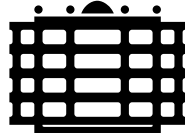


Effizientes Verifizieren co-NP-vollständiger Probleme am
Beispiel zufälliger 4-SAT-Formeln und uniformer
Hypergraphen



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt

der Fakultät für Informatik
der Technischen Universität Chemnitz

von: Dipl.-Inf. Frank Schädlich
geboren am: 20. November 1971
in: Zwickau

Gutachter: Prof. Dr. Andreas Goerdts, TU Chemnitz
Prof. Dr. Hanno Lefmann, TU Chemnitz
Prof. Dr. Angelika Steger, ETH Zürich

Chemnitz, den 30. Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Abbildungsverzeichnis	5
1 Einleitung	6
2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken	13
2.1 Diskrepanznotation für einfache Graphen	13
2.2 Diskrepanznotation für Multigraphen	16
2.3 Eigenwerte und Multigraphen	21
2.4 Test auf geringe Diskrepanz im Graphen	38
3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen	44
3.1 Die Konzentrierung des Grades im zufälligen Graphen	44
3.2 Geringe Diskrepanz zufälliger Graphen	45
3.3 Kantentypen	48
3.4 Die geringe Diskrepanz von zufälligen Hypergraphen	49
3.5 Die Konzentrierung des Grades	53
4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen	59
4.1 Projektions- und Produktgraphen	59
4.2 Kantenanzahl des Projektions- und des Produktgraphen	61
4.3 Eigenschaften des Projektionsgraphen	64
4.4 Eigenschaften des Produktgraphen	66
5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen	78
5.1 Der Projektions- und der Produktmultigraph	78
5.2 Die Konzentrierung des Grades im Projektionsmultigraphen	80
5.3 Die Kanten im Hypergraphen	84
5.4 Geringe Diskrepanz des Projektionsmultigraphen	85
5.5 Die Konzentrierung des Grades im Produktmultigraphen	95
5.6 Geringe Diskrepanz des Produktmultigraphen	108
5.7 Effizienter Nachweis der geringen Diskrepanz	120
6 Der maximale Schnitt (MAXCUT) in zufälligen Graphen	130

Inhaltsverzeichnis

7	Effizientes Verifizieren nichterfüllbarer 4-SAT-Formeln	134
7.1	Einleitung	134
7.2	Klauseltypen	136
7.3	Projektionshypergraph einer SAT-Formel	137
7.4	Die Paritätseigenschaft	139
7.5	Produktgraph einer SAT-Formel	149
7.6	Ein effizienter Algorithmus zum Nachweis der Unerfüllbarkeit	150
8	Nicht k-färbbare r-uniforme Hypergraphen	156
8.1	Einführung	156
8.2	Nicht k -färbbare r -uniforme Hypergraphen	156
8.3	Nicht 2-färbbare 4-uniforme Hypergraphen	159
9	Hajós-Konstruktion für Hypergraphen	160
9.1	Einführung	160
9.2	Erste Beobachtungen	162
9.3	Die Konstruktion	167
10	Anhang	179
10.1	Stirlingsche Formel	179
10.2	Binomialkoeffizienten	180
10.3	Exponentialfunktion	181
10.4	Siebformeln	181
10.5	Markoff-Ungleichung	183
10.6	Chernoff-Schranken	183
10.7	Hoeffding-Schranken	183
10.8	Jensensche Ungleichung	185
10.9	Matrizen	185
10.10	Der maximale Schnitt (MAXCUT)	188
	Literatur	189
	Thesen	195
	Lebenslauf	196

Abbildungsverzeichnis

Algorithmus 2.8: Fast d -regulärer Graph	20
Algorithmus 2.17: Eigenwertseparierung	38
Algorithmus 2.19: Geringe Diskrepanz im Multigraph	43
Algorithmus 3.8: Fast d -regulärer Hypergraph	54
Algorithmus 5.4: Untersuchung von D' im Hypergraph	83
Algorithmus 5.18: Geringe Diskrepanz im Hypergraph	128
Algorithmus 7.7: Parität 4-SAT-Formeln	147
Algorithmus 7.13: Nichterfüllbare 4-SAT-Formeln	152
1 Verschmelzen zweier Hypergraphen	168
2 Schrittweises Verschmelzen zweier Hypergraphen	171
3 Beweisschema Lemma 9.15	173
4 Konstruktion von H_3 in Lemma 9.15	175

1 Einleitung

In der klassischen Aussagenlogik kann man die Frage stellen, ob es eine Möglichkeit gibt, die Variablen einer aussagenlogischen Formel so zu belegen, daß die Formel wahr wird. Dieses Erfüllbarkeitsproblem ist von zentraler Bedeutung in der Informatik, insbesondere auf dem Gebiet der theoretischen Informatik. Das Problem, eine beliebige Formel effizient auf Erfüllbarkeit zu testen, führte zur Definition der Komplexitätsklassen \mathcal{P} und \mathcal{NP} [Coo71, Kar72]. Bis heute ist es ein ungelöstes Problem, ob diese beiden Klassen tatsächlich voneinander verschieden sind und somit kein effizienter Algorithmus zur Lösung des Erfüllbarkeitsproblems zur Verfügung steht.

Bei der theoretischen Untersuchung von Problemen ist der Zufall ein wichtiges Werkzeug. Die Wahl eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsmodells soll es ermöglichen, praktisch auftretende Probleme nachzubilden. Beim Erfüllbarkeitsproblem nutzt man oft Formeln in konjunktiver oder disjunktiver Normalform. Die Klauseln dieser Formeln können zufällig gewählt werden. Hierbei bieten sich verschiedene Varianten an: Es kann z. B. aus allen möglichen Klauseln eine bestimmte Anzahl zufällig ausgewählt werden oder es tritt beispielsweise jede Klausel mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf.

Hier ist es bekannt, daß das Erfüllbarkeitsproblem zufälliger aussagenlogischer k -SAT-Formeln ein Schwellverhalten zeigt. Diese Formeln liegen in konjunktiver Normalform vor. Eine Klausel der Formeln enthält also genau k Literale. Die Anzahl der Variablen sei n . Für jedes k existiert ein $C = C(k, n)$, so daß für alle Konstanten $\epsilon > 0$ die Formeln mit höchstens $(C - \epsilon) \cdot n$ vielen Klauseln mit hoher Wahrscheinlichkeit erfüllbar sind, die Formeln mit mehr als $(C + \epsilon) \cdot n$ jedoch nicht. Die Bestimmung des Schwellwertes C ist ein großes offenes Problem in der Theorie zufälliger aussagenlogischer Formeln [Fri99, AP03].

Bei der Approximation des Schwellwertes kann man sich sowohl von der erfüllbaren als auch von der unerfüllbaren Seite nähern. Die Beweismethoden, die die erfüllbare Seite behandeln, nutzen oft einen effizienten Algorithmus, der mit hoher Wahrscheinlichkeit eine erfüllende Belegung der Formel berechnet. Die besten algorithmischen unteren Schranken findet man in [FS96, KKL02], die besten nichtalgorithmischen in [AP03].

Anders verhält es sich dagegen bei der Nichterfüllbarkeit. Man weiß durch nichtalgorithmische Untersuchungen des Erwartungswertes, daß C durch eine Konstante beschränkt ist [DBM00, KKKS98]. Dies liefert jedoch noch keinen Algorithmus, der die Unerfüll-

1 Einleitung

barkeit einer Formel mit linear vielen Klauseln effizient nachweist. Diese Formeln sind algorithmisch schwierig zu behandeln: In [CS88] bzw. [Fu95] wurde gezeigt, daß Resolutionsbeweise von nichterfüllbaren Formeln mit linear vielen Klauseln mit hoher Wahrscheinlichkeit exponentiell lang sind. Damit haben aber auch übliche Backtrackingverfahren mit beliebigen Heuristiken fast immer exponentielle Laufzeiten für diese Formeln. Die bisher besten bekannten algorithmischen Schranken für Polynomialzeitverfahren, die hier für fast alle Formeln die Unerfüllbarkeit exakt nachweisen, sind deutlich größer:

Jahr	Anzahl der Klauseln
1998 [BKPS98]	$\Omega\left(\frac{n^{k-1}}{(\log n)^{k-2}}\right)$
2001 [GK01]	$2^k \cdot (k/2)^7 \cdot \ln^7 n \cdot n^{k/2}$ (nur für gerade k)
2001 [FG01]	$8 \cdot n^{3/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ und konstant (nur für 3-SAT).

Für den Fall $k = 4$ wird nun gezeigt, daß die obere Schranke $\text{Poly}(\log n) \cdot n^2$ aus [GK01] um den Faktor $\text{Poly}(\log n)$ reduzierbar ist: Erstmals kann mit Algorithmus 7.13 im Kapitel 7 ein Verfahren vorgestellt werden, welches für fast alle zufälligen 4-SAT-Formeln mit $c \cdot n^2$ vielen Klauseln die Nichterfüllbarkeit effizient, also in polynomieller Zeit, beweist. Hierbei ist $c > 116,16$ eine Konstante. Die verwendeten Techniken sind grundsätzlich anders als in [GK01]. Tatsächlich erscheint es nicht einfach möglich, die Verfahren aus [GK01] in 4-SAT-Formeln mit $c \cdot n^2$ Klauseln anzuwenden.

Die Grundidee des Algorithmus ist relativ einfach. Alle Belegungen der Variablen der Formel werden an Hand ihrer Parität unterschieden. Dabei hat eine Belegung einer Formel Parität, wenn die Mengen der mit wahr und der mit falsch belegten Variablen fast gleich groß sind und im Wesentlichen nur Klauseln vorhanden sind, die für diese Belegung eine ungerade Anzahl an Literalen enthalten, die wahr sind. Nun erfolgen zwei einfache Tests, die nachweisen können, daß es keine erfüllenden Belegungen ohne bzw. mit Parität gibt. Der erste Test weist nach, daß es keine erfüllende Belegung ohne Parität gibt. Der zweite Test schließt alle Belegungen mit Parität aus.

Der erste Test ist eine Reduktion auf die Diskrepanzeigenschaften von Hypergraphen. Hierzu bilden wir z. B. aus einer Klausel $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ durch das Entfernen des Literals x_4 die gerichtete Hypergraphkante (x_1, x_2, x_3) . Dies folgt im Ansatz den spektralen Untersuchungen in [GJ02]. Aus dem effizienten Nachweis der geringen Diskrepanz in den Hypergraphen wird folgen, daß es keine erfüllenden Belegungen ohne Parität gibt.

1 Einleitung

Im zweiten Test wird eine Reduktion auf das MAXCUT-Problem verwendet. Hierzu wird jede Klausel $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ in der Mitte geteilt und so die Kante $x_1x_2—x_3x_4$ erzeugt. Der entstehende Graph enthält n^2 viele Knoten und ca. $c \cdot n^2$ viele Kanten. Bei dem MAXCUT-Problem hat man als Eingabe einen Graphen $G = (V, E)$ und fragt nach einer Partition $V = V_1 \cup V_2$, so daß die Anzahl der Kanten zwischen V_1 und V_2 maximiert wird. Für zufällige 4-SAT-Formeln ist der entstehende Graph zufällig. Er hat dann einen maximalen Schnitt, der mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht wesentlich größer als die Hälfte seiner Kantenzahl ist. Damit zeigt die MAXCUT-Approximation von Goemans und Williamson [GW95], daß der maximale Schnitt mit hoher Wahrscheinlichkeit höchstens $(1/2 + \delta)/0.87 \cdot |E|$ Kanten und somit deutlich weniger als alle Kanten enthält.

Jede erfüllende Belegung mit Parität impliziert einen Schnitt in diesem konstruierten Graphen, der fast alle Kanten enthält. Aus diesem Widerspruch folgt dann die Unerfüllbarkeit der Formel.

Die Analyse des zweiten Tests ist die einfachere von beiden. Hier folgt in Kapitel 6 aus den Chernoff-Schranken die Konzentration der Größe des maximalen Schnitts um die Hälfte der Kantenzahl. Der erste Test erfordert eine umfangreichere Analyse. Die Grundideen hierfür sind im nächsten Abschnitt zusammengefaßt.

In [GJ02] werden die Diskrepanzeigenschaften von Hypergraphen auf Diskrepanzeigenschaften von einfachen Graphen zurückgeführt. Beispielsweise kann man aus der gerichteten Hypergraphkante (x_1, x_2, x_3) die Kante $\{x_1, x_2\}$ eines einfachen ungerichteten Graphen konstruieren. Dieser Ansatz erfordert für 4-SAT eine Klauselwahrscheinlichkeit von $p = c/n^{2+\varepsilon}$, wobei $\varepsilon > 0$ eine beliebige Konstante ist. Hierdurch wird die Kantenwahrscheinlichkeit des Hypergraphen hinreichend klein, so daß fast jede Hypergraphkante genau einer Kante in einem solchen Graphen entspricht. Nun spiegeln sich die Diskrepanzeigenschaften eines Hypergraphen in einem einfachen Graphen wider. Die Kapitel 3 und 4 beinhalten eine kurze Einführung in die Methode aus [GJ02] und zeigen hierdurch deren Möglichkeiten, aber insbesondere auch deren Grenzen auf. Bei der Betrachtung von $c \cdot n^2$ vielen Klauseln entstehen Hypergraphen mit $c \cdot n^2$ vielen Kanten. Bildet man nun hieraus einfache Graphen, so wird im Durchschnitt jede Kante des Graphen von $2c$ verschiedenen Hypergraphkanten erzeugt. Der entstehende Graph wird nahezu vollständig sein und ist daher ungeeignet für die weitere Untersuchung der Diskrepanzeigenschaften.

Eine Lösung für dieses Problem konnte im Kapitel 5 durch den Einsatz von Multigra-

1 Einleitung

phen, also der Verwendung von Mehrfachkanten in einem Graphen, gefunden werden. Ein wichtiges Hilfsmittel beim Nachweis der Diskrepanzeigenschaften ist der Zusammenhang zwischen der Diskrepanz und den Eigenwerten der Laplace-Matrix. Durch das Korollar 2.5 in [ASE92], Kapitel 9, wird dieser Zusammenhang für reguläre Graphen untersucht. In [Chu97] erfolgt mit Theorem 5.2 die Verallgemeinerung für alle einfachen Graphen. Mit der hier eingeführten Diskrepanznotation für Multigraphen kann dieser Zusammenhang nun in Kapitel 2 auf Multigraphen ausgedehnt werden (Theorem 2.15).

Die betrachteten Multigraphen sind fast regulär. Dies ermöglicht es, die Eigenwerte der Laplacematrix eines Multigraphen über die Eigenwerte der Adjazenzmatrix abzuschätzen. Dadurch werden zwei wichtige Ergebnisse erzielt. Zum einen können durch die Betrachtung von geschlossenen Wegen in zufälligen Multigraphen Aussagen über die Eigenwerte der Adjazenzmatrix getroffen werden und somit die Diskrepanzeigenschaften untersucht werden (Theorem 2.16). Zum anderen wird mit dem Algorithmus 2.17 ein Verfahren gewonnen, welches die Eigenwerte der Laplacematrix und somit Diskrepanzeigenschaften effizient aus der Adjazenzmatrix approximiert. Dies beinhaltet einen weiteren Vorteil. In der Adjazenzmatrix werden nur natürliche Zahlen verwendet, so daß hier die Berechnungen exakt möglich sind. In der Laplacematrix kommen reelle Zahlen vor, so daß bei der Berechnung der Eigenwerte in herkömmlichen Computern Rundungsfehler beachtet werden müssen.

Der hier entwickelte Algorithmus 7.13 zur effizienten Zertifizierung der Unerfüllbarkeit sowie die hierzu nötigen Eigenwerttechniken sind wesentlicher Bestandteil von [CGLS03]. Im Algorithmus werden Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = o(1)$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ verwendet. Dabei ist n die Anzahl der Variablen. So ergibt es sich in einem Programmteil, daß fast alle Kanten eines Graphen im maximalen Schnitt liegen müssen. Die Anzahl der Kanten, die nicht im Schnitt liegen, sind anteilig vernachlässigbar klein. Dieser Anteil soll beispielsweise nicht mehr als das $f(n)$ -fache der Kantenzahl betragen. Will man nur die Existenz eines effizienten Algorithmus zeigen, so ist es wie in [CGLS03] ausreichend, mit den $o(1)$ -Ausdrücken zu arbeiten. Für eine Implementierung sind jedoch exakte Funktionen erforderlich. Daher wurden diese bestimmt und an Stelle der $o(1)$ -Terme in den Algorithmus aufgenommen.

Mit den Erfüllbarkeitsproblemen von aussagenlogischen Formeln sind auch die Färbungsprobleme von Graphen und Hypergraphen eng verknüpft. So entspricht beispielsweise das Zweifärbungsproblem von r -uniformen Hypergraphen dem Not-All-Equal-Sat-Problem

1 Einleitung

von r -KNF-Formeln, in dem nur positive Klauseln auftreten. In Kapitel 8 wird dies ausgenutzt, um neben einer einfachen oberen Schranke für die Nichtfärbbarkeit von uniformen Hypergraphen einen effizienten Algorithmus zum Nachweis der Nicht-2-Färbbarkeit von zufälligen 4-uniformen Hypergraphen mit $c \cdot n^2$ vielen Kanten zu beschreiben.

Diese Färbungsprobleme zeigen ein analoges Schwellverhalten wie das SAT. Die Unerfüllbarkeit einer SAT-Formel kann durch einen Resolutionsbeweis nachgewiesen werden. Für Graphen gibt es von György Hajós eine Konstruktion zum Beweis der Nichtfärbbarkeit [Haj61]. Interessant ist hier die Frage nach Beweislängen. In [Hak85] wurden erstmals Formeln vorgestellt, die exponentiell lange Resolutionsbeweise erfordern.

In [PU92] wird die polynomielle Äquivalenz von erweiterten Fregebeweissystemen und dem Hajóskalkül bewiesen. Damit erscheint es zur Zeit nicht möglich zu sein, eine exponentielle untere Schranke für das Hajóskalkül nachzuweisen. Das Hajóskalkül ist auf einfache Graphen beschränkt. In [Ben83] gibt es erstmals eine Konstruktion, die auf Hypergraphen angewandt werden kann. Diese Konstruktion basiert auf der Hajóskonstruktion. Sie nutzt jedoch Hypergraphen mit variablen Kantengrößen, d. h. im Konstruktionsprozeß werden Kanten mit 2, 3, ... Knoten verwendet. Dies ist dem Korrektheitsbeweis geschuldet, da wie in [Haj61] Äquivalenzklassen von nichtbenachbarten Knoten verwendet werden. In Kapitel 9 wird eine neue Konstruktion vorgestellt, welche alle nicht- k -färbbaren r -uniformen Hypergraphen generiert. Diese Konstruktion verwendet in jedem Schritt r -uniforme Hypergraphen und unterscheidet sich hierdurch von [Ben83]. Die Konstruktion und die Beweisidee orientieren sich wieder am Hajóskalkül. Die Nutzung der Äquivalenzklassen im Beweis ist nun nicht mehr möglich. Zum Nachweis der Korrektheit der Konstruktion war daher eine elementarere Analyse notwendig. Dies stellt einen weiteren Beitrag dieser Arbeit dar.

Bei der Untersuchung von zufälligen Formeln bzw. Graphen hängt deren Größe vor allem von der Variablen- bzw. Knotenzahl n sowie einer Wahrscheinlichkeit $p = p(n)$ (z. B. die Wahrscheinlichkeit für eine Klausel oder eine Kante) ab. Eine Eigenschaft $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$ ist eine Teilmenge aller Formeln bzw. Graphen mit n Variablen bzw. Knoten. Dies kann z. B. die Menge aller erfüllbaren 4-SAT-Formeln mit n Variablen bzw. die Menge aller 3-färbbaren Graphen mit n Knoten sein. In Anlehnung an [Bol85] haben fast alle Graphen (bzw. fast alle Formeln) die Eigenschaft \mathcal{A} , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}[G \in \mathcal{A}] = 1$$

1 Einleitung

gilt. Analog wird hierfür die Formulierung „ G hat mit hoher Wahrscheinlichkeit die Eigenschaft \mathcal{A} “ bzw. „ G hat fast sicher die Eigenschaft \mathcal{A} “ verwendet.

Ein eher philosophisch geartetes Problem ergibt sich daraus, daß die in der Arbeit vorgestellten Algorithmen nicht für jede Eingabe ein Ergebnis berechnen. Darauf soll kurz eingegangen werden. In einem solchen Fall geben die Algorithmen FAIL aus. Diese Algorithmen bezeichnen wir dann als effizient, wenn sie

- für jede Eingabe polynomielle Laufzeit haben,
- anteilig nur in $o(1)$ vielen Fällen FAIL ausgeben und
- die Ausgabe (außer FAIL) immer korrekt ist.

