstoffes in 2-Richtung, wobei die Spannung σ_{11} definitionsgemäß gleich Null ist. Bei einer annähernd einachsigen Beanspruchung, d.h. in unmittelbarer Umgebung der Polstelle der Funktion K ist σ_{11} immer noch sehr klein und der relative Fehler entsprechend groß, selbst wenn die absolute Abweichung gar nicht unverhältnismäßig hoch sein sollte.

Daher soll im Folgenden der absolute Fehler an einem konkreten Beispiel betrachtet werden. Für die in den Versuchen zur Identifikation der Materialparameter verwendeten kohlenstofffaserverstärkten Kunststoffe HT0 und HT090 ergeben sich bei vorgegebenen (oder gemessenen) Dehnungen ε_{11} und ε_{22} die in Abb. 15 und Abb. 16 dargestellten Spannungen σ_{11} und σ_{22} sowie deren absolute Fehler $\Delta\sigma_{11}$ und $\Delta\sigma_{22}$ (Werte in den Klammern). Die möglichen Fehler sind zumeist klein oder gar vernachlässigbar, wenngleich sie in einigen Fällen auch große Werte gegenüber der Spannung annehmen können. Dies tritt vor allem dann ein, wenn eine Spannung und deren Fehler bestimmt werden soll, die quer zur Belastungsrich-

Einfluss der Querempfindlichkeit

tung liegt: Die Fehler für σ_{22} werden dann groß gegenüber den Spannungen, wenn $\varepsilon_{22} = 0$ ist, d.h. die Beanspruchung in Richtung der 1-Achse erfolgt. Analoges gilt für die Spannung σ_{11} .

Da außerdem der absolute Fehler proportional zum zugeordneten Elastizitätsmodul ist, wächst der Fehler mit steigendem E-Modul an. Am Material HT0 ist der Einfluss des deutlich größeren E-Moduls in 2-Richtung mit $E_2 = 98500 \frac{N}{mm^2}$ gegenüber $E_1 = 8300 \frac{N}{mm^2}$ an den Fehlerwerten gut erkennbar.