Es werden zufällige Graphen mit n Knoten bzw. zufällige Formeln mit n Variablen betrachtet. Ein effizienter Algorithmus darf hier für $n \rightarrow \infty$ mit einer Wahrscheinlichkeit $o(1)$ FAIL ausgeben und muß ansonsten korrekt sein.

Zur Bestimmung der Laufzeit von Algorithmen wird das uniforme Kostenmaß verwendet. Man überzeugt sich leicht davon, daß alle vorgestellten Algorithmen nur polynomiell große Zahlen verwenden. Hängt nun die Laufzeit eines Algorithmus ebenfalls von den Konstanten $k \geq 1$ bzw. $0 < \varepsilon < 1$ ab, so darf sie für Polynomialzeitalgorithmen bezüglich dieser Konstanten nur einen Faktor $\log k$ bzw. $\log 1/\varepsilon$ enthalten.

Zum Abschluß dieser Diskussion sei noch auf folgenden Aspekt verwiesen: Von 4-SAT-Formeln mit mindestens n^2 vielen Klauseln ist bekannt, daß sie mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht erfüllbar sind. Ein simpler Algorithmus könnte nun bei einer solchen Formel immer nicht erfüllbar ausgeben und wäre anscheinend mit seiner konstanten Laufzeit besonders effizient. Es handelt sich hierbei aber nicht um einen effizienten Algorithmus in unserem Sinne, da er in $\omega(1)$ vielen Fällen ein inkorrektes Ergebnis liefert. Er ist damit für eine effiziente Zertifizierung der Unerfüllbarkeit nicht geeignet.

Auf Grund der vorangegangenen Betrachtungen gliedert sich die Arbeit in folgende Kapitel: Das *Kapitel 2* beginnt mit einer kurzen Einführung der Notation für Graphen und Multigraphen, der Diskrepanz sowie verschiedener Matrizen, mit denen sich die Graphen darstellen lassen. Die Notation orientiert sich an [Chu97]. Mit der Erweiterung der Diskrepanznotation aus [Chu97] auf Hypergraphen wird in Theorem 2.15 das Theorem 5.2 aus [Chu97] auf Hypergraphen übertragen. Durch dieses Theorem kann in fast regulären Multigraphen eine Verbindung zwischen der Diskrepanz und den Eigenwerten

1 Einleitung

der Laplacematrix eines Multigraphen hergestellt werden. Für die Anwendung dieses Theorems wird der Begriff der Eigenwertseparierung eingeführt und der Zusammenhang der Eigenwerte der unterschiedlichen Matrizen in Lemma 2.14 nachgewiesen. Diese Untersuchungen führen am Ende zum Algorithmus 2.19, mit dem die geringe Diskrepanz von Multigraphen nachgewiesen werden kann. Dieser Algorithmus ist effizient, wenn der untersuchte Multigraph mit hoher Wahrscheinlichkeit fast regulär ist und Eigenwertseparierung zeigt.

Im *Kapitel 3* erfolgt eine Erweiterung des Diskrepanzbegriffes auf Hypergraphen. Für zufällige Hypergraphen mit $\Omega(n^{1+\varepsilon})$ vielen Kanten, aber auch für Graphen mit $\Omega(n^{1+\varepsilon})$ vielen Kanten wird gezeigt, daß sie mit hoher Wahrscheinlichkeit geringe Diskrepanz zeigen. Durch diese Betrachtungen erhält man aber noch nicht einen effizienten Algorithmus, der diese geringe Diskrepanz nachweist. Dieser wird in den nächsten Kapiteln erarbeitet.

Das *Kapitel 4* enthält die für diese Arbeit relevanten Ergebnisse aus [GJ02]. Zum einen wird die geringe Diskrepanz eines 3-uniformen Hypergraphen auf die geringe Diskrepanz seiner Projektions- und Produktgraphen zurückgeführt. Zum anderen wird gezeigt, daß für zufällige Hypergraphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim cn^{\varepsilon-3/2}$ und $0 < \varepsilon < 1/6$ alle Projektions- und Produktgraphen mit hoher Wahrscheinlichkeit fast regulär sind und Eigenwertseparierung zeigen. Dies ermöglicht es, die geringe Diskrepanz der Projektions- und der Produktgraphen und somit auch die geringe Diskrepanz der Hypergraphen durch den Algorithmus 2.19 aus Kapitel 2 effizient zu zertifizieren.

Bei der Untersuchung von 4-SAT-Formeln mit $c \cdot n^2$ vielen Klauseln sind 3-uniforme Hypergraphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim c/n = c \cdot n^{1/2-3/2}$ interessant. Diese Hypergraphen sind so dicht ($\varepsilon = 1/2 > 1/6$), daß das im Kapitel 4 vorgestellte Verfahren zum Nachweis der geringen Diskrepanz aus [GJ02] nicht verwendet werden kann. Im *Kapitel 5* werden nun Multigraphen für die Projektions- und Produktgraphen eingesetzt und die Grundidee aus [GJ02] aufgegriffen. Hier wird zum einen bewiesen, daß die geringe Diskrepanz eines Hypergraphen ebenfalls aus der geringen Diskrepanz seiner Projektions- und Produktmultigraphen folgt. Andererseits kann für zufällige 3-uniforme Hypergraphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim c/n$ nachgewiesen werden, daß alle Projektions- und Produktmultigraphen mit hoher Wahrscheinlichkeit Eigenwertseparierung und damit geringe Diskrepanz haben. Unter Verwendung der Algorithmen aus Kapitel 2 entsteht der Algorithmus 5.18 zum effizienten Nachweis der geringen Diskre-

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

panz eines 3-uniformen Hypergraphen mit $c \cdot n^2$ vielen Kanten. Die Verwendung eines Multigraphen erleichtert im Vergleich zu [GJ02] die Analyse des Projektionsmultigraphen. Dagegen ist die Analyse des Produktmultigraphen aufwendiger als in [GJ02].

Das *Kapitel 6* beschäftigt sich mit dem maximalen Schnitt in zufälligen Graphen. Die Anwendung der Chernoff-Schranken ergibt bei hinreichend großer Kantenwahrscheinlichkeit eine obere Schranke für die Größe des maximalen Schnittes.

In *Kapitel 7* werden die bisher erarbeiteten Resultate zusammengeführt. Im Ergebnis entsteht der Algorithmus 7.13, der mit zwei einfachen Tests effizient die Nichterfüllbarkeit fast aller zufälligen 4-SAT-Formeln mit $c \cdot n^2$ vielen Klauseln zertifiziert.

Das *Kapitel 8* beschäftigt sich noch einmal mit uniformen Hypergraphen. Für diese Hypergraphen wird das Färbbarkeitsproblem untersucht. Es kann eine einfache obere Schranke für die Nicht- k -Färbbarkeit angegeben werden. Ferner wird eine Modifikation des Algorithmus 7.13 aus Kapitel 7 erarbeitet, die es ermöglicht, die Nicht-2-Färbbarkeit von 4-uniformen Hypergraphen mit $c \cdot n^2$ vielen Kanten effizient zu zertifizieren.

Das *Kapitel 9* bildet den Abschluß bei der Untersuchung der Färbungsprobleme in uniformen Hypergraphen. Es wird ein neues, auf [Haj61] basierendes Konstruktionsverfahren eingeführt, mit dem alle nicht k -färbbaren r -uniformen Hypergraphen konstruiert werden können.

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

2.1 Diskrepanznotation für einfache Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit $|V| = n$ Knoten und $|E| = m$ Kanten. In diesem Graph kann es maximal $\binom{n}{2}$ Kanten geben. Die Dichte der Kanten ρ berechnet sich aus $\rho = m/\binom{n}{2}$. Die Kantendichte ρ stellt eine Wahrscheinlichkeit dar. Wählt man zufällig aus der Menge der Knoten V uniform zwei verschiedene Knoten u und v aus, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese beiden Knoten eine Kante bilden, genau $|E|/\binom{n}{2}$. Es ist also $\text{Prob}[\{u, v\} \in E] = \rho$.

Eine Teilmenge $X \subseteq V$ spannt einen Teilgraphen $G' = (X, E(X))$ auf. Es ist $E(X) = \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \in E, u, v \in X\}$. Die Anzahl an Kanten in G' sei $m_X = |E(X)|$. Es sei $|X| = \alpha n$ die Anzahl Knoten der Menge X . Wurde die Menge X zufällig gewählt

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

und sind alle Teilmengen von V mit αn Knoten gleichwahrscheinlich, so kann leicht die erwartete Anzahl an Kanten in G' berechnet werden. Für zwei Knoten u und v aus X beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie eine Kante bilden, wieder ρ . Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt sofort $E[m_X] = \binom{\alpha n}{2} \rho = \alpha^2 m + o(m)$. Die Komplementmenge $Y = V \setminus X$ spannt ebenfalls einen Graphen $G'' = (Y, E(Y))$ auf. Offensichtlich ist $|Y| = (1 - \alpha)n$. Analog erhält man eine zu erwartende Anzahl von $\rho \cdot \binom{(1-\alpha)n}{2} = (1 - \alpha)^2 m + o(m)$ Kanten für den von Y aufgespannten Graph.

Zwischen den beiden Knotenmengen X und Y verlaufen ebenfalls Kanten. Es bezeichne $E(X, Y) = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E, x \in X, y \in Y\}$ die Menge von Paaren, die solche Kanten bilden. Man beachte an dieser Stelle, daß die Paare geordnet sind. Jede Kante zwischen den Mengen X und Y spiegelt sich in zwei Paaren wieder. Der Hintergrund für diese spezielle Definition ist technischer Natur. Die Definition gleicht der in [Chu97] Seite 71. Hierdurch können die Abschätzungen für $|E(X, Y)|$ aus [Chu97] verwendet werden. Die Anzahl dieser Paare sei wieder $m_{X,Y} = |E(X, Y)|$. Diese Definition von $E(X, Y)$ verlangt nicht zwingend, daß X und Y komplementär sind. Speziell für $X = Y$ ergibt sich offensichtlich $|E(X)| = |E(X, X)|/2$ bzw.

$$m_X = m_{X,X}/2 . \tag{1}$$

Gilt jedoch $X = V \setminus Y$, so entspricht die Anzahl Kanten $\{x, y\}$ zwischen diesen beiden Knotenmengen genau der Anzahl geordneter Paare (x, y) . Insgesamt gibt es in diesem Fall $|X| \cdot |Y| = \alpha(1 - \alpha)n^2$ viele mögliche Paare bzw. Kanten. Die erwartete Anzahl an Paaren bzw. Kanten zwischen X und Y beträgt hier $E[m_{X,Y}] = \rho \cdot |X| \cdot |Y| = (m/\binom{n}{2}) \cdot \alpha(1 - \alpha)n^2 = 2\alpha(1 - \alpha)m + o(m)$.

Wir führen nun den Begriff der Diskrepanz ein, um die Abweichung zwischen der tatsächlichen Anzahl an Kanten (bzw. geordneten Paaren) und der auf Grund der Kantendichte ρ erwarteten Anzahl von Kanten zu messen:

Definition 2.1 (Diskrepanz-Notation). *Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher und ungerichteter Graph mit $|V| = n$ Knoten und $|E| = m$ Kanten.*

1. Die Diskrepanz bzw. Abweichung (an Kanten) der Knotenmenge $X \subseteq V$ mit $|X| =$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

αn bezüglich des Graphen G beträgt

$$\text{Disk}_G(X) = \left| m_X - \rho \cdot \binom{|X|}{2} \right|.$$

2. Die Diskrepanz bzw. Abweichung (an Knotenpaaren) der Knotenmengen $X \subseteq V$ und $Y = V \setminus X$ mit $|X| = \alpha n$ bezüglich des Graphen G beträgt

$$\text{Disk}_G(X, Y) = |m_{X,Y} - \rho \cdot |X| \cdot |Y||.$$

Setzt man $\rho = m/\binom{n}{2}$ ein, so erhält man für $|X| = \alpha n$ und $Y = V \setminus X$:

$$\begin{aligned} \text{Disk}_G(X) &= |m_X - \alpha^2 m| + o(m) \quad \text{und} \\ \text{Disk}_G(X, Y) &= |m_{X,Y} - 2\alpha(1 - \alpha)m| + o(m). \end{aligned}$$

An dieser Stelle ist es möglich, die α -Diskrepanz eines Graphen als das Maximum aller Diskrepanzen der Mengen $X \subseteq V$ mit $|X| = \alpha n$ zu definieren, wie es beispielsweise in [Chu97] geschieht. Diese Art von Diskrepanz ist jedoch noch nicht ausreichend für die weiteren Betrachtungen. Wir interessieren uns für Graphen, in denen die Anzahl an Kanten für alle Knotenmengen X bzw. die Anzahl an Kanten in einem beliebigen Schnitt, also zwischen X und $Y = V \setminus X$, nur geringfügig vom Erwartungswert abweichen. Im besonderen werden wir später Zufallsgraphen mit $n \rightarrow \infty$ betrachten. Wir benötigen nur, daß die Abweichung vom Erwartungswert asymptotisch gering ist. Dies führt uns zu

Definition 2.2 (geringe α -Diskrepanz). *Ein Graph $G = (V, E)$ ist von geringer α -Diskrepanz, wenn für alle Knotenmengen $X \subseteq V$ mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ sowie $Y = V \setminus X$ gilt:*

1. $m_X = \alpha^2 \cdot m \cdot (1 + o(1)) + o(m)$
2. $m_{X,Y} = 2 \cdot \alpha(1 - \alpha) \cdot m \cdot (1 + o(1)) + o(m)$.

Liegt in einem Graphen die geringe α -Diskrepanz für jedes denkbare α vor, so werden wir von geringer Diskrepanz des Graphen sprechen:

Definition 2.3 (geringe Diskrepanz). *Ein Graph $G = (V, E)$ ist von geringer Diskrepanz, wenn er für jedes $\alpha = \alpha(n)$ mit $0 \leq \alpha(n) \leq 1$ von geringer α -Diskrepanz ist.*

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

Nun haben wir alle Voraussetzungen geschaffen, um uns mit den Diskrepanzeigenschaften von zufälligen Graphen zu beschäftigen. Versucht man zu bestimmen, ob ein Graph geringe Diskrepanz zeigt, so ist dieses Problem $\text{co-}\mathcal{NP}$ -vollständig (vgl. z. B. [BKV⁺81] bzw. die Bemerkungen in [Chu97] auf Seite 71). Wir werden eine Familie zufälliger Graphen angeben, in der zum einen fast alle Graphen geringe Diskrepanz aufweisen und zum anderen diese Graphen fast regulär sind. Diese Regularität bietet uns die Möglichkeit, die geringe Diskrepanz über die Eigenwerte der Matrixdarstellung des Graphen abzuschätzen. Dies wird uns letztendlich einen schnellen Algorithmus liefern, der die geringe Diskrepanz eines Graphen beweisen kann.

Es bezeichne $d_v = d(v)$ den Grad eines Knoten $v \in V$. Haben alle Knoten eines Graphen im Wesentlichen den gleichen Grad d , so bezeichnen wir diesen Graphen als fast d -regulär:

Definition 2.4 (fast d -regulär). *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt fast d -regulär, wenn für alle Knoten $v \in V$*

$$d_v = d(1 + o(1))$$

gilt.

2.2 Diskrepanznotation für Multigraphen

Unter einem Multigraphen M verstehen wir ein Tripel $M = (V, F, f)$. V sei die Menge der $|V| = n$ Knoten. F sei eine Menge von $|F| = m(M) = m$ Kanten. Die Funktion f liefert zu einer Kante e die beiden Knoten u und v , welche durch diese Kante verbunden werden. Im Falle von ungerichteten Multigraphen erhalten wird eine zweielementige Menge, bei gerichteten ein geordnetes Paar von Knoten. Im weiteren sind wir hauptsächlich an ungerichteten und schlingenfreien Multigraphen interessiert. Die Kanten haben also keine Richtung und es treten keine Schlingen auf. Der Grad $d_v = d(v, M)$ eines Knotens v bestimmt sich wieder aus der Anzahl der Kanten, in denen dieser Knoten vorkommt. Es ist also

$$d(v, M) = d_v = |e: e \in F \text{ und } v \in f(e)|.$$

Mit dem Multigraphen M korrespondiert ein einfacher gewichteter Graph $G = G(M) = (V, E, c: V \times V \rightarrow \mathbb{N})$. Die Knotenmengen sind identisch. Im Graphen G soll es zwischen zwei Knoten eine Kante geben, wenn es im Multigraphen M mindestens eine Kante zwischen diesen beiden Knoten existiert. Die Anzahl dieser Kanten sei im Gewicht dieser Kante vermerkt.

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

Die Konstruktion bzw. die Definition dieses Graphen kann am einfachsten über die Gewichtsfunktion c erfolgen. Wir zählen einfach die Anzahl der Kanten im Multigraphen:

$$c(u, v) = |\{e: e \in F \text{ und } f(e) = \{u, v\}\}|.$$

Der Multigraph ist ungerichtet und schlingenfrei, damit gilt

$$c(u, u) = 0 \text{ und } c(u, v) = c(v, u) .$$

Es gilt nur $c(i, j) > 0$, wenn im Multigraphen mindestens eine Kante zwischen i und j verläuft. Damit definiert sich die Menge E der Kanten des Graphen G aus:

$$E = \{\{u, v\} : c(u, v) > 0\} .$$

Interessant sind noch folgende Zusammenhänge: Der Grad eines Knotens im Multigraphen kann nun durch die Addition der entsprechenden Kantengewichte in G bestimmt werden. Die Anzahl aller Kanten in M kann aus der Summation aller Gewichte gewonnen werden. Es gilt also:

$$d(u, M) = \sum_{v \in V} c(u, v) \text{ und } m(M) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v, M) = \sum_{\substack{u, v \in V \\ u < v}} c(u, v) . \quad (2)$$

Analog kann man mit nicht einfachen oder mit gerichteten Multigraphen verfahren und entsprechende Graphen bilden.

Wir untersuchen zunächst, wie die Begriffe der Diskrepanz bzw. der Regularität auf die neuen Graphen übertragen werden können. Betrachten wir eine Teilmenge $X \subseteq V$ der Knoten des Multigraphen M , so spannen diese wieder einen Teilgraphen auf. Es sei $E(X)$ die Menge der Kanten, die nur Endpunkte in X besitzen. Es ist also im ungerichteten Multigraphen

$$E(X) = \{e: e \in E \text{ und } f(e) \subseteq X\} \quad (3)$$

Die Anzahl dieser Kanten, die nur zwischen Knoten aus X verlaufen, sei

$$m_X = |E(X)| . \quad (4)$$

Analog zu den Gleichungen in (2) kann diese Zahl auch durch die Summation der ge-

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

eigneten Gewichte in G ermittelt werden. Wenn wir zwei Knotenmengen $X, Y \subseteq V$ betrachten, so können wir nun in $E_{X,Y}$ für alle geordneten Paare $(x, y) \in X \times Y$ die Kanten erfassen, die jeweils zwischen x und y , also einem Knoten aus X und einem Knoten aus Y , verlaufen. Es ist also in einem ungerichteten Multigraphen:

$$E(X, Y) = \{(x, y, e) : x \in X, y \in Y, f(e) = \{x, y\}\} . \quad (5)$$

Die Anzahl der Tripel in $E_{X,Y}$ wird in $m_{X,Y}$ gezählt:

$$m_{X,Y} = |E(X, Y)| . \quad (6)$$

Der gleiche Wert kann ebenfalls wieder aus dem zugehörigen gewichteten Graphen G gewonnen werden:

$$m_{X,Y} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} c(x, y) . \quad (7)$$

Sind die Knotenmengen X und Y disjunkt, so entspricht in ungerichteten Graphen $m_{X,Y}$ genau der Anzahl an Kanten, die zwischen X und Y verlaufen. Betrachtet man dagegen $X = Y$, so zählen wir in $m_{X,X}$ wieder die doppelte Anzahl an Kanten, die nur zwischen Knoten in X verlaufen. Es gilt also auch hier wieder:

$$m_X = m_{X,X}/2 \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} c(x, y) . \quad (9)$$

Die Gleichungen 9 und 7 ergeben die Definition von m_X und $m_{X,Y}$ für gewichtete Graphen. Hier werden also nicht die Knotenpaare selbst sondern die Gewichte der zugehörigen Kanten gezählt. Will man hier wieder diese Werte als eine Anzahl von Kanten interpretieren, so ist es sinnvoller, wieder einen entsprechenden Multigraphen zu betrachten.

Nun können wir in analoger Art und Weise die geringe α -Diskrepanz für ungerichtete Multigraphen sowie für ungerichtete gewichtete Graphen definieren:

Definition 2.5 (Geringe α -Diskrepanz von Multigraphen und gewichteten Graphen). *Ein einfacher ungerichteter Multigraph $M = (V, F, f)$ (bzw. ein einfacher ungerichteter gewichteter Graph $G = (V, E, c : V \times V \rightarrow \mathbb{N})$) ist von geringer α -Diskrepanz, wenn für alle Knotenmengen $X \subseteq V$ mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ sowie $Y = V \setminus X$ gilt:*

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

1. $m_X = \alpha^2 \cdot m \cdot (1 + o(1)) + o(m)$
2. $m_{X,Y} = 2 \cdot \alpha(1 - \alpha) \cdot m \cdot (1 + o(1)) + o(m)$.

Liegt in einem Multigraphen bzw. in einem gewichteten Graphen die geringe α -Diskrepanz für jedes mögliche α vor, so werden wir von geringer Diskrepanz dieses Graphen sprechen:

Definition 2.6 (geringe Diskrepanz von Multigraphen und gewichteten Graphen). *Ein einfacher ungerichteter Multigraph $M = (V, E, f)$ (bzw. ein einfacher ungerichteter gewichteter Graph $G = (V, E, c: V \times V \rightarrow \mathbb{N})$) ist von geringer Diskrepanz, wenn er für jedes $\alpha = \alpha(n)$ mit $0 \leq \alpha(n) \leq 1$ von geringer α -Diskrepanz ist.*

In Anlehnung an Definition 2.1 bezeichne

$$\text{Disk}_M(X) = \left| m_X - \alpha^2 m \right| \quad \text{und} \quad (10)$$

$$\text{Disk}_M(X, Y) = \left| m_{X,Y} - 2\alpha(1 - \alpha)m \right| \quad (11)$$

die Diskrepanz im Multigraphen für $V = X \cup Y$ und $|X| \sim \alpha n$.

Definition 2.7 (Fast d -reguläre Multigraphen und gewichtete Graphen). *Ein Multigraph $M = (V, F, f)$ bzw. ein einfacher, ungerichteter und gewichteter Graph $G = (V, E, c: V \times V \rightarrow \mathbb{N})$ heißt fast d -regulär, wenn für alle Knoten $v \in V$*

$$d_v = d \cdot (1 + o(1))$$

gilt.

Ausgehend von der Definition 2.7 überlegt man sich leicht den Algorithmus 2.8 *Fast_Regulär_G*, um einen Multigraphen $G = (V, E, f)$ auf Fast- d -Regularität zu testen. G liege dabei wieder als Adjazenzmatrix vor.

Lemma 2.9. *Es sei $G = (V, E, f)$ ein Multigraph mit $|V| = n$ sowie $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion mit $0 < g(n) < 1$ und $g(n) = o(1)$. Wird auf den Multigraphen G der Algorithmus 2.8 *Fast_Regulär_G* angewendet, dann gilt:*

1. *Wenn ein d existiert, so daß G bezüglich $g(n)$ fast d -regulär ist, so findet der Algorithmus ein solches d und hat als Ausgabe „fast d -regulär“.*
2. *Wenn kein d existiert, so daß G bezüglich $g(n)$ fast d -regulär ist, so gibt der Algorithmus „nicht fast d -regulär“ aus.*

Algorithmus 2.8 (Fast_Regulär_G(A(G), g())).

Eingabe: · **A** - Adjazenzmatrix eines ungerichteten
 Multigraphen $G = (V, E, f)$ mit $|V| = n$ oder $|V| = n^2$
 · $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g(n) = o(1)$, $g(n) > 0$

Ausgabe: · $d \in \mathbb{Q}$
 · G ist / ist nicht fast d -regulär

1. FOR EACH $i \in V$ DO $D[i] := \sum_{k \in V} \mathbf{A}(i, k)$
2. $d_{\min} := \min_{i \in V} D[i]$
3. $d_{\max} := \max_{i \in V} D[i]$
4. $d := \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2}$
5. IF $\frac{d_{\max} - d_{\min}}{2 \cdot d} \leq g(n)$
6. THEN RETURN (G ist fast d -regulär) }
7. ELSE RETURN (G ist nicht fast d -regulär) }

3. Der Algorithmus hat polynomielle Laufzeit.

Beweis. Aus der Definition 2.7 ergibt sich, daß für eine Funktion $g(n) = o(1)$ mit $g(n) > 0$ der Graph G genau dann fast d -regulär ist, wenn $|d_v - d|/d \leq g(n)$ für alle Knoten $v \in V$ gilt. Es sei d_{\min} der minimale Grad. Analog bezeichne d_{\max} den maximalen Grad. Für die d -Regularität genügt es nun d_{\min} und d_{\max} zu überprüfen. Für eine Funktion $g(n)$ kann es verschiedene d geben, so daß G fast d -regulär ist. Es sei D_1 das kleinste d , so daß G fast d -regulär ist. Analog sei D_2 das größte geeignete d . Für ein gegebenes d erfüllen nun alle Grade d_i mit $d - d \cdot g(n) \leq d_i \leq d + d \cdot g(n)$ die Bedingung für fast d -regulär. Für einen gegebenen Graphen mit n Knoten ist $g(n)$ konstant. Somit sind für ein monoton wachsendes d die für die Fast- d -Regularität geeigneten Intervallgrenzen ebenfalls monoton wachsend. Daraus folgt, daß für alle d mit $D_1 \leq d \leq D_2$ der Graph G fast d -regulär ist. Ferner folgt aber sofort für D_1 (das kleinste d) $D_1 + D_1 \cdot g(n) = d_{\max}$ und $D_1 - D_1 \cdot g(n) \leq d_{\min}$. Hieraus folgt aber sofort $D_1 \leq (d_{\max} + d_{\min})/2$ Analog gilt $D_2 - D_2 \cdot g(n) = d_{\min}$ und $D_2 + D_2 \cdot g(n) \geq d_{\max}$. Hieraus folgern wir aber $D_2 \geq (d_{\max} + d_{\min})/2$. Damit ist G fast $(d_{\max} + d_{\min})/2$ -regulär. Falls also ein d existiert, so daß G fast d -regulär bezüglich $g(n)$ ist, dann ist G auch fast

$(d_{\max} + d_{\min})/2$ -regulär.

Offensichtlich bestimmt der Algorithmus in Zeile 1 alle Grade $D[i] = d_i$. Die Laufzeit hierfür beträgt $O(|V|^2)$. Die Bestimmung des minimalen und des maximalen Grades in den Zeilen 2 und 3 kann in $O(|V|)$ realisiert werden. Wie eben gezeigt wurde, genügt es die Fast- $(d_{\max} + d_{\min})/2$ -Regularität für den kleinsten Grad d_{\min} und den größten Grad d_{\max} zu überprüfen. Dies geschieht in den Zeilen 4 bis 7 mit einer Laufzeit von $O(1)$. Der Algorithmus ist somit korrekt und die Laufzeit beträgt $O(|V|^2)$. \square

2.3 Eigenwerte und Multigraphen

In diesem Abschnitt werden zusätzlich zur Adjazenzmatrix weitere Matrizen zur Darstellung von Graphen sowie einfache, bekannte Lemmata eingeführt. Die Notation orientiert sich dabei an [Chu97]. Bei der algorithmischen Bestimmung der geringen Diskrepanz eines Graphen unter Verwendung der Eigenwerte spielt das Theorem 5.2 in [Chu97] auf Seite 73 eine wichtige Rolle. Dieses Theorem kann leicht auf Multigraphen angepaßt werden. Hierzu ist es nur notwendig, die Diskrepanznotation zu erweitern. Das Theorem kann dann analog zu [Chu97] bewiesen werden. In diesem Theorem werden die Eigenwerte der Laplace-Matrix eines Graphen verwendet. In den nächsten Kapiteln muß eine probabilistische Analyse dieser Eigenwerte durchgeführt werden. Es erscheint jedoch einfacher, die Eigenwerte der Adjazenzmatrix eines Multigraphen zu analysieren. Deshalb wird ein Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der verschiedenen Matrizen eines Multigraphen hergestellt. Hieraus ergibt sich die Definition der Eigenwertseparierung. Diese führt am Ende des Kapitels zu einem effizienten Algorithmus, der durch die Berechnung der Eigenwerte der Adjazenzmatrix die geringe Diskrepanz eines Multigraphen nachweisen kann.

Im Abschnitt 2.2 wurde bereits erwähnt, daß sich ein gewichteter Graph in einer Adjazenzmatrix darstellen läßt. Die übliche Darstellung eines ungewichteten und ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ als Adjazenzmatrix erhält man, wenn man für diesen Graphen die Gewichtsfunktion $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$c(u, v) = \begin{cases} 1 & : \{u, v\} \in E \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (12)$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

festlegt. Die Adjazenzmatrix definiert sich nun aus:

$$\mathbf{A}(u, v) = c(u, v) . \quad (13)$$

Im ungewichteten Graphen $G = (V, E)$ bzw. im Multigraphen $G = (V, E, f)$ ergibt sich der Grad $d_v = d(v)$ eines Knotens v aus der Anzahl der Kanten, in denen dieser Knoten liegt. In Analogie hierzu verwenden wir die Summe der Kantengewichte

$$d_v = \sum_{u \in V} c(u, v) . \quad (14)$$

als Grad des Knotens v . In Analogie hierzu können wir die Anzahl der Kanten eines Multigraphen zählen, die einen Knoten einer Knotenmenge $X \subseteq V$ enthalten. Betrachten wir nicht Kanten sondern geordnete Knotenpaare, so ergibt sich diese Anzahl aus

$$\text{vol } X = \sum_{x \in X} d_x . \quad (15)$$

Wir werden uns nun hauptsächlich auf Multigraphen konzentrieren. Im weiteren wird der Begriff des charakteristischen Vektors verwendet. Es sei $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann heißt ψ_X charakteristischer Vektor von X genau dann, wenn

$$\psi_X(x) = \begin{cases} 1 & : x \in X \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Der charakteristische Vektor von V selbst ist natürlich der Einsvektor, es gilt also $\psi_V = \mathbf{1}$. In $m_{X,Y} = |E(X, Y)|$ haben wir die (geordneten) Tripel (x, y, e) (also alle Kanten e mit $f(e) = \{x, y\}$ mit einem Endpunkt $x \in X$ sowie $y \in Y$) gezählt. In der Gleichung 7 wird dieser Wert aus den entsprechenden Kantengewichten berechnet. Die Kantengewichte entsprechen aber den Eintragungen in der Adjazenzmatrix \mathbf{A} . Es ist also:

$$m_{X,Y} = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \mathbf{A}(x, y) . \quad (16)$$

Die Interpretation dieser Summe ist einfach. Für jeden Knoten $x \in X$ wird der entsprechende Zeilenvektor in \mathbf{A} herausgesucht. In diesem Vektor werden nun die Elemente summiert, die zu Y gehören. Diese Elemente können ebenfalls durch die Multiplikation

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

mit den charakteristischen Vektoren bestimmt werden:

$$m_{X,Y} = \psi_X^T \cdot \mathbf{A} \cdot \psi_Y \quad (17)$$

$$\Rightarrow m_X = 2 \cdot \psi_X^T \cdot \mathbf{A} \cdot \psi_X . \quad (18)$$

Nun definieren wir die Diagonalmatrix \mathbf{T} durch

$$\mathbf{T}(u, v) = \begin{cases} d_v & \text{für } u = v \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (19)$$

Die Matrix \mathbf{T} enthält also nur den jeweiligen Grad auf der Hauptdiagonalen, ansonsten ist sie mit 0 besetzt. An der Matrix \mathbf{T} bzw. deren Potenzen sind wir nur als Diagonalmatrix interessiert, so verwenden wir

$$\mathbf{T}^{\pm 1/2}(u, v) = \begin{cases} d_v^{\pm 1/2} & \text{für } u = v \text{ und } d_u > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20)$$

Die Adjazenzmatrix \mathbf{A} ist nur eine Variante, einen Graphen als Matrix darzustellen. Für die Untersuchung von Grapheigenschaften spielt die Laplace-Matrix ebenfalls eine wichtige Rolle. Zunächst definieren wir jedoch die Matrix \mathbf{L} als

$$\mathbf{L}(u, v) = \begin{cases} d_v - c(v, v) & \text{für } u = v \\ -c(u, v) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (21)$$

Man sieht sofort (für nichtnegative Gewichte), daß die Matrix \mathbf{L} schwach diagonaldominant ist. Demnach muß sie nach Lemma 10.9 positiv semidefinit sein. Ferner existiert nach Lemma 10.7 eine Zerlegung $\mathbf{L} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$.

Eine Normierung von \mathbf{L} ergibt schließlich die Laplace-Matrix \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(u, v) = \begin{cases} 1 - \frac{c(v,v)}{d_v} & \text{für } u = v \text{ und } d_v \neq 0 \\ -\frac{c(u,v)}{\sqrt{d_u d_v}} & \text{für } u \neq v \text{ und } d_u d_v \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (22)$$

Man berechnet leicht, daß

$$\mathcal{L} = T^{-1/2} \cdot L \cdot T^{-1/2} \quad (23)$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

gilt. Aus dieser Gleichung, $T^{-1/2} = (T^{-1/2})^T$ sowie der Zerlegung von $\mathbf{L} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}$ folgt aber sofort, daß $\mathcal{L} = (\mathbf{C} \cdot T^{-1/2})^T \cdot (\mathbf{C} \cdot T^{-1/2})$ ebenfalls positiv semidefinit ist.

Betrachtet man d -reguläre Graphen, so ergibt sich folgender einfache Zusammenhang zwischen der Adjazenzmatrix \mathbf{A} und der Laplacematrix \mathcal{L} eines Graphen:

$$\mathcal{L} = \mathbf{I} - \frac{1}{d} \cdot \mathbf{A} . \quad (24)$$

Im allgemeinen Fall überprüft man leicht

$$\mathcal{L} = \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1/2} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{-1/2} . \quad (25)$$

Für die weiteren Schlußfolgerungen werden wir hauptsächlich die Matrix \mathbf{B} , definiert durch

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathcal{L} , \quad (26)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{für } u = v \text{ und } d_v = 0 \\ \frac{c(u,v)}{\sqrt{d_u d_v}} & \text{für } u \neq v \text{ und } d_u d_v \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (27)$$

nutzen. Damit gilt aber für die Adjazenzmatrix:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{1/2} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^{1/2} . \quad (28)$$

Wir betrachten ungerichtete gewichtete Graphen. Somit gilt immer $c(u, v) = c(v, u)$. Für ungerichtete Graphen sind also die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{L} , \mathcal{L} und \mathbf{B} symmetrisch und haben demzufolge $n = |V|$ reelle Eigenwerte. Es seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ die n reellen Eigenwerte der Adjazenzmatrix \mathbf{A} mit den zugehörigen normierten Eigenvektoren ϕ_1, \dots, ϕ_n . Analog bezeichnen $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_n$ und $\lambda''_1 \leq \dots \leq \lambda''_n$ die Eigenwerte der Matrizen \mathbf{B} und \mathcal{L} . Aus der Definition von \mathbf{B} (Gleichung 26) folgt sofort, daß \mathbf{B} und \mathcal{L} die selben Eigenvektoren ϕ'_1, \dots, ϕ'_n haben.

Man überprüft leicht, daß

$$\lambda''_1 = 0 \quad (29)$$

der kleinste Eigenwert der positiv semidefiniten Laplace-Matrix \mathcal{L} mit dem zugehörigen

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

Eigenvektor

$$\phi'_1 = \phi''_1 = \frac{1}{\sqrt{\text{vol } V}} \cdot T^{1/2} \cdot \mathbf{1} \quad (30)$$

ist (vgl. auch [Chu97], Seiten 3 und 12). Damit bestimmt sich der größte Eigenwert von $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathcal{L}$ nach 10.10 aus

$$\lambda'_1 = 1 . \quad (31)$$

Für d -reguläre Graphen bestimmt sich der größte Eigenwert der Adjazenzmatrix \mathbf{A} nach 10.10 und Gleichung 24 aus $\lambda_1 = d$. Bei nichtregulären Graphen kann er durch den größten und den kleinsten Grad abgeschätzt werden:

Lemma 2.10. *In einem ungerichteten gewichteten Graphen $G = (V, E, c)$ bzw. ungerichteten Multigraphen $G = (V, E, f)$ gilt für den größten Eigenwert λ_1 der Adjazenzmatrix \mathbf{A}*

$$\min_{v \in V} d_v \leq \lambda_1 \leq \max_{v \in V} d_v .$$

Beweis. Die untere Schranke folgt sofort, wenn wir Lemma 10.4 auf die Adjazenzmatrix \mathbf{A} und den Einsvektor $\mathbf{1}$, anwenden. Der Einsvektor $\mathbf{1}$ ist der charakteristische Vektor ψ_V von V . Damit können wir die Kantenanzahl nach der Gleichung 18 bestimmen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{A} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}, \mathbf{1})} \\ &= \frac{\psi_V^T \mathbf{A} \psi_V}{n} \\ &= \frac{2m}{n} \\ &= \frac{\sum_{v \in V} d_v}{n} \\ &\geq \min_{v \in V} d_v . \end{aligned}$$

Für die obere Schranke betrachten wir die Matrix $\mathbf{A}' = (\max_{v \in V} d_v) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Die Summe der Elemente in einer Zeile v bzw. einer Spalte v in der Adjazenzmatrix ergibt den Grad des Knotens v . Dieser Grad ist natürlich nie größer als der maximale Grad, es gilt folglich für alle $v \in V$:

$$\mathbf{A}'(v, v) \geq \sum_{w \in V \setminus \{v\}} |\mathbf{A}'(v, w)| .$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

Die Matrix \mathbf{A}' ist somit schwach diagonaldominant (vgl. Definition 10.8). Nach Lemma 10.9 ist \mathbf{A}' positiv semidefinit und hat also nur nichtnegative Eigenwerte. Dies seien $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ mit $\lambda'_i \geq 0$. Es ist $\mathbf{I} = \mathbf{A}'^0$. Nach Lemma 10.10 berechnen sich nun alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von \mathbf{A} aus:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \max_{v \in V} d_v - \lambda'_i \\ \Rightarrow \lambda_i &\leq \max_{v \in V} d_v . \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Als unmittelbare Schlußfolgerung ergibt sich aus diesem Lemma, daß für fast d -reguläre Graphen G der größte Eigenwert der Adjazenzmatrix \mathbf{A}

$$\lambda_1 = d \cdot (1 + o(1)) \tag{32}$$

$$\sim d \tag{33}$$

beträgt. Die Adjazenzmatrix von einfachen Graphen bzw. Multigraphen hat noch weitere interessante Eigenschaften. So kann man aus ihren Potenzen die Anzahl von verschiedenen Wegen zwischen zwei Knoten ablesen. Ein Weg $w = (e_1, \dots, e_k)$ ist ein k -Tupel von Kanten e_i mit den Endpunkten v_i und v_{i+1} . Die Knoten v_1 und v_{k+1} können als Start- und Endknoten bezeichnet werden, der Weg führt also von v_1 nach v_{k+1} . Der Weg muß nicht aus verschiedenen Kanten oder Knoten bestehen. Stimmen der Start- und der Endknoten überein, gilt also $v_1 = v_{k+1}$, so bezeichnen wir den Weg als geschlossen. Diese Definition des Weges als Tupel von Kanten weicht etwas von der üblichen Definition als Tupel von Knoten ab. Dies ergibt sich aus der Betrachtung von Multigraphen. Hier kann es zwischen zwei Knoten verschiedene Kanten geben. Bei der Betrachtung eines Weges als Knotentupel kann hier nicht mehr zwischen diesen Kanten unterschieden werden. Für die Anzahl der verschiedenen Wege einer bestimmten Länge zwischen zwei Knoten erhalten wir nun

Lemma 2.11. *Es sei $G = (V, E, f)$ ein Multigraph mit der Adjazenzmatrix \mathbf{A} sowie $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für \mathbf{A}^k :*

$$\mathbf{A}^k(u, v) = \text{Anzahl Wege der Länge } k \text{ von } u \text{ nach } v.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt leicht durch Induktion über k . Ein Induktionsanfang ergibt sich sowohl für $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ bzw. $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$. Im Induktionsschluß muß man die Wege der Länge $k + 1$ zwischen den zwei Knoten u und v betrachten. Ein solcher Weg der Länge $k + 1$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

führt offensichtlich nach k Kanten (beginnend bei Knoten u) zu einem Nachbarknoten i von v . Damit ergibt sich die Anzahl aller Wege der Länge $k + 1$ zwischen u und v aus:

$$\mathbf{A}^{k+1}(u, v) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}^k(u, i) \cdot \mathbf{A}(i, v) . \quad \square$$

Unter Verwendung von Gleichung 235 ergibt sich sofort aus diesem Lemma:

$$\text{Spur } \mathbf{A}^k = \text{Anzahl der geschlossenen Wege der Länge } k. \quad (34)$$

Die Einträge der Adjazenzmatrix \mathbf{A} und der Matrix \mathbf{B} sind ähnlich. Im Falle von ungerichteten fast d -regulären Multigraphen mit $d \neq o(1)$ unterscheiden sie sich jeweils nur um einen Faktor $d \cdot (1 + o(1))$. Hier gilt immer $\mathbf{B}(u, v) = \mathbf{A}(u, v) / \sqrt{d_u d_v}$. Dies führt ebenfalls zu der einfachen Ungleichung

$$\mathbf{A}(u, v) / \max_{i \in V} d_i \leq \mathbf{B}(u, v) \leq \mathbf{A}(u, v) / \min_{i \in V} d_i . \quad (35)$$

Für fast d -reguläre Graphen kann im Beweis von Lemma 2.11 statt $\mathbf{A}^x(u, v)$ nun der entsprechend korrigierte Wert $\mathbf{B}^x(u, v) \cdot d^x \cdot (1 + o(1))^x$ verwendet werden. Damit erhalten wir

Lemma 2.12. *Es sei $G = (V, E, f)$ ein ungerichteter fast d -regulärer Multigraph mit der Matrix \mathbf{B} , $d \neq o(1)$ sowie $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für \mathbf{B}^k :*

$$d^k \cdot (1 + o(1))^k \cdot \mathbf{B}^k(u, v) = \text{Anzahl Wege der Länge } k \text{ von } u \text{ nach } v.$$

Auch hier ergibt sich wieder unmittelbar ein Zusammenhang zur Spur \mathbf{B}^k , wenn wir alle geschlossenen Wege der Länge k betrachten:

$$d^k \cdot (1 + o(1))^k \cdot \text{Spur } \mathbf{B}^k = \text{Anzahl der geschlossenen Wege der Länge } k. \quad (36)$$

Die Spur einer Matrix ist gleich der Summe der Eigenwerte (vgl. Gleichung 235). Nun ist es uns möglich, durch die Eigenwerte der Adjazenzmatrix \mathbf{A} die Eigenwerte der Matrix \mathbf{B} abzuschätzen. Hierzu führen wir zunächst den Begriff der Eigenwertseparierung ein:

Definition 2.13. *Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den n Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ hat Eigenwertseparierung genau dann, wenn eine Konstante $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ und k gerade existiert, so daß*

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i^k = o(\lambda_1^k)$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

gilt.