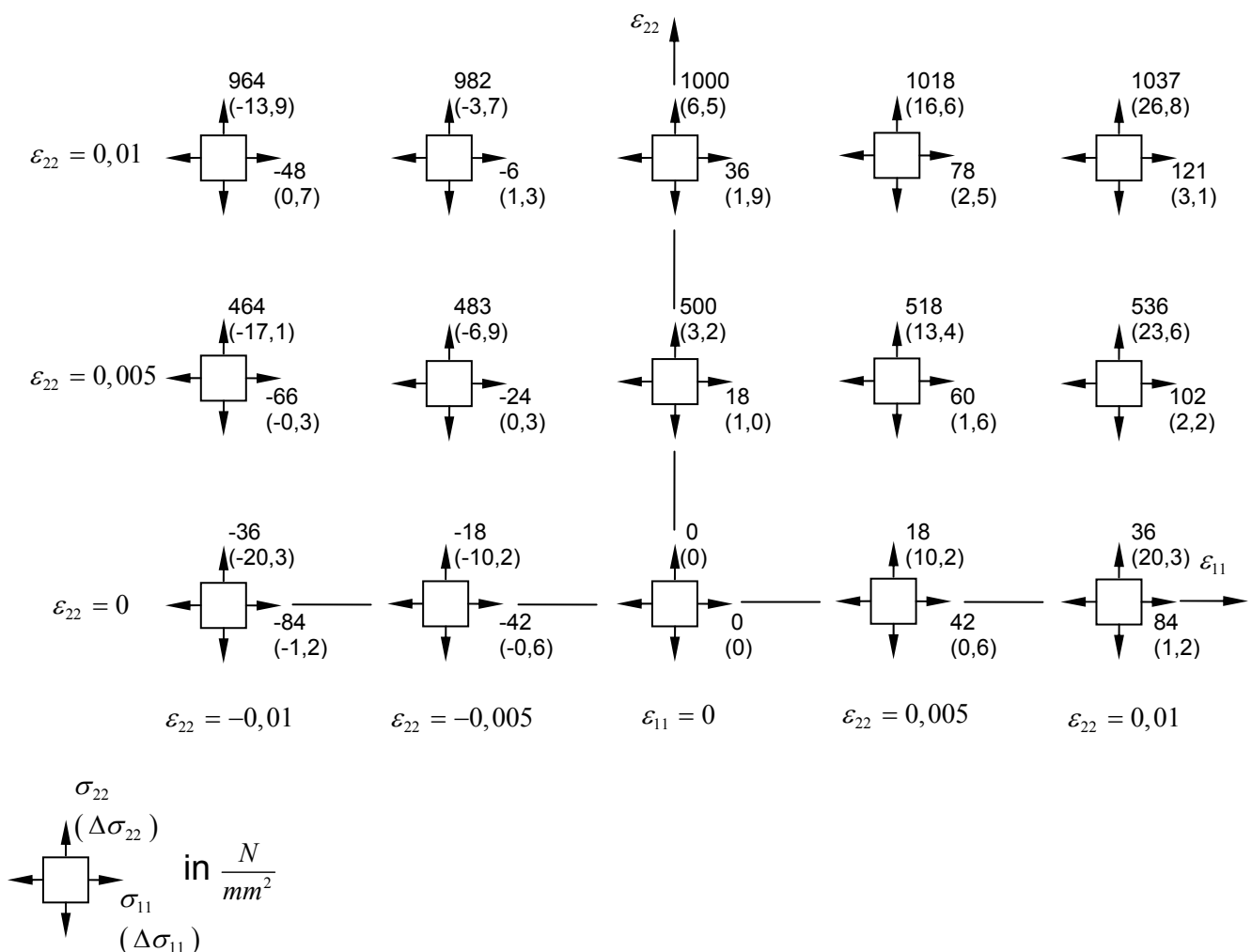


Abb. 15 Spannungen bei vorgegebenen Dehnungen am Werkstoff HT0

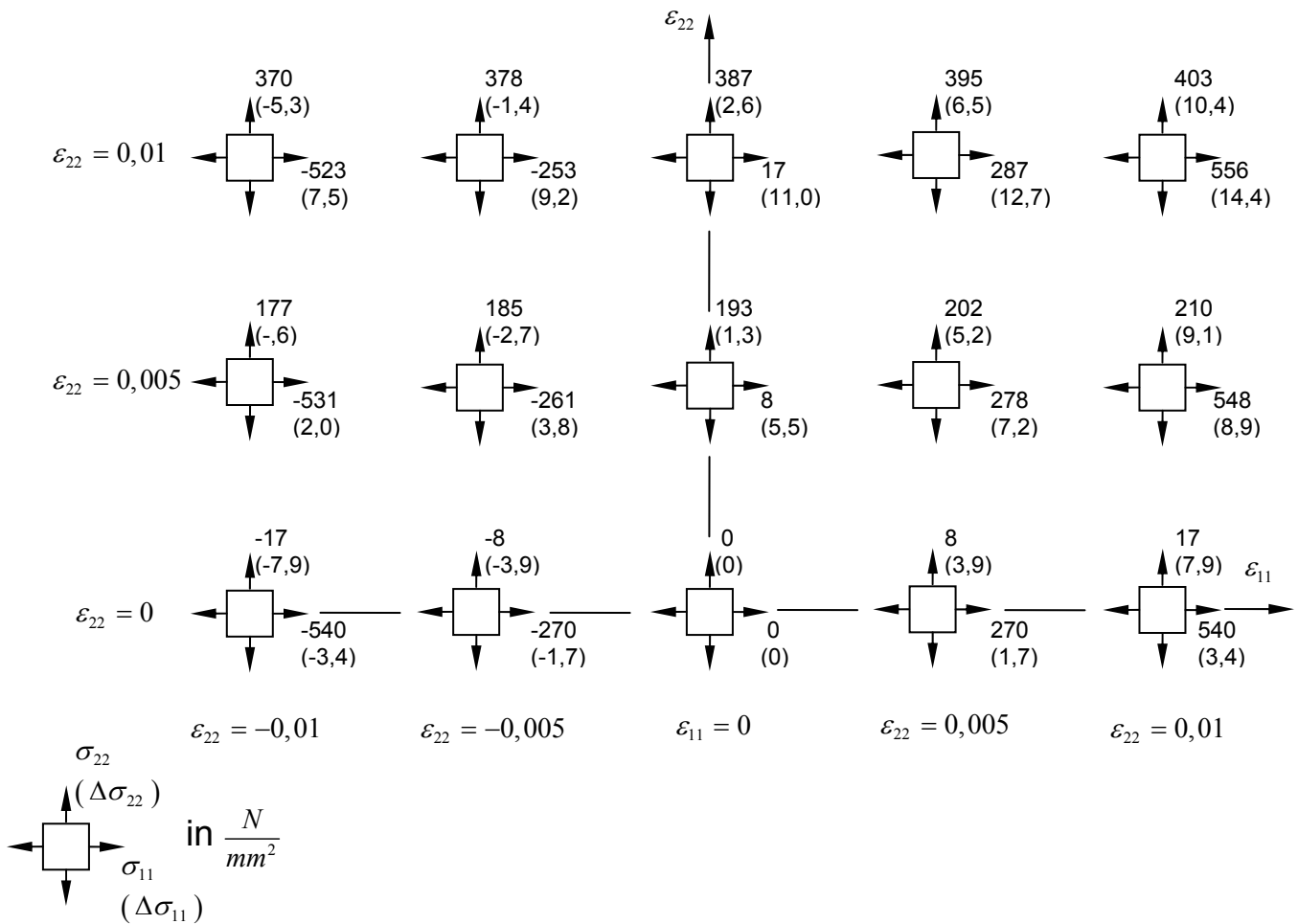


Abb. 16 Spannungen bei vorgegebenen Dehnungen am Werkstoff HT090

Zusammenfassend ist festzustellen, dass in den meisten Fällen zur Bestimmung der Normalspannungen kleine Fehler auftreten. Soll allerdings eine Spannung ermittelt werden, die quer zu einer dominierenden Belastungsrichtung liegt, kann es durch die Vernachlässigung der Querempfindlichkeit zu größeren Abweichungen kommen.

Der relative Fehler (77) der Schubspannung τ_{12} ist im Gegensatz zu den Fehlern der Normalspannungen nicht von der Querdehnzahl des vorliegenden Materials abhängig. Er wird nur durch die Querempfindlichkeit q und die Konstante ν_0 beschrieben.

Mit der Näherung (58)

$$1 - \nu_0 q \approx 1 \text{ wegen } \nu_0 q \ll 1$$

Einfluss der Querempfindlichkeit

können auch die Fehler für die Schubspannung problemlos linearisiert werden. Die Abweichungen sind somit ebenfalls annähernd proportional zur Querempfindlichkeit der verwendeten Dehnungsmessstreifen.

Bei einer relativ großen Beispiel-Querempfindlichkeit von $q = 0,03$ erreicht der relative Fehler einen Wert von $\frac{\Delta\tau_{12}}{\tau_{12}} = -0,022$. Für positive Querempfindlichkeiten wird der relative Fehler immer negativ, was bedeutet, dass der unter Vernachlässigung der Querempfindlichkeit berechnete Wert etwas kleiner als der reale Wert ist. Diese Abweichung ist zwar nicht vernachlässigbar, aber immer noch klein.

7. Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Beanspruchungsanalyse von kohlenstofffaserverstärkten Kunststoffen (CFK) unter Verwendung von Dehnungsmessstreifen (DMS). Dabei wurde besondere Aufmerksamkeit auf den Einfluss der Querempfindlichkeit der DMS gelegt.