Für fast d -reguläre Multigraphen ergibt sich sofort folgende Aussage über die Eigenwertseparierung:

Lemma 2.14. *Es sei $G = (V, E, f)$ ein fast d -regulärer ungerichteter Multigraph mit der Adjazenzmatrix \mathbf{A} , der Matrix \mathbf{B} sowie $d \neq o(1)$. Die Adjazenzmatrix \mathbf{A} hat genau dann Eigenwertseparierung, wenn die Matrix \mathbf{B} Eigenwertseparierung hat.*

Beweis. Es seien wieder $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ die Eigenwerte der Adjazenzmatrix \mathbf{A} und $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_n$ die Eigenwerte von \mathbf{B} . Für das konstante und gerade k aus der Definition 2.13 der Eigenwertseparierung betrachten wir die geschlossenen Wege der Länge k in G . Aus den Lemmata 2.11 und 2.12 bzw. aus den daraus abgeleiteten Gleichungen 34 und 36 folgt sofort:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = d^k \cdot (1 + o(1)) \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i'^k.$$

Nach Gleichung 33 gilt für den größten Eigenwert der Adjazenzmatrix $\lambda_1 = d \cdot (1 + o(1)) > 0$. Der größte Eigenwert von B bestimmt sich nach Gleichung 31 aus $\lambda'_1 = 1 > 0$. Für ein konstantes k gilt ferner $(1 + o(1))^k = 1 + o(1)$. Es gilt also $\lambda_1^k = d^k \cdot (1 + o(1))$, $\lambda_1'^k = 1$ und $(\lambda_1^k - \lambda_1'^k \cdot d^k \cdot (1 + o(1))) = o(d^k)$. Dies führt uns zu

$$\begin{aligned} \lambda_1^k + \sum_{i=2}^n \lambda_i^k &= \lambda_1'^k \cdot d^k \cdot (1 + o(1)) + d^k \cdot (1 + o(1)) \cdot \sum_{i=2}^n \lambda_i'^k \\ \Rightarrow \sum_{i=2}^n \lambda_i^k &= \lambda_1'^k \cdot d^k \cdot (1 + o(1)) - \lambda_1^k + d^k \cdot (1 + o(1)) \cdot \sum_{i=2}^n \lambda_i'^k \\ \Rightarrow \sum_{i=2}^n \lambda_i^k &= o(d^k) + d^k \cdot (1 + o(1)) \cdot \sum_{i=2}^n \lambda_i'^k \end{aligned} \quad (37)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^n \lambda_i'^k = o(1) + \frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i^k}{d^k \cdot (1 + o(1))}. \quad (38)$$

Liegt die Eigenwertseparierung bei der Adjazenzmatrix \mathbf{A} vor, so gilt $\sum_{i=2}^n \lambda_i^k = o(\lambda_1^k) = o(d^k)$. Damit folgt aber sofort $\sum_{i=2}^n \lambda_i'^k = o(1) = o(\lambda_1'^k)$ und damit die Eigenwertseparierung von \mathbf{B} aus der Gleichung 38. Haben wir dagegen die Eigenwertseparierung der Matrix \mathbf{B} mit $\sum_{i=2}^n \lambda_i'^k = o(\lambda_1'^k) = o(1)$, so folgt $\sum_{i=2}^n \lambda_i^k = o(d^k) = o(\lambda_1^k)$ und somit die Eigenwertseparierung von \mathbf{A} aus der Gleichung 37. \square

Im folgenden werden wir sehen, daß aus der Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

\mathbf{A} eines Multigraphen G die geringe Diskrepanz dieses Graphen folgt. Um dies nachzuweisen, untersuchen wir zunächst den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten der Matrix \mathbf{B} und der Anzahl an Kanten zwischen zwei Knotenmengen. Das nachfolgende Theorem, welches diesen Zusammenhang herstellt, entspricht im Wesentlichen dem Theorem 5.2 in [Chu97] auf Seite 71. Dieses Theorem wird im weiteren Verlauf eine wichtige Rolle spielen, so daß es mit seinem Beweis unter dem speziellen Aspekt der hier im Kapitel verwendeten Multigraphen bzw. gewichteten Graphen nochmals dargestellt wird. In [Chu97] wird dieses Theorem auf ungewichtete Graphen beschränkt. Dies ergibt sich aus der Diskrepanz-Notation am Anfang von Kapitel 5.2 in [Chu97], welche auf ungewichtete Graphen beschränkt wird. Am Anfang von Kapitel 1.4 auf Seite 12 in [Chu97] wird angedeutet, daß im Prinzip alle Sätze in [Chu97] für gewichtete Graphen angepaßt werden können. Die Diskrepanz-Notation für Multigraphen im Abschnitt 2.2 erfüllt genau diesen Zweck. Wir werden sehen, daß nun das Theorem 5.2 in [Chu97] ebenfalls auf Multigraphen angewendet werden kann:

Theorem 2.15. *Es sei $G = (V, E, f)$ ein Multigraph mit der Matrix \mathbf{B} . Es seien $\lambda'_1 = 1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_n$ die Eigenwerte von \mathbf{B} sowie $\bar{\lambda} = \max_{2 \leq i \leq n} |\lambda'_i|$. Ferner seien $X, Y \subseteq V$ zwei Knotenmengen sowie $\bar{X} = V \setminus X$ und $\bar{Y} = V \setminus Y$. Dann gilt*

$$\left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \cdot \text{vol } Y}{\text{vol } V} \right| \leq \bar{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{\text{vol } X \cdot \text{vol } \bar{X} \cdot \text{vol } Y \cdot \text{vol } \bar{Y}}}{\text{vol } V} .$$

Beweis. Wir beginnen den Beweis, indem wir die Terme auf der linken Seite der Ungleichung durch die charakteristischen Vektoren ψ_X und ψ_Y der Knotenmengen X und Y sowie durch die Matrix \mathbf{B} beschreiben. Es sei wieder \mathbf{A} die Adjazenzmatrix des Graphen G . Die Anzahl $m_{X,Y}$ kann nach der Gleichung 17 durch die Adjazenzmatrix und die charakteristischen Vektoren ausgedrückt werden. Die Adjazenzmatrix \mathbf{A} ersetzen wir nach (28) durch \mathbf{B} und erhalten:

$$\begin{aligned} m_{X,Y} &= \psi_X^T \cdot \mathbf{A} \cdot \psi_Y \\ \Rightarrow m_{X,Y} &= \psi_X^T \cdot \mathbf{T}^{1/2} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^{1/2} \cdot \psi_Y . \end{aligned} \tag{39}$$

Analog verfahren wir mit $\text{vol } X$, indem wir in der Definition (siehe Gleichung 15) den

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

charakteristischen Vektor als Indikator nutzen:

$$\begin{aligned} \text{vol } X &= \sum_{v \in X} d_v \\ &= \sum_{v \in V} \psi_X(v) \cdot d_v . \end{aligned}$$

Die Grade aller Knoten finden wir auf der Hauptdiagonalen der Diagonalmatrix \mathbf{T} (vgl. Gleichung 19). Damit kann diese Summe als Produkt von ψ_X und \mathbf{T} dargestellt werden:

$$\text{vol } X = \psi_X^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{1} . \quad (40)$$

Damit gilt natürlich für $\text{vol } Y$ entsprechend:

$$\text{vol } Y = \psi_Y^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{1} . \quad (41)$$

Die zu den Eigenwerten $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ gehörenden Eigenvektoren ϕ'_1, \dots, ϕ'_n können so gewählt werden, daß sie eine Orthonormalbasis bilden (vgl. z. B. Satz 11.3 in [FF73]). Hierbei sei $\phi'_1 = \mathbf{T}^{1/2} \cdot \mathbf{1} / \sqrt{\text{vol } V}$ (vgl. Gleichung 30). Wir können nun die Vektoren $\mathbf{T}^{1/2} \cdot \psi_X$ und $\mathbf{T}^{1/2} \cdot \psi_Y$ als Linearkombination der Eigenvektoren von \mathbf{B} darstellen. Es seien also

$$\mathbf{T}^{1/2} \cdot \psi_X = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \phi'_i \quad (42)$$

$$\Rightarrow \psi_X^T \cdot \mathbf{T}^{1/2} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \phi_i'^T \quad (43)$$

und

$$\mathbf{T}^{1/2} \cdot \psi_Y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \phi'_i . \quad (44)$$

Nun wenden wir diese Darstellung in der Gleichung 40 an und erhalten:

$$\begin{aligned} \text{vol } X &= \psi_X^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{1} \\ &= \psi_X^T \cdot \mathbf{T}^{1/2} \cdot \mathbf{T}^{1/2} \cdot \mathbf{1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \phi_i'^T \right) \cdot \phi'_1 \cdot \sqrt{\text{vol } V} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot (\phi'_i, \phi'_1) \cdot \sqrt{\text{vol } V} \end{aligned}$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

$$= x_1 \cdot \sqrt{\text{vol } V} . \quad (45)$$

Analog berechnen wir:

$$\text{vol } Y = y_1 \cdot \sqrt{\text{vol } V} . \quad (46)$$

Aus den Gleichungen 39, 45 und 46 bilden wir jetzt die linke Seite der Ungleichung des Theorems und ersetzen anschließend die vorhandenen Vektoren durch ihre Darstellung in der Basis entsprechend den Gleichungen 43 und 44:

$$\begin{aligned} \left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \text{vol } Y}{\text{vol } V} \right| &= \left| \psi_X^T \cdot \mathbf{T}^{1/2} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^{1/2} \cdot \psi_Y - x_1 y_1 \right| \\ &= \left| \left(\sum_{i=1}^n x_i \phi_i'^T \right) \cdot \mathbf{B} \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j \phi_j' \right) - x_1 y_1 \right| \\ &= \left| \left(\sum_{i=1}^n x_i \phi_i'^T \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j \cdot \mathbf{B} \cdot \phi_j' \right) - x_1 y_1 \right| . \end{aligned}$$

Die Definition des Eigenwertes (vgl. Gleichung 234 liefert uns $\mathbf{B} \cdot \phi_j' = \lambda_j' \cdot \phi_j'$). Dies führt zu:

$$\begin{aligned} \left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \text{vol } Y}{\text{vol } V} \right| &= \left| \left(\sum_{i=1}^n x_i \phi_i'^T \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j \cdot \lambda_j' \cdot \phi_j' \right) - x_1 y_1 \right| \\ &= \left| \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \cdot \lambda_j' \cdot \phi_i'^T \cdot \phi_j' \right) - x_1 y_1 \right| \\ &= \left| \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \cdot \lambda_j' \cdot (\phi_i', \phi_j') \right) - x_1 y_1 \right| . \end{aligned}$$

Die verwendeten Eigenvektoren bilden eine Orthonormalbasis. Für $i \neq j$ stehen die Eigenvektoren λ_i' und λ_j' senkrecht aufeinander, es gilt folglich $(\lambda_i', \lambda_j') = 0$. Für $i = j$ gilt natürlich $(\lambda_i', \lambda_j') = 1$. Es ist also

$$\left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \text{vol } Y}{\text{vol } V} \right| = \left| \sum_{i=2}^n x_i y_i \lambda_i' \right| .$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

Die Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (233) liefert nun:

$$\begin{aligned} \left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \text{ vol } Y}{\text{vol } V} \right| &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \lambda_i'^2} \\ \Rightarrow \left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \text{ vol } Y}{\text{vol } V} \right| &\leq \bar{\lambda}' \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2} . \end{aligned} \quad (47)$$

Wir betrachten nun die Summen auf der rechten Seite der Ungleichung etwas näher. Wir nutzen auch hier wieder aus, daß das Skalarprodukt zweier verschiedener Eigenvektoren null sowie der Betrag eines Eigenvektors gleich eins ist:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n x_i^2 &= \sum_{i=2}^n x_i^2 (\phi'_i, \phi'_i) \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n x_i x_j (\phi'_i, \phi'_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (\phi'_i, \phi'_j) - x_1 x_1 (\phi'_1, \phi'_1) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \phi_i'^T \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j \phi'_j \right) - x_1^2 . \end{aligned}$$

Die Summe dieser Linearkombinationen von Eigenvektoren ist durch die Gleichungen 42 und 43 bekannt. Dies führt zu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n x_i^2 &= \left(\psi_X^T \cdot \mathbf{T}^{1/2} \right) \cdot \left(\mathbf{T}^{1/2} \cdot \psi_X \right) - x_1^2 \\ &= \psi_X^T \cdot \mathbf{T} \cdot \psi_X - x_1^2 . \end{aligned}$$

Sowohl die Komponenten des charakteristischen Vektors ψ_X als auch die Komponenten der Matrix \mathbf{T} sind alle nichtnegativ. Ferner enthält ein charakteristischer Vektor nur die Komponenten 0 oder 1. Damit folgern wir sofort die Ungleichung

$$\psi_X^T \cdot \mathbf{T} \cdot \psi_X \leq \psi_X^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{1} .$$

Wenden wir nun noch die Gleichungen 40 und 45 an, so bedeutet dies für unsere Summe:

$$\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq \psi_X^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{1} - x_1^2$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

$$\begin{aligned}
 &= \text{vol } X - \frac{(\text{vol } X)^2}{\text{vol } V} \\
 &= \frac{\text{vol } V \text{vol } X - (\text{vol } X)^2}{\text{vol } V} \\
 &= \frac{\text{vol } X (\text{vol } V - \text{vol } X)}{\text{vol } V} \\
 &= \frac{\text{vol } X \text{vol } \bar{X}}{\text{vol } V} .
 \end{aligned} \tag{48}$$

Analog erhält man

$$\sum_{i=2}^n y_i^2 \leq \frac{\text{vol } Y \text{vol } \bar{Y}}{\text{vol } V} . \tag{49}$$

Den Abschluß des Beweises bildet die Kombination der Ungleichungen 47, 48 und 49. □

Die bisher gefundenen Sätze und Lemmata werden wir jetzt dazu benutzen, um ein einfaches hinreichendes Kriterium für die geringe Diskrepanz eines Graphen zu formulieren:

Theorem 2.16. *Es sei $G = (V, E, f)$ ein fast d -regulärer Multigraph mit der Adjazenzmatrix \mathbf{A} und $d \geq 1$. Wenn die Adjazenzmatrix \mathbf{A} Eigenwertseparierung zeigt, dann ist G von geringer Diskrepanz.*

Beweis. Wir beginnen mit der Betrachtung der geringen Diskrepanz des Graphen G . Diese ist über die geringe α -Diskrepanz für alle $\alpha = \alpha(n)$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ definiert. Mit $d \geq 1$ enthält der Graph mindestens $n/2$ viele Kanten, es gilt also $m \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Für $\alpha = o(1)$ bzw. $\alpha = 1 - o(1)$ ergibt sich nun aus den Definitionen 2.1 und 2.2 bzw. 2.6 und 2.5, daß der Graph von geringer α -Diskrepanz ist und damit sofort das Lemma gilt. Wir beschränken uns also im folgenden auf die n , für die zusätzlich $\alpha \neq o(1)$ und $\alpha \neq 1 - o(1)$ gilt. Wir können also eine Konstanten ε finden, so daß nun immer $0 < \varepsilon \leq \alpha \leq 1 - \varepsilon$ gilt. Daraus folgt aber sofort $o(1) = o(\alpha)$.

Bereits am Anfang des Abschnitts 2.1 (Diskrepanznotation für einfache Graphen) bzw. im darauf folgenden Abschnitt (vgl. Gleichung 8) haben wir gesehen, daß immer $m_X = m_{X,X}/2$ gilt. Offensichtlich sind die Definitionen 2.3 bzw. 2.6 der geringen Diskrepanz nun äquivalent zu folgender Aussage (vgl. auch Definitionen 2.2 und 2.5):

G ist genau dann von geringer Diskrepanz, wenn für alle $\alpha = \alpha(n)$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ sowie alle Teilmengen $X, Y \in V$ mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ und $Y = \bar{X} = V \setminus X$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

1. $|m_{X,X} - 2 \cdot \alpha^2 \cdot m \cdot (1 + o(1))| = o(m)$
2. $|m_{X,Y} - 2 \cdot \alpha(1 - \alpha) \cdot m \cdot (1 + o(1))| = o(m)$

gilt. Dies werden wir im folgenden verwenden, um die geringe Diskrepanz nachzuweisen.

Wenn die Adjazenzmatrix \mathbf{A} des fast d -regulären Graphen G Eigenwertseparierung hat, dann hat nach Lemma 2.14 auch die Matrix \mathbf{B} von G Eigenwertseparierung. Die Eigenwerte von \mathbf{B} seien $\lambda'_1 = 1 \geq \lambda'_2 \geq \dots \geq \lambda'_n$. Es existiert also ein gerades $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$ so das gilt:

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i'^k = o(\lambda_1'^k) .$$

Es sei wieder $\bar{\lambda}' = \max_{i=2}^n |\lambda_i'|$. Daraus folgt für gerade k :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}'^k &\leq \sum_{i=2}^n \lambda_i'^k \\ \Rightarrow \bar{\lambda}'^k &= o(\lambda_1'^k) \\ \Rightarrow \bar{\lambda}' &= o(1) . \end{aligned} \tag{50}$$

Im Graphen G gilt Satz 2.15. Für zwei beliebige Knotenmengen $X, Y \in V$ wissen wir:

$$\left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \cdot \text{vol } Y}{\text{vol } V} \right| \leq \bar{\lambda}' \cdot \frac{\sqrt{\text{vol } X \cdot \text{vol } \bar{X} \cdot \text{vol } Y \cdot \text{vol } \bar{Y}}}{\text{vol } V} .$$

Der Grad eines Knotens ist nichtnegativ. Damit kann die Summe der Grade einer beliebigen Knotenmenge $X \subseteq V$ nicht größer sein als die Summe aller Grade. Geht man von der Definition $\text{vol } X = \sum_{x \in X} d_x$, so findet man sofort

$$\text{vol } V = \text{vol } X + \text{vol } \bar{X} = \text{vol } Y + \text{vol } \bar{Y} = 2m .$$

Es sei nun $\text{vol } X = (1/2 + \delta) \cdot \text{vol } V$ mit $-1/2 \leq \delta \leq 1/2$ und somit $\text{vol } \bar{X} = (1/2 - \delta) \cdot \text{vol } V$. Daraus folgt sofort

$$\text{vol } X \cdot \text{vol } \bar{X} = (1/4 - \delta^2) \text{vol}^2 V \leq m^2 .$$

Analog sieht man ebenfalls

$$\text{vol } Y \cdot \text{vol } \bar{Y} \leq m^2 .$$

Hiermit vereinfachen wir die Ungleichung des Theorems 2.15 zu (vgl. auch Theorem 5.1

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

in [Chu97] für einfache Graphen):

$$\left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \cdot \text{vol } Y}{\text{vol } V} \right| \leq \bar{\lambda}' \cdot \frac{1}{2} \cdot m . \quad (51)$$

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir $\text{vol } X$ und $\text{vol } Y$ durch α und die Kantenanzahl m beschreiben. Es sei $|X| = (\alpha + o(1))n$:

$$\begin{aligned} \text{vol } X &= \sum_{x \in X} d_x \\ &= \sum_{x \in X} d \cdot (1 + o(1)) \\ &= (\alpha + o(1)) \cdot n \cdot d \cdot (1 + o(1)) \\ &= 2 \cdot \alpha m \cdot (1 + o(1)) + o(m) . \end{aligned} \quad (52)$$

Analog oder aus $\text{vol } X + \text{vol } Y = \text{vol } V$ erhalten wir für $|Y| = (1 - \alpha + o(1))n$:

$$\text{vol } Y = 2 \cdot (1 - \alpha)m \cdot (1 + o(1)) + o(m) . \quad (53)$$

Für die Summe aller Grade $\text{vol } V$ gilt natürlich:

$$\text{vol } V = 2m . \quad (54)$$

Nun wenden wir zuerst das Theorem 2.15 mit der modifizierten Ungleichung 51 und $Y = X$ an. Es gilt also für alle Knotenmengen $X \subseteq V$ mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ unter Beachtung der Gleichungen 52 , 53 und 54 sowie $\bar{\lambda}' = o(1)$ und $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned} &\left| m_{X,X} - \frac{\text{vol}^2 X}{\text{vol } V} \right| \leq \bar{\lambda}' \cdot \frac{1}{2} \cdot m \\ \Rightarrow &\left| m_{X,X} - \frac{(2\alpha m(1 + o(1)) + o(m))^2}{2m} \right| = o(1) \cdot \frac{1}{2} \cdot m \\ &\Rightarrow \left| m_{X,X} - 2\alpha^2 m(1 + o(1)) \right| = o(m) \\ &\Rightarrow \left| m_X - \alpha^2 m(1 + o(1)) \right| = o(m) . \end{aligned} \quad (55)$$

Analog verfahren wir nun nochmals für zwei Knotenmengen $X, Y \in V$ mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ und $Y = V \setminus X$:

$$\left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \text{vol } Y}{\text{vol } V} \right| \leq \bar{\lambda}' \cdot \frac{1}{2} \cdot m \quad (56)$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

$$\left| m_{X,Y} - \frac{4(\alpha(1-\alpha) + o(1))m^2(1+o(1)) + o(m^2)}{2m} \right| = o(1) \cdot \frac{1}{2} \cdot m$$

$$\left| m_{X,Y} - \frac{4(\alpha(1-\alpha) + o(1))m^2(1+o(1))}{2m} \right| = o(m)$$

$$|m_{X,Y} - 2\alpha(1-\alpha)m(1+o(1))| = o(m) . \quad (57)$$

Aus den Gleichungen 55 und 57 folgt nun sofort die geringe Diskrepanz von G . \square

Die Gleichungen 55 und 57 müssen noch für die algorithmische Verwendung aufbereitet werden. Es seien $g_1, g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es gelte $0 < g_1(n) \ll g_2(n) < 1$ sowie $g_2(n) = o(1)$ und somit auch $g_1(n) = o(1)$. Der Multigraph sei bezüglich der Funktion g_1 fast d -regulär. Es gilt also für alle Knoten $v \in V$:

$$(1 - g_1(n))d \leq d_v \leq (1 + g_1(n))d . \quad (58)$$

Der Multigraph hat weiter bezüglich g_2 Eigenwertseparierung der Matrix \mathbf{B} . Es gilt somit

$$\bar{\lambda}' \leq g_2(n) . \quad (59)$$

Zunächst untersuchen wir:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - g_1(n))^2}{1 + g_1(n)} &= \frac{1 + g_1(n) - 3g_1(n) + g_1^2(n)}{1 + g_1(n)} \\ &= 1 - \frac{3g_1(n)(1 - g_1(n))}{1 + g_1(n)} . \end{aligned}$$

Mit $0 < g_1(n) < 1$ folgt:

$$\frac{(1 - g_1(n))^2}{1 + g_1(n)} \geq 1 - 3g_1(n) .$$

Mit $g_1(n) < g_2(n)$ und $g_1(n) = o(g_2(n))$ gilt $g_2(n)/4 \geq 3g_1(n)$ für hinreichend große n . Daraus folgt sofort:

$$\frac{(1 - g_1(n))^2}{1 + g_1(n)} \geq 1 - \frac{g_2(n)}{4} . \quad (60)$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

Analog kann man zeigen, daß

$$\frac{(1 + g_1(n))^2}{1 - g_1 n} \leq 1 + \frac{g_2(n)}{4} \quad (61)$$

für hinreichend große n gilt.

Aus (58) folgt für $|X| = \alpha n$:

$$\alpha n d(1 - g_1(n)) \leq \text{vol } X \leq \alpha n d(1 + g_1(n)) .$$

Analoge Ungleichungen kann man für $\text{vol } Y$ und $\text{vol } V$ aufstellen. Dies führt zu

$$\alpha(1 - \alpha) \cdot n d \cdot \frac{(1 - g_1(n))^2}{1 + g_1(n)} \leq \frac{\text{vol } X \text{vol } Y}{\text{vol } V} \leq \frac{(1 + g_1(n))^2}{1 - g_1(n)} \cdot n d \cdot \alpha(1 - \alpha) .$$

Mit (60) und (61) folgert man hieraus:

$$\left(1 - \frac{g_2(n)}{4}\right) \cdot \alpha(1 - \alpha) \cdot n d \leq \frac{\text{vol } X \text{vol } Y}{\text{vol } V} \leq n d \cdot \alpha(1 - \alpha) \cdot \left(1 + \frac{g_2(n)}{4}\right) .$$

Somit unterscheiden sich $\text{Disk}_G(X, Y)$ und $\text{vol } X \text{vol } Y / \text{vol } V$ um nicht mehr als $(g_2/4 + g_2/4) \cdot n d = 2m \cdot g_2(n)/2$ (vgl. auch (11)). Somit gilt

$$\text{Disk}_G(X, Y) \leq \left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \text{vol } Y}{\text{vol } V} \right| + \frac{g_2(n)}{2} \cdot m .$$

Mit (59) und (56) folgert man weiter:

$$\left| m_{X,Y} - \frac{\text{vol } X \text{vol } Y}{\text{vol } V} \right| \leq \frac{g_2(n)}{2} \cdot m .$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt sofort

$$\text{Disk}_G(X, Y) \leq g_2(n) \cdot m . \quad (62)$$

Analog erhält man

$$\text{Disk}_G(X) \leq g_2(n) \cdot m . \quad (63)$$

2.4 Ein effizienter Test auf geringe Diskrepanz im Multigraphen

Um die geringe Diskrepanz eines Multigraphen nachzuweisen werden wir das Theorem 2.16 in einem Algorithmus anwenden. Dafür ist es aber zuerst notwendig, die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix eines gegebenen Graphen auf ihre Eigenwertseparierung zu untersuchen. Die Eigenwerte einer Matrix können über die Determinante berechnet werden. Es existieren ebenfalls effiziente Verfahren, die die Eigenwerte einer Matrix hinreichend genau bestimmen. Ausgehend von der Definition 2.13 der Eigenwertseparierung findet man auch leicht den Algorithmus 2.17 *Eigenwertseparierung*, der die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix eines ungerichteten, fast d -regulären Multigraphen erkennen kann.

Algorithmus 2.17 (Eigenwertseparierung($\mathbf{A}(G)$, $g_2()$, k)).

Eingabe: · \mathbf{A} - Adjazenzmatrix eines ungerichteten Multigraphen $G = (V, E, f)$
 mit $|V| = n$ oder $|V| = n^2$
 · $g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g_2(n) = o(1)$, $0 < g_2(n) < 1$
 · $k \in \mathbb{N}$

Ausgabe: \mathbf{A} hat Eigenwertseparierung / FAIL

1. $d_{\min} := \min_{i \in V} d(i)$
2. $g := g_2(n)$
3. FOR $i := 1$ TO $\lceil \log_2 k \rceil$ DO {
4. $d_{\min} := d_{\min}^2$
5. $g := g^2$
6. $\mathbf{A} := \mathbf{A}^2$
7. IF $\frac{\text{Spur } \mathbf{A}}{d_{\min}} - 1 \leq g$
8. THEN RETURN \mathbf{A} hat Eigenwertseparierung }
9. RETURN FAIL

Lemma 2.18. *Es sei $G = (V, E, f)$ ein ungerichteter Multigraph mit $|V| = n$ oder $|V| = n^2$. Für alle Knoten $v \in V$ gelte $d_v > 0$. Es sei weiter $g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion mit $0 < g_2(n) < 1$ und $g_2(n) = o(1)$ sowie eine*

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

Konstante k gegeben. Wendet man den Algorithmus 2.17 Eigenwertseparierung auf G an, dann gilt:

1. Wenn der Algorithmus das Ergebnis Eigenwertseparierung liefert, so ist dies korrekt für die Adjazenzmatrix \mathbf{A} bezüglich der Funktion $g_2(n) = o(1)$ sowie für eine Konstante k' mit $2 \leq k' \leq 2^{\lceil \log_2 k \rceil}$.
2. Für die Matrix \mathbf{B} gilt $\bar{\lambda}' \leq g_2(n)$, wenn der Algorithmus die Eigenwertseparierung festgestellt hat.
3. Wenn der Multigraph G bezüglich einer Funktion $g_1(n)$ mit $0 < g_1(n) \ll g_2(n)$, also $g_1(n) = o(g_2(n))$, fast d -regulär ist, also $|d_v - d|/d \leq g_1(n)$ für alle Knoten gilt und, wenn G Eigenwertseparierung bezüglich einer Konstanten k sowie der Funktion $g_2(n)/2$ aufweist, so findet der Algorithmus die Eigenwertseparierung bezüglich $g_2(n)$ und einer Konstanten k' mit $2 \leq k' \leq 2^{\lceil \log_2 k \rceil}$ für hinreichend große n .
4. Der Algorithmus hat polynomielle Laufzeit.

Beweis. 1. Offensichtlich erkennt der Algorithmus für eine Konstante $k' = 2^i$ mit $1 \leq i \leq \lceil \log_2 k \rceil$, ob in dem Graph G die Ungleichung

$$\frac{\text{Spur } \mathbf{A}^{k'}}{d_{\min}^{k'}} - 1 \leq g_2^{k'}(n) \quad (64)$$

erfüllt ist. Es bezeichne hierbei $d_{\min} = \min_{v \in V} d_v$ den kleinsten Grad eines Knotens. Dieser kann in Polynomialzeit bestimmt werden (vgl. Algorithmus 2.8 *Fast_Regulär_G* bzw. Lemma 2.9). Nach Lemma 2.10 liegt der größte Eigenwert λ_1 der Adjazenzmatrix \mathbf{A} zwischen dem größten und dem kleinsten Grad. Es gilt also $\lambda_1 \geq d_{\min}$ bzw. $\lambda_1^{k'} \geq d_{\min}^{k'}$. Damit folgern wir aber für die Ungleichung 64:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Spur } \mathbf{A}^{k'}}{\lambda_1^{k'}} - 1 &\leq g_2^{k'}(n) \\ \frac{\text{Spur } \mathbf{A}^{k'} - \lambda_1^{k'}}{\lambda_1^{k'}} &\leq g_2^{k'}(n) \\ \Rightarrow \sum_{i=2}^n \lambda_i^{k'}(n) &\leq \lambda_1^{k'} \cdot g_2^{k'}(n) = o(\lambda_1^{k'}) . \end{aligned} \quad (65)$$

Aus der Ungleichung 65 folgt die korrekt festgestellte Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix \mathbf{A} .

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

Der Algorithmus untersucht die Eigenwertseparierung nur bezüglich der Potenzen von zwei. Es genügt hier zu zeigen, daß für ein $k < k'$ mit $\text{Spur } \mathbf{A}^k / d_{\min}^k \leq g_2^k(n)$ der Algorithmus ebenfalls die Antwort Eigenwertseparierung bei der Betrachtung von k' liefert. Dies geschieht nur, wenn ebenfalls die Ungleichung 64 erfüllt ist. Wir erhalten in diesem Fall:

$$\frac{\text{Spur } \mathbf{A}^k}{d_{\min}^k} - 1 \leq g_2^k(n) .$$

Mit $d_{\min}^k \leq \lambda_1^k$ folgern wir:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=2}^k \lambda_i^k}{d_{\min}^k} &\leq g_2^k(n) \\ \Rightarrow \left(\frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i^k}{d_{\min}^k} \right)^{k'/k} &\leq \left(g_2^k(n) \right)^{k'/k} . \end{aligned}$$

Mit $(a + b)^k \geq a^k + b^k$ für $a, b, k > 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=2}^n \left(\lambda_i^k \right)^{k'/k}}{\left(d_{\min}^k \right)^{k'/k}} &\leq g_2^{k'}(n) \\ \frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i^{k'}}{d_{\min}^{k'}} &\leq g_2^{k'}(n) . \end{aligned}$$

2. Nun müssen noch die Eigenwerte der Matrix \mathbf{B} untersucht werden. Für jeden Knoten $v \in V$ gilt $d_v > 0$. Damit erhalten wir wieder $\mathbf{B}(i, j) = \mathbf{A}(i, j) / \sqrt{d_i d_j}$, es gilt also $\mathbf{B}(i, j) \leq \mathbf{A}(i, j) / d_{\min}$. Ausgehend von den Lemmata 2.11 und 2.12 finden wir analog zum Beweis von Lemma 2.14 die Ungleichung:

$$\text{Spur } \mathbf{A}^{k'} \geq d_{\min}^{k'} \cdot \text{Spur } \mathbf{B}^{k'} . \quad (66)$$

Nun formen wir die Ungleichung 64 so um, so daß wir die linke Seite der Ungleichung 66 ersetzen können:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Spur } \mathbf{A}^{k'}}{d_{\min}^{k'}} - 1 &\leq g_2^{k'}(n) \\ \frac{\text{Spur } \mathbf{A}^{k'}}{d_{\min}^{k'}} &\leq g_2^{k'}(n) + 1 \\ \text{Spur } \mathbf{A}^{k'} &\leq \left(g_2^{k'}(n) + 1 \right) \cdot d_{\min}^{k'} \end{aligned}$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_{\min}^{k'} \cdot \text{Spur } \mathbf{B}^{k'} &\leq (g_2^{k'}(n) + 1) \cdot d_{\min}^{k'} \\ \text{Spur } \mathbf{B}^{k'} &\leq g_2^{k'}(n) + 1 . \end{aligned}$$

Der größte Eigenwert von \mathbf{B} ist $\lambda_1' = 1$ (vgl. Gleichung 29). Daraus folgt sofort (für ein gerades k') die geforderte Eigenwertseparierung von \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i'^{k'} &\leq g_2^{k'}(n) + 1 \\ \Rightarrow \max_{i \geq 2} \lambda_i'^{k'} &\leq g_2^{k'}(n) \\ \Rightarrow \overline{\lambda'} &\leq g_2(n) . \end{aligned}$$

3. Im dritten Punkt des Beweises ist zu zeigen, daß bei vorliegender Eigenwertseparierung bezüglich der Funktion $g_2(n)/2$ die Ungleichung 64 erfüllt ist und somit der Algorithmus Eigenwertseparierung bezüglich $g_2(n)$ liefert. Wir haben bereits gesehen, daß aus der Eigenwertseparierung bezüglich einer Konstanten k auch die Eigenwertseparierung für eine (gerade) Konstante $k' > k$ folgt. Im Graph muß also

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \lambda_i^k &\leq \lambda_1^k \cdot g_2^k(n)/2^k \\ \Rightarrow \sum_{i=2}^n \lambda_i^{k'} &\leq \lambda_1^{k'} \cdot g_2^{k'}(n)/2^{k'} \end{aligned}$$

gelten. Wir zeigen nun, daß hieraus die Ungleichung 64 folgt:

$$\begin{aligned} \text{Spur } A^{k'} - \lambda_1^{k'} &\leq \lambda_1^{k'} \cdot g_2^{k'}(n)/2^{k'} \\ \text{Spur } A^{k'} &\leq \lambda_1^{k'} \cdot g_2^{k'}(n)/2^{k'} + \lambda_1^{k'} \\ \text{Spur } A^{k'} - d_{\min}^{k'} &\leq \lambda_1^{k'} \cdot g_2^{k'}(n)/2^{k'} + \lambda_1^{k'} - d_{\min}^{k'} \\ \frac{\text{Spur } A^{k'}}{d_{\min}^{k'}} - 1 &\leq \frac{\lambda_1^{k'}}{d_{\min}^{k'}} \cdot g_2^{k'}(n)/2^{k'} + \frac{\lambda_1^{k'}}{d_{\min}^{k'}} - 1 . \end{aligned}$$

Aus der Fast- d -Regularität folgt $\lambda_1 \leq (1 + g_1(n))d$ und $d_{\min} \geq (1 - g_1(n))d$. Dies führt zu:

$$\frac{\text{Spur } A^{k'}}{d_{\min}^{k'}} - 1 \leq \left(\frac{1 + g_1(n)}{1 - g_1(n)} \right)^{k'} \cdot g_2^{k'}(n)/2^{k'} + \left(\frac{1 + g_1(n)}{1 - g_1(n)} \right)^{k'} - 1 .$$

2 Graphen, Multigraphen und Eigenwerttechniken

Es ist $g_1(n) = o(g_2(n))$. Damit gilt für hinreichend große n (vgl. auch Ungleichung 60):

$$\frac{\text{Spur } A^{k'}}{d_{\min}^{k'}} - 1 \leq g_2^{k'}(n) .$$

4. Bei der Untersuchung der Laufzeit sehen wir, daß auf Grund der Konstanten k die Anzahl der Schleifendurchläufe (Zeilen 3 bis 8) durch eine Konstante beschränkt ist. In den Zeilen 4 und 5 haben wir jeweils eine Multiplikation. Die Quadrierung einer $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} benötigt bei einer einfachen Implementierung $O(n^3)$ viele Operationen. Dies kann durch die Verwendung des Verfahrens nach Strassen auf $O(n^{2.808})$ verbessert werden (vgl. z. B. [Str69] und [CR76]). Das Verfahren von Coppersmith und Winograd liefert sogar $O(n^{2.37})$ (vgl. [CW90]). Die Berechnung der Spur in Zeile 7 kann in $O(|V|)$ durchgeführt werden. Die Anzahl der Operationen des Algorithmus ist somit durch $O(|V|^3)$ beschränkt. □

Der Algorithmus 2.17 *Eigenwertseparierung* kann leicht geändert werden, so daß er die Eigenwertseparierung bezüglich k bestimmt indem d^k , \mathbf{A}^k , usw. berechnet und verwendet werden. Für die folgende Anwendung der Eigenwertseparierung ist es unerheblich, ob diese für die Konstante k oder für die Konstante $2^{\lceil \log_2 k \rceil}$ vorliegt. Diese mögliche Änderung würde nur die Anzahl der notwendigen Matrizenmultiplikationen erhöhen, wenn k keine Zweierpotenz ist.

Der Nachweis der Eigenwertseparierung dient letztendlich dem Nachweis der geringen Diskrepanz eines Graphen. Anstelle der Adjazenzmatrix \mathbf{A} kann auch die Matrix \mathbf{B} verwendet werden. Dies bietet den Vorteil, daß der Graph nicht fast d -regulär sein muß. Nachteilig wirkt sich hier jedoch aus, daß ausschließlich Gleitkommazahlen Anwendung finden. Die dabei auftretenden Rundungsfehler in herkömmlichen Computersystemen, insbesondere bei der Matrizenmultiplikation, sind hier besonders zu beachten. Die verwendete Adjazenzmatrix ermöglicht ein exaktes Rechnen mit ganzzahligen Werten. Erst beim Vergleich mit $g_2^k(n)$ ist eine Gleitkommaarithmetik nötig.

Der Nachweis der geringen Diskrepanz für einfache fast d -reguläre Multigraphen konnte im Theorem 2.16 auf die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix zurückgeführt werden. Dies führt uns zum Algorithmus 2.19 *Geringe_Diskrepanz_G*.

Lemma 2.20. *Es sei $G = (V, E, f)$ mit $|V| = n$ oder $|V| = n^2$ ein einfacher und ungerichteter Multigraph, k eine Konstante sowie $g_1, g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ in polynomieller Zeit berechenbare Funktionen mit $0 < g_1(n) \ll g_2(n) < 1$, $g_1 = o(g_2(n))$ und $g_2(n) = o(1)$.*

Algorithmus 2.19 (Geringe_Diskrepanz_G($\mathbf{A}(G)$, $g_1()$, $g_2()$, k)).