In 4-Punkt-Biegeprüfungen mit DMS wurden zunächst die Elastizitäts- und Schubmoduln sowie die Querdehnzahlen von vier charakteristischen CFK bestimmt. Diese Materialparameter bilden die Grundlage für eine spätere Spannungsermittlung an Bauteilen, die wiederum experimentell mit Hilfe von Dehnungsmessungen erfolgen kann. Die Querempfindlichkeit der DMS verfälscht dabei im Allgemeinen das Mess- sowie das Endergebnis wie Werkstoffkennwerte oder ermittelte Spannungen. Dieser Einfluss wurde konkret am Unterschied zwischen Vernachlässigung und Berücksichtigung der Querempfindlichkeit bei der Identifikation der Materialparameter und bei der Bestimmung der Spannungen untersucht.

Bei der Auswertung zu den Versuchen für die Ermittlung der Werkstoffkonstanten wurde die Querempfindlichkeit beachtet, d.h. eine entsprechende Korrektur der Dehnungen vorgenommen. Die erhaltenen Parameter stimmen gut mit den Erwartungen an die vier verwendeten Werkstoffe überein:

- Die bidirektionalen CFK weisen in beide Faserrichtungen annähernd gleich große Elastizitätsmoduln und Querdehnzahlen auf. Im Gegensatz dazu sind bei den unidirektionalen Werkstoffen der E-Modul und die Querdehnzahl bezüglich der vorhandenen Faserrichtung deutlich größer als die entsprechenden Kennwerte quer dazu.
- Die Elastizitätsmoduln in Faserrichtung sind bei dem Material mit den hochmoduligen Fasern etwa 2 bis 2,6-mal größer als bei dem CFK mit Fasern hoher Zugfestigkeit.
- Die Anordnung von Kohlenstofffasern quer zur Belastungsrichtung behindert die Querdehnung. Deshalb sind die entsprechenden Querdehnzahlen deutlich kleiner als die Querdehnzahlen der unidirektionalen Werkstoffe in Faserrichtung.
- Alle Schubmoduln sind annähernd gleich groß. Faserart und -anordnung besitzen für die auftretenden Schubeffekte keine Bedeutung.
- Die ermittelten Standardabweichungen, d.h. die Unsicherheiten der Parameter, lagen bis auf eine Ausnahme (8,3%) alle unterhalb einer relativen Genauigkeit von 3%, so dass die Methode und die Ergebnisse als „gut“ beurteilt werden können.