Eingabe: · \mathbf{A} - Adjazenzmatrix eines ungerichteten
 Multigraphen $G = (V, E, f)$ mit $|V| = n$ oder $|V| = n^2$
 · $g_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g_1(n) = o(g_2(n))$, $0 < g_1(n) \ll g_2(n)$
 · $g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g_2(n) = o(1)$, $0 < g_2(n) < 1$
 · $k \in \mathbb{N}$

Ausgabe: G ist von geringer Diskrepanz / FAIL

1. IF NOT Fast_Regulär_G(\mathbf{A} , $g_1()$) THEN RETURN FAIL
 // Algorithmus 2.8
 // gleichzeitig Berechnung von d
2. IF NOT Eigenwertseparierung(\mathbf{A} , $g_2()$, k)
 // Algorithmus 2.17
3. THEN RETURN FAIL
4. RETURN G ist von geringer Diskrepanz

Auf G wird der Algorithmus 2.19 Geringe_Diskrepanz_G ausgeführt. Nun gilt:

1. Gibt der Algorithmus geringe Diskrepanz aus, so ist dies für G korrekt bezüglich der Funktion $g_2(n)$.
2. Wenn ein d existiert, so daß G bezüglich $g_1(n)$ fast d -regulär ist und wenn G bezüglich $g_2(n)/2$ Eigenwertseparierung aufweist, dann erkennt der Algorithmus die geringe Diskrepanz bezüglich $g_2(n)$.
3. Der Algorithmus hat polynomielle Laufzeit.

Beweis. Die Korrektheit des Algorithmus sowie die polynomielle Laufzeit folgen sofort aus dem Satz 2.16, den Ungleichungen 62 und 63 sowie den Lemmata 2.9 und 2.18. \square

Diese Art von Algorithmus kann nicht jeden Multigraphen exakt auf geringe Diskrepanz überprüfen. Es kann durchaus Graphen geben, für die die geringe Diskrepanz nicht gefunden wird. In diesem Fall bestätigt der Algorithmus das Fehlschlagen des Tests. Wendet man den Algorithmus hauptsächlich auf fast reguläre Graphen mit Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix an, so kann man effizient die geringe Diskrepanz zertifizieren.

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

3.1 Die Konzentrierung des Grades im zufälligen Graphen

Es sei $\mathcal{G}_{n,p}$ die Familie zufälliger Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ Knoten und der Kantenwahrscheinlichkeit $p = p(n)$. Die Kanten werden unabhängig voneinander gezogen. Die Anzahl Kanten $|E| = m$ eines solchen Graphen ist binomialverteilt. Wir betrachten nun Graphen aus $\mathcal{G}_{n,p}$ mit $p = c \cdot n^\varepsilon/n \cdot (1 + o(1))$. Dabei seien c und ε positive Konstanten. Die o -Notation bedeutet hier aber nicht, daß alle Kanten verschiedene Kantenwahrscheinlichkeiten haben sollen sondern daß die Kantenwahrscheinlichkeit p für alle Kanten gleich ist und $p \sim c \cdot n^\varepsilon/n$ beträgt. Für diese Graphen sieht man schnell, daß sie fast alle fast d -regulär sind bzw. eine geringe α -Diskrepanz aufweisen:

Lemma 3.1. *Es sei $0 < \varepsilon \leq 1$ eine Konstante. Fast alle Graphen $G = (V, E)$ aus $\mathcal{G}_{n,p=c(1+o(1))n^\varepsilon/n}$ sind fast cn^ε -regulär.*

Beweis. Ein Knoten v kann zu den restlichen $n - 1$ Knoten des Graphen benachbart sein. Jeder dieser Knoten ist mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p = c(1 + o(1))n^\varepsilon/n$ ein Nachbar von v . Damit ist der Grad d_v dieses Knotens $(n - 1, c(1 + o(1))n^\varepsilon/n)$ -binomialverteilt. Der Erwartungswert des Grades d_v beträgt also $E[d_v] = (n - 1)c(1 + o(1)) \cdot n^\varepsilon/n = cn^\varepsilon(1 + o(1))$. Dieser Erwartungswert ist scharf konzentriert. Mittels der Chernoff-Schranken (Ungleichung 223) erhalten wir für einen Knoten v und alle $\delta \geq 0$:

$$\text{Prob}[|d_v - E[d_v]| \geq \delta E[d_v]] \leq 2e^{-\delta^2 E[d_v]/3} .$$

Nun kann die Wahrscheinlichkeit dafür betrachtet werden, daß es mindestens einen Knoten gibt, dessen Grad stark vom Erwartungswert abweicht. Für den Beweis des Lemmas genügt es zu zeigen, daß diese Wahrscheinlichkeit $o(1)$ beträgt. Es sei \mathcal{A} das Ereignis, daß mindestens ein Knoten v einen Grad d_v hat, so daß für diesen Knoten $|d_v - E[d_v]| \geq \delta \cdot E[d_v]$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis kann nun mittels der Chernoff-Schranken wie folgt abgeschätzt werden:

$$\text{Prob}[\mathcal{A}] = \text{Prob}\left[\bigcup_{v \in V} |d_v - E[d_v]| \geq \delta E[d_v]\right]$$

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{Prob}[\mathcal{A}] &\leq \sum_{v \in V} \text{Prob}[|d_v - \mathbb{E}[d_v]| \leq \delta \mathbb{E}[d_v]] \\
&\leq n \cdot 2e^{-\delta^2 \mathbb{E}[d_v]/3} \\
&\leq 2 \cdot e^{\ln n - \delta^2 cn^\varepsilon(1+o(1))/3} \\
&\leq 2 \cdot e^{\ln n \left(1 - \frac{\delta^2}{3 \ln n} cn^\varepsilon(1+o(1))\right)}. \tag{67}
\end{aligned}$$

Für ein geeignet gewähltes $\delta = \delta(n)$, z. B. $\delta = 1/\ln^k n$ mit $k > 0$ oder $\delta = n^{-\varepsilon/4}$ gilt $\delta^2 n^\varepsilon / \ln n \rightarrow \infty$ für hinreichend große n . Daraus folgt $\ln n \left(1 - \frac{\delta^2}{3 \ln n} cn^\varepsilon(1+o(1))\right) \rightarrow -\infty$. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit für die starke Abweichung des Grades von mindestens einem Knoten $\text{Prob}[\mathcal{A}] = o(1)$. \square

Es sind also fast alle zufälligen Graphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim cn^\varepsilon/n$ fast d -regulär. Dies kann effizient durch den Algorithmus 2.8 *Fast_Regulär_G* geprüft werden (vgl. Lemma 2.9).

3.2 Geringe Diskrepanz zufälliger Graphen

Es ist nicht nur der Grad der Knoten der Graphen aus $\mathcal{G}_{n,c(1+o(1))n^\varepsilon/n}$ scharf konzentriert. Wenn alle Knoten eines Graphen in etwa den gleichen Grad haben, so ist dieser Graph relativ gleichmäßig aufgebaut. Wählt man zufällig eine Knotenmenge X , so sollte diese immer die gleiche Anzahl an Kanten enthalten. Diese Vorbetrachtung führt uns dazu, daß diese Zufallsgraphen eine geringe Diskrepanz haben müssen:

Lemma 3.2. *Fast alle Graphen $G = (V, E)$ aus $\mathcal{G}_{n,p}$ mit $p = cn^\varepsilon/n \cdot (1 + o(1))$, $n = |V|$ und $m = |E|$ haben eine geringe Diskrepanz.*

Beweis. Im Beweis muß gezeigt werden, daß fast alle Graphen $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ für jedes $\alpha = \alpha(n)$ eine geringe α -Diskrepanz haben. Wir werden als erstes zeigen, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit $m \sim cn^{1+\varepsilon}/2$ und damit $m \rightarrow \infty$ gilt. Für $\alpha = o(1)$ bzw. $\alpha = 1 - o(1)$ und $m \rightarrow \infty$ ergibt sich $\text{Disk}_G(X) = o(m)$ und $\text{Disk}_G(X, Y) = o(m)$. Es liegt somit in diesen Fällen geringe Diskrepanz vor. Wir betrachten also im folgenden nur noch die n , für die $\alpha(n) \neq o(1)$ und $\alpha(n) \neq 1 - o(1)$ für α gilt. Es gibt also eine Konstante $\varepsilon' > 0$ mit $\varepsilon' \leq \alpha(n) \leq 1 - \varepsilon'$.

Für den Beweis dieses Lemmas werden ebenfalls wieder die Chernoff-Schranken genutzt. Zunächst zeigen wir, daß die Anzahl der Kanten im Graphen scharf konzentriert ist. Damit haben wir die Anzahl der Kanten im Graphen für die Definition der geringen α -Diskrepanz fixiert. Graphen mit einer anderen Kantenanzahl brauchen wir

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

nicht mehr zu betrachten, da deren Auftreten unwahrscheinlich ist. Ein Graph entspricht nicht der Definition der geringen α -Diskrepanz, wenn es eine Knotenmenge $X \subseteq V$ mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ gibt, so daß die Anzahl der Kanten in dieser Menge bzw. die Anzahl Kanten in dem durch X generierten Schnitt zu stark vom Erwartungswert abweichen. Es genügt also zusätzlich zu zeigen, daß sowohl die Wahrscheinlichkeit für eine Menge X mit unzulässiger Kantenzahl als auch die Wahrscheinlichkeit für eine Menge X mit unzulässigem Schnitt gegen 0 gehen. Es sei also $X \subseteq V$ eine beliebige Knotenmenge des Graphen mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ Knoten. Die Komplementmenge $Y = V \setminus X$ enthält also $|Y| = (1 - \alpha - o(1))n$ Knoten. Bezugnehmend auf die Definitionen 2.1 und 2.2 ist m_X die Anzahl der Kanten in X sowie $m_{X,Y}$ die Anzahl der geordneten Paare zwischen X und Y (also die doppelte Schnittgröße). Es sei $m'_{X,Y} = m_{X,Y}/2$ die Anzahl der Kanten im Schnitt. Alle Kanten werden unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $p = c(1 + o(1))n^\varepsilon/n$ gezogen. Die Anzahl Kanten m_X in X ist also $\left(\binom{(\alpha+o(1))n}{2}, c(1 + o(1))n^\varepsilon/n\right)$ -binomialverteilt. Die Anzahl der Kanten $m'_{X,Y}$ im Schnitt ist $\left((\alpha(1 - \alpha) + o(1))n^2, c(1 + o(1))n^\varepsilon, n\right)$ -binomialverteilt. Die Anzahl aller Kanten m in G ist $\left(\binom{n}{2}, c(1 + o(1))n^\varepsilon/n\right)$ -binomialverteilt.

1. Die erwartete Anzahl aller Kanten beträgt $E[m] = \binom{n}{2} \cdot c(1 + o(1))n^\varepsilon/n = n^{1+\varepsilon}(1 + o(1))/2$. Die Chernoff-Schranken (Ungleichung 223) ergeben eine scharfe Konzentration der Anzahl der Kanten. Für alle $1 > \delta > 0$ gilt:

$$\text{Prob}[|m - E[m]| \geq \delta \cdot E[m]] \leq 2e^{-\delta^2 \cdot E[m]/3} = 2e^{-\delta^2 \cdot n^{1+\varepsilon}(1+o(1))/6} = o(1).$$

Damit beträgt die Anzahl Kanten in fast allen Graphen $m = cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1))/2$.

2. Der Erwartungswert für die Kanten in X beträgt $E[m_X] = \binom{(\alpha+o(1))n}{2} \cdot c \cdot (1 + o(1)) \cdot n^\varepsilon/n = \alpha^2 c \cdot n^{1+\varepsilon}(1 + o(1))/2 = \alpha^2 \cdot E[m] \cdot (1 + o(1))$. Die Anwendung der Chernoff-Schranken ergibt hier für alle $1 > \delta > 0$:

$$\text{Prob}[|m_X - E[m_X]| \geq \delta \cdot E[m_X]] \leq 2e^{-\delta^2 \cdot E[m_X]/3}.$$

Es gibt insgesamt $\binom{n}{(\alpha+o(1))n} \leq 2^n$ verschiedene Teilmengen $X \subseteq V$ mit $|X| = (\alpha + o(1))n$. Es sei \mathcal{A} das Ereignis, daß mindestens eine solche Teilmenge X in ihrer Kantenzahl sehr stark vom Erwartungswert abweicht, also $|m_X - E[m_X]| \geq$

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

$\delta \cdot \mathbb{E}[m_X]$ gilt. Für ein geeignetes $\delta = \delta(n)$ berechnet sich $\text{Prob}[\mathcal{A}]$ aus:

$$\begin{aligned}
\text{Prob}[\mathcal{A}] &= \text{Prob} \left[\bigcup_{\substack{X \subseteq V \\ |X| = (\alpha + o(1))n}} |m_X - \mathbb{E}[m_X]| \geq \delta \cdot \mathbb{E}[m_X] \right] \\
\Rightarrow \text{Prob}[\mathcal{A}] &\leq \sum_{\substack{X \subseteq V \\ |X| = (\alpha + o(1))n}} \text{Prob}[|m_X - \mathbb{E}[m_X]| \geq \delta \cdot \mathbb{E}[m_X]] \\
&\leq 2^n \cdot 2 \cdot e^{-\delta^2 \cdot \mathbb{E}[m_X]/3} \\
&= 2 \cdot e^{n \ln 2 - \delta^2 \cdot \mathbb{E}[m_X]/3} \\
&= 2 \cdot e^{n \ln 2 - \delta^2 \cdot \mathbb{E}[m_X]/3} \\
&= 2 \cdot e^{n \ln 2 - \delta^2 \alpha^2 c(1+o(1))n^{1+\varepsilon}(1+o(1))/6} \\
&= 2 \cdot e^{n(\ln 2 - \delta^2 \alpha^2 n^\varepsilon(1+o(1))/6)} \\
&= o(1) .
\end{aligned} \tag{68}$$

Für eine geeignete Funktion $\delta = \delta(n)$, z. B. $\delta = 1/\ln n$ oder $\delta = n^{-\varepsilon/4}$ und $\varepsilon' \leq \alpha \leq 1 - \varepsilon'$ gilt auch hier $\delta^2 \alpha^2 n^\varepsilon \rightarrow \infty$ und damit $n(\ln 2 - \delta^2 \alpha^2 c n^\varepsilon(1+o(1))/6) \rightarrow -\infty$ für hinreichend große n . Es ist damit $\text{Prob}[\mathcal{A}] = o(1)$. Alle Knotenmengen X fast aller Graphen G enthalten $m_X = \mathbb{E}[m_X](1+o(1)) = \alpha^2 \mathbb{E}[m](1+o(1))$ Kanten. Für fast alle Graphen gilt aber auch $m = \mathbb{E}[m](1+o(1))$ für die Kantenanzahl. Somit gilt in allen diesen Mengen $m_X = \alpha^2 m(1+o(1))$ für fast alle Graphen.

- Die obigen Betrachtungen wenden wir nun analog auf den Schnitt zwischen X und $Y = V \setminus X$ an. Die erwartete Anzahl an Kanten beträgt hier $\mathbb{E}[m'_{X,Y}] = \alpha(1-\alpha)n^2/2c(1+o(1))n^\varepsilon/n = \alpha(1-\alpha)\mathbb{E}[m](1+o(1))$. Die Anwendung der Chernoff-Schranken ergibt hier für alle $1 > \delta > 0$:

$$\text{Prob} \left[\left| m'_{X,Y} - \mathbb{E}[m'_{X,Y}] \right| \geq \delta \cdot \mathbb{E}[m'_{X,Y}] \right] \leq 2 \cdot e^{-\delta^2 \cdot \mathbb{E}[m'_{X,Y}]/3}.$$

Es gibt insgesamt wieder maximal 2^n verschiedene Teilmengen $X \subseteq V$ mit $|X| = (\alpha + o(1))n$. Es sei \mathcal{A} nun das Ereignis, daß mindestens ein Schnitt in seiner Größe sehr stark vom Erwartungswert abweicht, also für die Mengen X und Y mit $Y = V \setminus X$ gilt: $\left| m'_{X,Y} - \mathbb{E}[m'_{X,Y}] \right| \geq \delta \cdot \mathbb{E}[m'_{X,Y}]$. Die Wahrscheinlichkeit

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

hierfür berechnet sich aus:

$$\begin{aligned}
\text{Prob}[\mathcal{A}] &= \text{Prob} \left[\bigcup_{\substack{X \subseteq V \\ |X| = (\alpha + o(1))n \\ Y = V \setminus X}} \left| m'_{X,Y} - \mathbb{E} \left[m'_{X,Y} \right] \right| \geq \delta \cdot \mathbb{E} \left[m'_{X,Y} \right] \right] \\
\Rightarrow \text{Prob}[\mathcal{A}] &\leq \sum_{\substack{X \subseteq V \\ |X| = (\alpha + o(1))n \\ Y = V \setminus X}} \text{Prob} \left[\left| m'_{X,Y} - \mathbb{E} \left[m'_{X,Y} \right] \right| \geq \delta \cdot \mathbb{E} \left[m'_{X,Y} \right] \right] \\
&\leq 2^n \cdot 2 \cdot e^{-\delta^2 \cdot \mathbb{E} \left[m'_{X,Y} \right] / 3} \\
&= 2 \cdot e^{n \ln 2 - \delta^2 \cdot \mathbb{E} \left[m'_{X,Y} \right] / 3} \\
&= 2 \cdot e^{n \ln 2 - \delta^2 \cdot \mathbb{E} \left[m'_{X,Y} \right] / 3} \\
&= 2 \cdot e^{n \ln 2 - \delta^2 \alpha^2 c n^{1+\varepsilon} (1+o(1)) / 6} \\
&= 2 \cdot e^{n (\ln 2 - \delta^2 \alpha^2 c n^\varepsilon (1+o(1)) / 6)} \\
&= o(1) .
\end{aligned} \tag{69}$$

Auch hier gilt wieder für eine geeignete Funktion $\delta = \delta(n)$, z. B. $\delta(n) = 1/\ln n$ oder $\delta = n^{-\varepsilon/4}$, $\delta^2 n^\varepsilon \rightarrow \infty$ und damit $n (\ln 2 - \delta^2 \alpha^2 c n^\varepsilon (1+o(1)) / 6) \rightarrow -\infty$ und es ist $\text{Prob}[\mathcal{A}] = o(1)$. Alle durch X generierten Schnitte fast aller Graphen G enthalten also $m'_{X,Y} = \mathbb{E} \left[m'_{X,Y} \right] (1 + o(1)) = \alpha(1 - \alpha) \mathbb{E} [m] (1 + o(1))$ Kanten. Für fast alle Graphen gilt aber auch $m = \mathbb{E} [m] (1 + o(1))$ für die Kantenanzahl. Die Anzahl der Paare im Schnitt beträgt genau $m_{X,Y} = 2 \cdot m'_{X,Y}$. Somit gilt in all diesen Schnitten $m_{X,Y} = \alpha^2 m (1 + o(1))$ für fast alle Graphen. \square

Bei den betrachteten Zufallsgraphen liegt mit hoher Wahrscheinlichkeit die Konzentrierung des Grades und geringe Diskrepanz vor. Damit der effiziente Test auf geringe Diskrepanz (Algorithmus 2.19) *Geringe_Diskrepanz_G* fast immer erfolgreich ist, muß ebenfalls nachgewiesen werden, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix vorliegt. Dieser Nachweis kann über die Spurmethode geführt werden (vgl. z. B. die folgende Analyse der Eigenwertseparierung in Theorem 5.11 oder [FK81, Fri91]).

3.3 Kantentypen

Die im vorigen Abschnitt eingeführte geringe Diskrepanz werden wir jetzt auf spezielle Hypergraphen ausdehnen. Der Hintergrund für diese Erweiterung ist wieder technischer

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

Natur. Aus aussagenlogischen Formeln bzw. r -uniformen Hypergraphen können neue Graphen bzw. Hypergraphen gebildet werden. Weisen diese neuen Graphen eine geringe α -Diskrepanz auf, so können wir später daraus Rückschlüsse über die ursprüngliche Formel bzw. den ursprünglichen Hypergraphen ziehen.

Im weiteren werden hauptsächlich gerichtete 3-uniforme Hypergraphen $H = (V, E)$ betrachtet. Die Anzahl der Knoten in einem solchen Graphen sei $|V| = n$. Im Unterschied zur herkömmlichen Definition von (ungerichteten) uniformen Hypergraphen sei nun eine Kante $e \in E$ nicht eine Menge von drei Knoten sondern ein geordnetes Tripel. Es ist also $e = (x, y, z) \in V \times V \times V$ bzw. $e \in V^r$ bei gerichteten r -uniformen Hypergraphen. Ein Knoten darf durchaus mehrfach in einer Kante vorkommen. Diese Definition ist somit eine Erweiterung des Begriffs der gerichteten Graphen auf (r -uniforme) Hypergraphen. Die Anzahl der Kanten in H sei $m = |E| = |H|$. Ferner bezeichne e_i das i -te Element der Kante e . Es ist z. B. $(x, y, z)_2 = y$. Desweiteren sei $e \setminus i$ das $(k - 1)$ -Tupel, welches aus dem k -Tupel e entsteht, wenn das i -te Element entfernt wird. Betrachten wir wieder das Beispiel $e = (x, y, z)$, so ist $e \setminus 2 = (x, z)$.

Definition 3.3 (Kantentyp). *Es sei $H = (V, E)$ ein gerichteter/ungerichteter 3-uniformer Hypergraph. Es seien ferner $X, Y, Z \subseteq V$. Eine Kante $e = (x, y, z)$ bzw. $e = \{x, y, z\}$ ist vom Typ (X, Y, Z) , wenn $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$ gilt.*

Man beachte, daß die Typen (X, Y, Z) und (Z, Y, X) im Falle von gerichteten Hypergraphen verschieden, im Falle von ungerichteten Hypergraphen jedoch gleich sind. Es bezeichne $m_{X,Y,Z}$ die Anzahl aller Kanten vom Typ (X, Y, Z) . In gerichteten Hypergraphen berechnet sich diese Anzahl aus

$$m_{X,Y,Z} = |E \cap (X \times Y \times Z)| .$$

3.4 Die geringe Diskrepanz von zufälligen Hypergraphen

In gerichteten 3-uniformen (bzw. in gerichteten r -uniformen) Hypergraphen gibt es n^3 (bzw. n^r) viele mögliche Kanten. Hieraus ergibt sich analog die Definition der Kantendichte $\rho = m/n^3$ (bzw. $\rho = m/n^r$). Diese Kantendichte stellt eine Wahrscheinlichkeit dar. Nun wählen wir zu drei vorgegebenen Knotenzahlen $|X|$, $|Y|$ und $|Z|$ uniform die drei Knotenmengen X , Y und Z . Die Wahrscheinlichkeit für eine konkrete Auswahl beträgt also $\left(\binom{n}{|X|} \cdot \binom{n}{|Y|} \cdot \binom{n}{|Z|} \right)^{-1}$. Die erwartete Anzahl an Kanten vom Typ (X, Y, Z) beträgt auf Grund der Linearität des Erwartungswertes $|X| \cdot |Y| \cdot |Z| \cdot \rho$. Analog kann man nun die Diskrepanz definieren. An dieser Stelle kommen wir aber gleich zum Be-

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

griff der geringen α -Diskrepanz. Wir betrachten wieder eine Knotenmenge X der Größe $|X| = \alpha n$ bzw. deren Komplement $Y = V \setminus X$. Der Hintergrund hierfür liegt wieder in den eigentlich zu Grunde liegenden Formeln bzw. Hypergraphen begründet. Die Mengen X und Y stellen letztendlich z. B. die Variablen einer Formeln dar, die auf wahr oder falsch gesetzt sind.

Definition 3.4 (geringe α -Diskrepanz von Hypergraphen). *Es sei $H = (V, E)$ ein gerichteter 3-uniformer Hypergraph mit $|V| = n$ und $|E| = m$. Es bezeichne $m_{A,B,C}$ die Anzahl der Kanten vom Typ (A, B, C) . Es seien $X \subseteq V$ und $Y \subseteq V$ Knotenmengen mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ und $Y = V \setminus X$. Der Hypergraph H ist von geringer α -Diskrepanz, wenn*

$$m_{A,B,C} = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot \frac{m}{n^3} \cdot (1 + o(1)) + o(m)$$

für alle Knotenmengen X sowie $A, B, C \in \{X, Y\}$ gilt.

Diese Definition umfaßt acht verschiedene Kantentypen. Für die vier folgenden Typen sowie $\varepsilon < \alpha(n) < 1 - \varepsilon$ gilt beispielsweise:

$$m_{X,X,X} = \alpha^3 \cdot m \cdot (1 + o(1)), \quad m_{X,X,Y} = \alpha^2 \cdot (1 - \alpha) \cdot m \cdot (1 + o(1)),$$

$$m_{X,Y,Y} = \alpha \cdot (1 - \alpha)^2 \cdot m \cdot (1 + o(1)) \quad \text{und} \quad m_{Y,Y,Y} = (1 - \alpha)^3 \cdot m \cdot (1 + o(1)).$$

Die o -Notation bezieht sich hierbei wiederum auf $n \rightarrow \infty$. Liegt die geringe α -Diskrepanz für jede geeignete Funktion $\alpha(n)$ vor, so sprechen wir wieder von geringer Diskrepanz des Hypergraphen:

Definition 3.5 (geringe Diskrepanz). *Ein gerichteter 3-uniformer Hypergraph $H = (V, E)$ ist von geringer Diskrepanz, wenn er für jedes $\alpha = \alpha(n)$ mit $0 \leq \alpha(n) \leq 1$ von geringer α -Diskrepanz ist.*

Betrachten wir nun zufällige Hypergraphen. Es sei $\mathcal{H}_{n,3,p}$ der Wahrscheinlichkeitsraum der gerichteten 3-uniformen Hypergraphen mit n Knoten, wobei jede mögliche Kante unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit p gewählt wird. Hier sind für uns Hypergraphen mit einer Kantenwahrscheinlichkeit von $p = n^\varepsilon/n^2$ interessant. Dabei ist $0 < \varepsilon \leq 2$ eine positive Konstante. Da wir später zufällige Hypergraphen konstruieren, die fast diese Kantenwahrscheinlichkeit haben, betrachten wir nun Hypergraphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p = c(1 + o(1))n^\varepsilon/n^2$. Dabei ist c ebenfalls eine positive Konstante. Auch hier gilt, daß alle Kanten die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Diese Hypergraphen haben geringe Diskrepanz:

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

Lemma 3.6. *Es seien $0 < \varepsilon \leq 2$, $c > 0$ Konstanten sowie $0 \leq \alpha(n) \leq 1$. Fast alle Hypergraphen $H = (V, E)$ aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit $p = cn^\varepsilon/n^2(1+o(1))$ haben geringe Diskrepanz.*

Beweis. Analog zum Beweis des Lemmas 3.2 genügt es auch hier, sich auf $\alpha(n) \neq o(1)$ und $\alpha(n) \neq 1 - o(1)$ zu beschränken. Es läßt sich wieder eine Konstante $\varepsilon' > 0$ finden, so daß $\varepsilon' < \alpha(n) < 1 - \varepsilon'$ erfüllt ist.

Die Anzahl an Kanten $m = |E|$ ist (n^3, p) -binomialverteilt. Der Erwartungswert beträgt damit $E[m] = n^3 \cdot c(1+o(1))n^\varepsilon/n^2 = cn^{1+\varepsilon}(1+o(1))$. Die Anwendung der Chernoff-Schranken (Ungleichung 223) zeigt wieder, daß die Anzahl der Kanten scharf konzentriert ist. Für jedes geeignete $\delta = \delta(n) > 0$, z.B. $\delta = 1/\ln^k n$ mit $k > 0$ und k konstant oder $\delta = n^{-\varepsilon/4}$ gilt $\delta^2 n^{1+\varepsilon} \rightarrow \infty$ und somit:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[|m - E[m]| \geq \delta \cdot E[m]] &\leq 2e^{-\delta^2 \cdot E[m]/3} \\ &= 2e^{-\delta^2 cn^{1+\varepsilon}(1+o(1))} \\ &= o(1) . \end{aligned}$$

Damit beträgt die Anzahl Kanten fast aller Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,n^\varepsilon/n}$ $m = E[m](1+o(1)) = cn^{1+\varepsilon}(1+o(1))$. Hypergraphen mit einer anderen Kantenanzahl brauchen wir im weiteren nicht betrachten, da diese (fast) nicht auftreten.

Für jeden Kantentyp (A, B, C) der Definition 3.4 mit $A, B, C \in \{X, Y\}$, $|X| = (\alpha + o(1))n$ und $Y = V \setminus X$ können folgende Schlußfolgerungen gezogen werden: Die Anzahl der Kanten vom Typ (A, B, C) ist $(|A| \cdot |B| \cdot |C|, p = c(1+o(1))n^\varepsilon/n^2)$ -binomialverteilt. Damit beträgt die erwartete Kantenanzahl vom Typ (A, B, C)

$$\begin{aligned} E[m_{A,B,C}] &= c'n^3(1+o(1))n^\varepsilon/n^2 \\ &= c'n^{1+\varepsilon}(1+o(1)) \\ &= c'm(1+o(1)) \end{aligned}$$

mit

$$c' \in \left\{ c\alpha^3, c\alpha^2(1-\alpha), c\alpha(1-\alpha)^2, c(1-\alpha)^3 \right\} ,$$

abhängig vom gewählten Typ. Die Anzahl an Kanten vom Typ (A, B, C) ist aber für alle Knotenmengen X mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ scharf konzentriert. Es bezeichne \mathcal{A} das Ereignis, daß für mindestens eine Teilmenge X die Anzahl Kanten stark abweicht. Es

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

ist also $m_{(A,B,C)} \neq c'm(1 + o(1))$. Für eine geeignet gewählte positive reelle Funktion $\delta = \delta(n)$ aus $o(1)$ ist dies gleichbedeutend mit $|m_{A,B,C} - \mathbb{E}[m_{A,B,C}]| \geq \delta \cdot \mathbb{E}[m_{A,B,C}]$. Es gibt maximal $\binom{n}{|X|} \leq 2^n$ Teilmengen X . Die Anwendung der Chernoff-Schranken liefert uns nun:

$$\begin{aligned}
\text{Prob}[\mathcal{A}] &= \text{Prob} \left[\bigcup_{X \in V, |X|=(\alpha+o(1))n} |m_{A,B,C} - \mathbb{E}[m_{A,B,C}]| \geq \delta \cdot \mathbb{E}[m_{A,B,C}] \right] \\
\Rightarrow \text{Prob}[\mathcal{A}] &\leq \sum_{\substack{X \in V \\ |X|=(\alpha+o(1))n}} \text{Prob} [|m_{A,B,C} - \mathbb{E}[m_{A,B,C}]| \geq \delta \cdot \mathbb{E}[m_{A,B,C}]] \\
&\leq 2^n \cdot \text{Prob} [|m_{A,B,C} - \mathbb{E}[m_{A,B,C}]| \geq \delta \cdot \mathbb{E}[m_{A,B,C}]] \\
&\leq 2^n \cdot 2 \cdot e^{-\delta^2 c' m(1+o(1))/3} \\
&= 2 \cdot e^{n \ln 2 - \delta^2 c' n^{1+\varepsilon}(1+o(1))/3} \\
&= 2 \cdot e \left(\underbrace{\ln 2}_{-\infty} \underbrace{\delta^2 c' n^{1+\varepsilon}(1+o(1))}_{\Theta(1)} / 3 \right) \\
&= o(1) .
\end{aligned} \tag{70}$$

In fast allen betrachteten Hypergraphen beträgt die Anzahl der Kanten $m = cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1))$ bzw. es gilt dadurch auch $\mathbb{E}[m] = m(1 + o(1))$. Die Anzahl der Kanten vom Typ (A, B, C) mit $A, B, C \in \{X, V \setminus X\}$ beträgt für fast alle Graphen:

$$\begin{aligned}
m_{A,B,C} &= \mathbb{E}[m_{A,B,C}](1 + o(1)) \\
&= |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot p \cdot (1 + o(1)) \\
&= (c'/c)n^3 cn^{\varepsilon-2}(1 + o(1)) \\
&= c'n^{1+\varepsilon}(1 + o(1)) \\
&= c'cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1))(1 + o(1)) \\
&= |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot \frac{(cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1)))}{n^3} \cdot (1 + o(1)) \\
&= |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot \frac{\mathbb{E}[m]}{n^3} \cdot (1 + o(1)) \\
&= |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot \frac{m}{n^3} \cdot (1 + o(1)) .
\end{aligned}$$

Dies erfüllt die Definition der geringen α -Diskrepanz für jedes α mit $\varepsilon' < \alpha(n) < 1 - \varepsilon'$. \square

3.5 Die Konzentrierung des Grades

Liegt bei einem Hypergraphen eine geringe α -Diskrepanz vor, so sind die Kanten relativ gleichmäßig verteilt. Es sollte also jeder Knoten in der gleichen Anzahl Kanten vorkommen. An dieser Stelle ist es nun sinnvoll, den Grad eines Knotens zu betrachten. Unter dem Grad $d(v)$ eines Knotens v verstehen wir im Hypergraphen die Anzahl Kanten, in denen der Knoten v vorkommt. In gerichteten Hypergraphen können wir sogar etwas präziser sein, indem die Position i des Knotens v in einer Kante beachtet wird. Es sei wieder e_i der Knoten auf Position i in der Kante e . Es bezeichne nun $d_i(v)$ die Anzahl an Kanten, in denen der Knoten v auf der Position i vorkommt. Es ist somit

$$d_i(v) = |\{e : e \in E \text{ und } e_i = v\}| . \quad (71)$$

Hiermit haben wir den Grad eines Knotens für eine bestimmte Kantenposition definiert. Im Gegensatz zu herkömmlichen Graphen gibt es bei Hypergraphen mehr als zwei Knoten pro Kante. Es besteht dadurch die Möglichkeit, den Begriff des Grades auf Knotenpaare, -tupel oder -mengen auszudehnen. Speziell sind wir später an Hypergraphen interessiert, in denen die Menge derjenigen Kanten, die mit einer anderen Kante ein Knotenpaar gemeinsam haben, im Vergleich zur Gesamtanzahl der Kanten vernachlässigbar ist. Die Menge dieser Kanten sei $D = D(H)$. Damit ist diese Kantenmenge D für einen gerichteten Hypergraphen $H = (V, E)$ definiert als

$$D = \{e : e \in E, \exists f \in E, \exists i \text{ und } \exists j \text{ mit } f \neq e, i \neq j, \{e_i, e_j\} = \{f_i, f_j\}\} . \quad (72)$$

In der Menge D sind also alle Kanten e , zu denen eine weitere Kante existiert, die zwei Knoten aus e enthält und diese sich auf den gleichen Positionen befinden. Betrachten wir die ersten zwei Koordinaten, so ist z. B. $(x, y, z) \in D$, falls eine Kante $(x, y, a) \in E$ mit $a \neq z$ oder $(y, x, a) \in E$ (hier ist $a = z$ möglich) gibt.

Wir werden nun die Hypergraphen als fast d -regulär bezeichnen, in denen alle Knoten auf allen Positionen in etwa den gleichen Grad haben:

Definition 3.7 (fast d -reguläre gerichtete r -uniforme Hypergraphen). *Es sei $H = (V, E)$ ein r -uniformer Hypergraph mit $|V| = n$ und $|E| = m$. H ist fast d -regulär, für alle Knoten $v \in V$ und alle $i \in \{1, \dots, r\}$.*

$$d_i(v) = d(1 + o(1))$$

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

gilt.

Die Überprüfung auf Fast- d -Regularität eines Hypergraphen kann analog zur Überprüfung auf Fast- d -Regularität eines Multigraphen (Algorithmus 2.8 *Fast_Regulär_G*) gestaltet werden. Dies liefert uns Algorithmus 3.8 *Fast_Regulär_H*.

Algorithmus 3.8 (Fast_Regulär_H($H, g()$)).

Eingabe: · $H = (V, E)$ - r -uniformer gerichteter Hypergraph
mit $|V| = n$
· $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g(n) = o(1)$, $g(n) > 0$

Ausgabe: H ist / ist nicht fast d -regulär

1. FOR $i := 1$ TO n DO
2. FOR $k := 1$ TO r DO $D[i, k] := 0$
3. FOR EACH $e = (v_1, v_2, \dots, v_r) \in E$ DO
4. FOR $k := 1$ TO r DO $D[v_k, k] := D[v_k, k] + 1$
5. $d_{\min} := \min_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r} D[i, k]$
6. $d_{\max} := \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq r} D[i, k]$
7. $d := \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2}$
8. IF $\frac{d_{\max} - d_{\min}}{2 \cdot d} \leq g(n)$
9. THEN RETURN H ist fast d -regulär
10. ELSE RETURN H ist nicht fast d -regulär

Lemma 3.9. *Es sei $H = (V, E)$ ein r -uniformer gerichteter Hypergraph sowie $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion mit $0 < g(n) < 1$ und $g(n) = o(1)$. Wird auf H der Algorithmus 3.8 *Fast_Regulär_H* angewendet, dann gilt:*

1. *Wenn ein d existiert, so daß H bezüglich $g(n)$ fast d -regulär ist, so findet der Algorithmus ein solches d und hat als Ausgabe fast d -regulär.*
2. *Wenn kein d existiert, so daß H bezüglich $g(n)$ fast d -regulär ist, so gibt der Algorithmus nicht fast d -regulär aus.*
3. *Der Algorithmus hat polynomielle Laufzeit.*

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

Beweis. Offensichtlich wird in den Zeilen 1 bis 4 des Algorithmus für jeden Knoten $v \in V$ sowie jede Koordinate i der Grad $D[v, i] = d_i(v)$ gemäß Gleichung 71 korrekt berechnet. Die Laufzeit beträgt für die beiden Schleifen $O(n \cdot |E|)$. Die Bestimmung des minimalen sowie des maximalen Grades in den Zeilen 5 und 6 kann in $O(|E|)$ implementiert werden. Analog zum Beweis von Lemma 2.9 können wir wieder schließen, daß H fast $(d_{\min} + d_{\max})/2$ -regulär sein muß, wenn wenigstens ein d existiert, so daß H fast d -regulär ist. Offensichtlich wird dies in den Zeilen 8 bis 10 in der Zeit $O(1)$ erkannt. \square

Bezüglich der geringen α -Diskrepanz wurden gerichtete 3-uniforme Hypergraphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p = cn^\varepsilon/n^2$ betrachtet. Diese Graphen sind ebenfalls für ein $d = d(n) \rightarrow \infty$ fast d -regulär:

Lemma 3.10. *Fast alle gerichteten 3-uniformen Hypergraphen $H = (V, E)$ aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit $c > 0$, $0 < \varepsilon \leq 2$, $p = c(1 + o(1))n^\varepsilon/n^2$ und $d = cn^\varepsilon$ sind fast d -regulär.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Grad $d_i(x)$ für ein festes i und einen festen Knoten x . Ist beispielsweise $i = 1$, so zählen wir in $d_i(x)$ alle Kanten vom Typ $(\{x\}, V, V)$. Steht die Position i des Knotens x fest, so gibt es insgesamt n^2 mögliche Kanten, die die Größe von $d_i(x)$ beeinflussen können. All diese Kanten werden unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen. Damit ist aber $d_i(x)$ binomialverteilt mit den Parametern $(n^2, c(1 + o(1))n^\varepsilon/n^2)$. Der Erwartungswert beträgt somit $E[d_i(x)] = n^2 \cdot c(1 + o(1))n^\varepsilon/n^2 = cn^\varepsilon(1 + o(1))$. Lt. Lemma soll $d_i(x) = E[d_i(x)](1 + o(1))$ gelten. Dies ist gleichbedeutend mit $|d_i(x) - E[d_i(x)]| \leq \delta$ für eine nichtnegative Funktion $\delta = \delta(n) = o(1)$. Die Chernoff-Schranken (Ungleichung 223) liefern uns eine Wahrscheinlichkeit von $2 \cdot e^{-\delta^2 E[d_i(x)]/3}$ dafür, daß diese Ungleichung nicht erfüllt ist. Insgesamt gibt es n Knoten und 3 Positionen. Die Wahrscheinlichkeit, daß einer der $3n$ möglichen Grade $d_i(x)$ von der Definition abweicht, beträgt maximal:

$$3n \cdot 2 \cdot e^{-\delta^2 E[d_i(x)]/3} = 6 \cdot e^{\ln n - \delta^2 c(1+o(1))n^\varepsilon/3} \quad (73)$$

Für geeignete δ , beispielsweise $\delta = 1/\ln^k n$ mit $k > 0$ oder $\delta = n^{-\varepsilon/4}$ gilt wieder $\delta^2 n^\varepsilon \rightarrow \infty$ bzw. $(\ln n - \delta^2 c(1 + o(1))n^\varepsilon/3) \rightarrow -\infty$. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein $d_i(x)$ die Definition nicht erfüllt, $o(1)$. Fast alle Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,c(1+o(1))n^\varepsilon/n^2}$ genügen der Definition von fast d -regulär. \square

Fast alle betrachteten zufälligen Hypergraphen sind also bezüglich einer geeigneten Funktion $g(n)$, z. B. $g(n) = 1/\ln^k n$ fast d -regulär. Betrachtet man nocheinmal die Analysen, so ist jede Funktion $g(n) = \Theta(1/\ln^k n)$ geeignet. Wir sind an effizienten Algorithmen,

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

also an Polynomialzeitalgorithmen interessiert. Es empfiehlt sich hier die Verwendung von $g(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^k = \Theta(1/\ln^k n)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Es gilt also mit hoher Wahrscheinlichkeit $(1 - g(n)) \cdot d \leq d_i(v) \leq (1 + g(n)) \cdot d$ für alle Knoten $v \in V$ auf allen Positionen $1 \leq i \leq r$. Nach Lemma 3.9 kann dies für einen solchen Hypergraphen effizient durch den Algorithmus 3.8 *Fast_Regulär_H* überprüft werden. Diese Betrachtung führt zu

Korollar 3.11. *Der Algorithmus 3.9 zertifiziert effizient bei fast allen gerichteten 3-uniformen Hypergraphen $H = (V, E)$ aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit $c > 0$, $0 < \varepsilon \leq 2$, $p = c(1 + o(1))n^\varepsilon/n^2$ und $d \sim cn^\varepsilon$, daß diese bezüglich $g(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^k$ fast d -regulär sind. Dabei ist $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante mit $k > 0$.*

In den weiteren Untersuchungen stören die Kanten des Hypergraphen, die mit anderen Kanten gemeinsame Knotenpaare haben (siehe auch die Definition von D in der Gleichung 72). Um diese Kanten behandeln zu können erweitern wir die Definition von fast d -regulär. Ist zusätzlich die Menge der Kanten, die mit einer anderen Kante ein Knotenpaar gemeinsam haben, vernachlässigbar klein, so seien dies stark d -reguläre Hypergraphen:

Definition 3.12 (stark d -reguläre gerichtete r -uniforme Hypergraphen). *Es sei $H = (V, E)$ ein r -uniformer Hypergraph mit $|V| = n$, $|E| = m$ und D entsprechend Gleichung 72. H ist stark d -regulär, wenn*

1. H fast d -regulär ist und
2. $|D(H)| = o(m)$

gilt.