Die Kennwerte eines Materials unterliegen der Bedingung, dass die Nachgiebigkeitsmatrix symmetrisch sein muss. Im vorliegenden Fall orthotroper Werkstoffe betrifft dies die Elastizi-

Zusammenfassung

tätsmoduln und Querdehnzahlen. Bei allen untersuchten CFK wurde ein entsprechender Symmetrieausgleich durchgeführt, der bis auf eine Ausnahme nur vertretbar kleine Korrekturen erforderte.

Die Untersuchung des Einflusses der Querempfindlichkeit erfolgte mit Hilfe einer Fehleranalyse. Von Interesse war die Differenz zwischen den unter Vernachlässigung der Querempfindlichkeit ermittelten und den wirklichen Größen:

- Die Fehler für die Ermittlung von Elastizitätsmodul, Querdehnzahl sowie Spannungen sind annähernd proportional zur Querempfindlichkeit der DMS.
- Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls erfolgt ohne Berücksichtigung der Querempfindlichkeit der DMS mit einem vernachlässigbar kleinen Fehler (bis $\pm 1\%$).
- Die Ermittlung der Querdehnzahlen ist kritisch, insbesondere bei sehr kleinen Werten.
- Bei der Identifikation der Schubmoduln ist der durch Nichtbeachtung auftretende Fehler klein (Abweichungen bis $+2,2\%$ bei positiven Querempfindlichkeiten).
- Bei einer Beanspruchungsanalyse kommt es zumeist zu geringen Fehlern. Nur bei Bestimmung von Normalspannungen, die quer zu einer dominierenden Beanspruchung liegen, können größere Abweichungen auftreten.
- Die Schubspannung weist kleine Fehler (bis $-2,2\%$) auf.

Aus diesen Ergebnissen können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

- Die Verwendung von DMS mit geringer Querempfindlichkeit gestattet auch bei Vernachlässigung dieser Eigenschaft Messungen und Ergebnisse guter Genauigkeit.
- Nur für die experimentelle Bestimmung des Elastizitätsmoduls ist die Vernachlässigung der Querempfindlichkeit der DMS in jedem Falle gerechtfertigt.
- Sind die Anforderungen an die Genauigkeit der Materialparameter und Spannungen nicht zu hoch, kann auf eine Berücksichtigung der Querempfindlichkeit außerdem bei der Bestimmung des Schubmoduls, der Tangentialspannungen und in den meisten Fällen bei der Ermittlung der Normalspannungen verzichtet werden.
- Sollen Querdehnzahlen oder Normalspannungen quer zu einer dominierenden Belastung bestimmt werden, so ist die Querempfindlichkeit in jedem Fall durch entsprechende Korrekturvorschriften (z.B. [2], [3]) zu berücksichtigen. Alternativ können spezielle DMS mit besonders niedriger Querempfindlichkeit eingesetzt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Altenbach, H.; Altenbach, J.; Rikards, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke. Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen*. Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1996
- [2] Keil, S.: *Beanspruchungsanalyse mit Dehnungsmessstreifen*. Zwingenberg a. d. Bergstraße: Cuneus-Verlag 1995. S. 43 ff.
- [3] Naumann, J.: *Experimentelle Kontinuumsmechanik*. Chemnitz: Technische Universität Chemnitz. Institut für Mechanik. Vorlesung Wintersemester 2003/04
- [4] Sachs, L.: *Angewandte Statistik*. Berlin: Springer-Verlag 1984. S. 316 ff.
- [5] Sachs, L.: *Angewandte Statistik*. Berlin: Springer-Verlag 1984. S. 63 f.
- [6] Voß, W. u.a.: *Taschenbuch der Statistik*. München/Wien: Fachbuchverlag Leipzig im Carl-Hanser-Verlag 2000. S. 150 ff.
- [7] Schwarz, H.R.; Rutishauser, H.; Stiefel, E.: *Numerik symmetrischer Matrizen*. Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft 1968. S. 78 ff.
- [8] Naumann, J.: *Experimentelle Mechanik*. Chemnitz: Technische Universität Chemnitz. Institut für Mechanik. Vorlesung Sommersemester 2002

Anlagenverzeichnis

- Anlage 1 Diagramme der Messwerte
- Anlage 2 Diagramme zur Ermittlung der Materialparameter
- Anlage 3 Quelltext zum Lösen der Gleichung für den Lagrange'schen Multiplikator