Um die starke d -Regularität effizient zu überprüfen kann der Algorithmus 3.8 *Fast_Regulär_H* erweitert werden. Im einfachsten Fall testet man alle $\binom{|E|}{2}$ Kantenpaare, um so die Größe von D zu bestimmen.

Durch die Einschränkung der Kantenwahrscheinlichkeit können wir nun die fast d -regulären Hypergraphen angeben, die stark d -regulär sind:

Lemma 3.13. *Fast alle gerichteten 3-uniformen Hypergraphen $H = (V, E)$ aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit $p = cn^\varepsilon/n^2(1 + o(1))$ und den Konstanten $c > 0$ sowie $0 < \varepsilon < 1$ sind stark d -regulär mit $d = cn^\varepsilon$.*

Beweis. Die betrachteten Hypergraphen haben eine Kantenwahrscheinlichkeit von $p = c(1 + o(1))n^\varepsilon/n^2$ mit $0 < \varepsilon < 1 \leq 2$. Damit sind fast alle die Hypergraphen nach Lemma

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

3.10 fast d -regulär. Es wird nun gezeigt, daß für fast alle Hypergraphen H des Lemmas $D(H) = o(m)$ gilt.

Wir betrachten zuerst die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Kante $e = (x, y, z) \in D$ ist. Damit dieses Ereignis eintritt, muß die Kante e in H enthalten sein. Ferner muß es eine zweite, von e verschiedene Kante $f = f(e)$ geben, so daß e und f ein Knotenpaar gemeinsam haben. Alle Kanten im Graphen werden unabhängig voneinander gezogen, so daß die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von e oder f in H miteinander multipliziert werden können. Für die Position des gemeinsamen Paares gibt es insgesamt drei Möglichkeiten. Die geringste Anzahl an Wahlmöglichkeiten für die Kante f liegen dann vor, wenn die Kante e aus drei identischen Knoten besteht. Hier unterscheiden sich e und f nur in einem nichtgemeinsamen Knoten. Für diesen Knoten kommen die restlichen $n - 1$ Knoten in Frage. Damit gibt es in diesem Fall $3(n - 1)$ verschiedene Möglichkeiten für die Kante f . Mit $p \sim n^\varepsilon/n^2$ und $0 < \varepsilon < 1$ gilt $np \rightarrow 0$. In diesem Fall berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein der Kante f nach der Siebformel (Gleichungen 215 und 217) aus $1 - (1 - p)^{3(n-1)} = 3(n - 1)p(1 - o(1)) = 3np(1 - o(1))$. Gibt es nur zwei gleiche Knoten in e , so gibt es mehr Wahlmöglichkeiten für die Kante f . Die meisten Varianten gibt es, wenn alle drei Knoten in e verschieden sind. In diesem Fall gibt es drei Positionen für identische Paare (also z. B. (x, y) in e und f) mit $n - 1$ Möglichkeiten für den nichtgemeinsamen Zwischenknoten. Ferner gibt es wiederum drei Positionen für das gespiegelte Paar (also z. B. (x, y) in e und (y, x) in f). Hier kann es aber n Möglichkeiten für den nichtgemeinsamen Knoten geben. Damit gibt es hier $3(n - 1) + 3n = 6n - 3$ Möglichkeiten für die Kante f . Hier berechnen wir also die Wahrscheinlichkeit für f aus $1 - (1 - p)^{6n-3} = (6n - 3)p(1 - o(1)) \leq 6np$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[e \in D] &= \text{Prob}[e \in E] \cdot \text{Prob}[\exists f(e)] \\ &\leq p \cdot 6np \\ &= 6nc^2n^{2\varepsilon-4}(1 + o(1)) \\ &= 6c^2n^{2\varepsilon-3}(1 + o(1)) . \end{aligned}$$

Nun können wir den Erwartungswert für die Anzahl Kanten in D bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|D|] &= \sum_{e \in V \times V \times V} \text{Prob}[e \in D] \\ \Rightarrow \mathbb{E}[|D|] &\leq n^3 \cdot 6c^2n^{2\varepsilon-3}(1 + o(1)) \\ &= 6c^2n^{2\varepsilon}(1 + o(1)) . \end{aligned}$$

3 Diskrepanzeigenschaften zufälliger Graphen und Hypergraphen

Es sei nun $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon) > 0$ eine Konstante, so daß $\varepsilon + \varepsilon' < 1$ gilt. Es ist z. B. $\varepsilon' = 1/2 - \varepsilon/2$ geeignet. Für fast alle Hypergraphen beträgt der Unterschied zwischen der Anzahl Kanten $|D|$ und dem Erwartungswert $E[|D|]$ nicht mehr als das $n^{\varepsilon'}$ -fache des Erwartungswertes $E[|D|]$. Dies ist eine Folgerung aus der Markoff-Ungleichung (218):

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left[|D| \geq E[|D|] \cdot n^{\varepsilon'} \right] &\leq n^{-\varepsilon'} \\ &= o(1). \end{aligned}$$

In fast allen Hypergraphen des Lemmas gilt also $|D| \leq 6c^2 n^{2\varepsilon + \varepsilon'} (1 + o(1))$. Aus dem Beweis zu Lemma 3.6 folgt, daß die Anzahl Kanten m in fast allen Hypergraphen $m = cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1))$ beträgt. Daraus folgt aber für fast alle Hypergraphen:

$$\begin{aligned} \frac{|D|}{m} &\leq \frac{6c^2 n^{2\varepsilon + \varepsilon'} (1 + o(1))}{cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1))} \\ &= 6c \cdot n^{\overbrace{\varepsilon + \varepsilon'}^{< 1} - 1} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \end{aligned} \tag{74}$$

$$= o(1). \tag{75}$$

Es gilt somit $|D| = o(m)$ für fast alle Hypergraphen des Lemmas. \square

An dieser Stelle ist eine eingehendere Betrachtung der Ungleichung 74 bzw. 75 sinnvoll. Offensichtlich gilt hier ebenfalls $(|D| \cdot \ln n)/m = o(1)$. In fast allen Graphen gilt also immer $|D| < m/\ln n = o(m)$. Dieses Verhältnis von $|D|$ zur Kantenanzahl m kann effizient untersucht werden.

Wir werden nun ein Verfahren erarbeiten, um die geringe Diskrepanz sowie die Eigenschaft fast d -regulär bzw. stark d -regulär von 3-uniformen gerichteten Hypergraphen effektiv nachzuweisen. Das Ziel ist es, diesen Nachweis auf Nachweise der Diskrepanz bzw. Regularität bestimmter Graphen zurückzuführen. Löscht man beispielsweise in jeder Kante eines 3-uniformen Hypergraphen einen Knoten, so entsteht ein Graph. Dieser Graph hat die gleiche Knotenmenge sowie etwa die gleiche Anzahl an Kanten wie der ursprüngliche Hypergraph. Man kann also durchaus erwarten, daß Eigenschaften des Hypergraphen sich in daraus konstruierten Graphen widerspiegeln. Im weiteren werden wir zwei verschiedene Konstruktionen betrachten.

Zunächst definieren wir einen Projektionsgraphen. Die Kanten dieses Graphen bestehen aus den Projektionen bestimmter Koordinaten des Hypergraphen. Ein Projektionsgraph

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

bezüglich der Koordinaten i und k soll z. B. genau dann eine Kante $e = \{u, v\}$ enthalten, wenn es im Hypergraphen eine Kante gibt, die auf der Position i den Knoten u sowie auf der Position k den Knoten v enthält. Ferner soll es sich bei den Projektionsgraphen um einfache und ungerichtete Graphen handeln.

Die zweite Konstruktion werden wir als Produktgraphen bezeichnen. Hierbei überprüfen wir, ob es zwei Kanten im Hypergraphen gibt, die auf einer Koordinate den gleichen Knoten enthalten. Die erste Idee für diese Konstruktion besteht darin, den übereinstimmenden Knoten zu löschen und nun die beiden Knotenpaare als Knoten aufzufassen. Es würden damit z. B. die Kanten (a, b, z) und (x, y, z) des Hypergraphen die neue Kante $((a, b), (x, y))$ erzeugen. Der so entstehende Graph hat n^2 viele Knoten. Im weiteren Verlauf wollen wir aber aus einem zufälligen Hypergraphen einen Produktgraphen konstruieren, der möglichst einem der üblichen Modelle für Zufallsgraphen entsprechen soll. Bei der obigen Konstruktion gibt es jedoch sehr viele Abhängigkeiten, die die weiteren Rechnungen erschweren. Diese Abhängigkeiten können etwas reduziert werden. In der obigen Konstruktion wird einfach eine kleine Vertauschung in den Knotenpaaren zwischen den beiden Kanten vorgenommen. Außerdem wollen wir wieder ungerichtete Graphen betrachten. In unserem Beispiel würde die Konstruktion des Produktgraphen die Kante $\{(a, x), (b, y)\}$ liefern. (Der erste Knoten in einem Knotenpaar stammt immer aus der ersten betrachteten Kante des Hypergraphen. Analog verhält es sich mit dem zweiten Knoten.) Ferner ist es ebenfalls sinnvoll, auf Knoten der Art (v, v) zu verzichten. Für die nachfolgenden exakten Definitionen dieser Graphen sei e_i wieder der Knoten auf Position (bzw. Koordinate i) der Kante e sowie $e \setminus e_i$ das geordnete Tupel e ohne das Element e_i auf Position i .

4 Nachweis der geringen Diskrepanz von Hypergraphen mittels einfacher Graphen

4.1 Projektions- und Produktgraphen

Analog zu [GJ02] führen wir nun die Begriffe des Projektions- bzw. des Produktgraphen ein:

Definition 4.1 (Projektionsgraph). *Es sei $H = (V, E)$ ein r -uniformer gerichteter Hypergraph. Der ungerichtete Graph $G_{i,k} = G_{i,k}(H) = (V, E_{i,k})$ heißt Projektionsgraph von H bezüglich der Koordinaten i und k , wenn für die Knotenmenge $E_{i,k}$ dieses Graphen*

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

gilt:

$$E_{i,k} = \{\{x, y\} : x \neq y, \exists e \in E \text{ mit } e_i = x \text{ und } e_k = y\} .$$

Definition 4.2 (Produktgraph). Es sei $H = (V, E)$ ein r -uniformer gerichteter Hypergraph. Der ungerichtete Graph $G_i = G_i(H) = (V \times V, E_i)$ heißt Produktgraph von H bezüglich der Koordinate i , wenn für diesen Graphen gilt:

$$E_i = \left\{ \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} : \exists e, f \in E \text{ mit } e \begin{matrix} (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2), \\ e_i = (x_1, y_1) \text{ und } f_i = (x_2, y_2) \\ e_i = f_i \end{matrix} \right\} .$$

Man beachte, daß es nach dieser Definition zwei Paare von Kanten bezüglich eines gemeinsamen Knoten z in H geben kann, die $\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ erzeugen. Bezüglich der dritten Position könnten dies die Kanten (x_1, y_1, z) und (x_2, y_2, z) bzw. (y_1, x_1, z) und (y_2, x_2, z) sein. Ein Kantenpaar $((x_1, y_1, z), (x_2, y_2, z))$ des Hypergraphen H erzeugt also immer die beiden Produktgraphkanten $(x_1, x_2) - (y_1, y_2)$ und $(x_2, x_1) - (y_2, y_1)$.

Kehren wir nun zurück zu den zufälligen Hypergraphen. Wir haben bereits gesehen, daß diese zufälligen Hypergraphen für eine bestimmte Kantenwahrscheinlichkeit eine geringe Diskrepanz aufweisen und stark d -regulär sind. Die Konstruktion der Projektionsgraphen läßt erwarten, daß diese Graphen in etwa die gleiche Kantenanzahl haben werden wie der zu Grunde liegende Hypergraph. Fast alle Graphen des Modells $\mathcal{G}_{n,p}$ mit einer erwarteten Kantenanzahl von $cn^{\varepsilon+3/2}$ haben nach Lemma 3.6 eine geringe Diskrepanz für jedes $\alpha(n)$ mit $0 \leq \alpha(n) \leq 1$ und sie sind d -regulär für ein d . Wir werden zeigen, daß die Projektionsgraphen ebenfalls dem Modell genügen und somit eine geringe Diskrepanz aufweisen und d -regulär sind.

Zu einer ähnlichen Vermutung kann man ebenfalls für die Produktgraphen gelangen, wenn man wieder die erwartete Anzahl an Kanten betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein festes Kantenpaar im Hypergraphen vorhanden ist, beträgt etwa $(cn^\varepsilon/n^{3/2})^2$. Eine Kante im Produktgraphen kann gebildet werden, wenn mindestens ein entsprechendes Kantenpaar im Hypergraphen vorhanden ist. Davon gibt es aber $2n$ viele (Anzahl der möglichen Knoten auf der zu entfernenden Koordinate sowie zwei verschiedene, geeignete Kantenpaare). Die Wahrscheinlichkeit für eine Kante im Produktgraphen beträgt damit etwa $(cn^\varepsilon/n^{3/2})^2 \cdot n = c^2 n^{2\varepsilon-2}$. Die erwartete Kantenanzahl berechnet sich also aus ca. $2c^2 n^{2\varepsilon-2} \cdot \binom{n^2}{2} = c^2 n^{2\varepsilon+2}$. Setzen wir $N = n^2$, so enthält der Produktgraph N Knoten und $\approx c^2 \cdot N^{1+\varepsilon}$ Kanten. Wir werden gleich zeigen, daß die Projektions- sowie die Produktgraphen fast d -regulär sind und eine geringe Diskrepanz aufweisen. Bevor wir uns damit beschäftigen präzisieren wir noch die Zusammenhänge zwischen den Kantenzahlen

der verschiedenen Graphen.

4.2 Kantenzahl des Projektions- und des Produktgraphen

Lemma 4.3. *Es sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer und stark d -regulärer gerichteter Hypergraph mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $d = d(n) \rightarrow \infty$.*

1. *Die Projektionsgraphen $G_{i,j} = G_{i,j}(H) = (V, E_{i,j})$ bezüglich aller Koordinaten $i \neq j$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$, von H haben eine Kantenzahl von $|E_{i,j}| = m(1 - |o(1)|)$.*
2. *Die Produktgraphen $G_i = G_i(H) = (V \times V, E_i)$ bezüglich aller Koordinaten $i \in \{1, 2, 3\}$ von H haben eine Kantenzahl von $|E_i| = \frac{m^2}{n}(1 - |o(1)|)$.*

Beweis. Es bezeichne $m_{(A,B,\dots)}(G)$ die Anzahl der Kanten vom Typ (A, B, \dots) im Graphen bzw. Hypergraphen G . Die Anzahl aller Kanten sei $m(G)$. Der vorliegende gerichtete 3-uniforme Hypergraph $H = (V, E)$ habe $m = m(H) = |E|$ Kanten.

Wir beginnen mit den Projektionsgraphen $G_{i,j}$. O. B. d. A. sei $i = 1$ und $j = 2$. Eine Kante $\{x, y\}$ des Projektionsgraphen wird nur von Kanten der Typen $(\{x\}, \{y\}, V)$ bzw. $(\{y\}, \{x\}, V)$ erzeugt. Der Anteil der Kanten, die ein Knotenpaar auf den selben Koordinaten gemeinsam haben, ist asymptotisch klein und damit vernachlässigbar, da H stark d -regulär ist (siehe Definition 3.12). Damit erzeugen – bis auf $o(m)$ viele – alle Kanten aus H genau eine Kante im Projektionsgraphen $G_{1,2}$. Diese Betrachtung kann analog für die anderen Projektionsgraphen geführt werden. Damit gilt

$$m(G_{i,j}) = m(1 - |o(1)|) .$$

Kommen wir nun zu den Produktgraphen. Wir fixieren wieder o. B. d. A. die Koordinate des gemeinsamen Knoten bei der Kantenbildung. Es sei also $i = 3$. Wir betrachten somit den Produktgraphen G_3 . Die nachfolgenden Betrachtungen können analog für die Produktgraphen G_1 und G_2 wiederholt werden.

Der Hypergraph H ist stark d -regulär und damit nach Definition 3.7 ebenfalls fast d -regulär. Der Grad eines Knoten z bezüglich der Koordinate $i = 3$ beträgt somit $d(1 + o(1))$. Dies ist gleichbedeutend damit, daß der Knoten z in $d(1 + o(1)) = (m/n) \cdot (1 + o(1))$ verschiedenen Kanten in H vorkommt. Von diesen Kanten können jeweils zwei ausgewählt werden, um zwei Kanten im Produktgraphen zu bilden. Über den Knoten z können somit $2^{\binom{d(1+o(1))}{2}}$ viele Kanten im Produktgraphen gebildet werden. Insgesamt

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

haben wir n Knoten in H . Damit beträgt die Anzahl an Kanten im Produktgraphen G_3 maximal

$$\begin{aligned} m(G_3) &\leq 2 \binom{d(1+o(1))}{2} n \\ &= d^2 n (1+o(1)) \\ &= m^2 (1+o(1)) / n . \end{aligned} \tag{76}$$

Bis zu diesem Punkt haben wir noch nicht untersucht, ob diese Kanten für die Konstruktion überhaupt zulässig sind bzw. ob mehrere Kantenpaare aus H die gleiche Kante im Produktgraphen generieren. Der Produktgraph ist ein einfacher Graph, d. h. Schlingen, z. B. $\{(x, y), (x, y)\}$, sind nicht zulässig.

Wir betrachten nun eine Kante $(x_1, x_2) - (y_1, y_2)$ des Produktgraphen. Es ist natürlich $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$, es kann aber durchaus $x_1 = x_2$ oder $y_1 = y_2$ möglich sein. Die Kante kann nur aus einem Kantenpaar (x_1, y_1, z) und (x_2, y_2, z) oder (y_1, x_1, z) und (y_2, x_2, z) entstehen. All diese Kanten haben aber gemeinsam, daß auf den ersten beiden Koordinaten die Knoten x_1 und y_1 bzw. x_2 und y_2 auftreten müssen. Der vorliegende Hypergraph H ist stark d -regulär. Daraus folgt, daß die Anzahl solcher Kanten maximal $o(m)$ beträgt. Hieraus können $\binom{o(m)}{2} = o(m^2)$ Paare gebildet werden. Um die Auswirkungen auf die Anzahl an Kanten im Produktgraphen zu bestimmen, müssen wir etwas detaillierter vorgehen. Die Vorgehensweise wie im Beweis zu Lemma 3.13 ist noch nicht ausreichend.

Es sei wieder $d_3(x)$ der Grad des Knotens x auf der Koordinate 3 in H , also die Anzahl aller Kanten, in denen x an dritter Stelle vorkommt. Es sei ferner $d'_3(x)$ die Anzahl der Kanten, in denen x ebenfalls auf der dritten Position vorkommt, es aber keine Kante gibt, die die gleichen Knoten auf der ersten und zweiten Stelle beinhaltet. In $d'_3(x)$ zählen wir also genau die Kanten, die für die Bildung einer speziellen Kante im Produktgraphen nicht ersetzt werden können. Im Hypergraphen H haben wir m Kanten. Es gilt also

$$m = \sum_{v \in V} d_3(v) .$$

Der Hypergraph H ist stark d -regulär. Es gibt damit nicht mehr als $o(m)$ viele Kanten, die ein Knotenpaar auf den gleichen Koordinaten gemeinsam haben. Es ist also

$$\sum_{v \in V} d'_3(v) = m - |o(m)| .$$

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

Mittels des definierten Grades $d'_3(x)$ können wir aber eine untere Schranke für die Anzahl an Kanten im Produktgraphen angeben. Jede der $d'_3(x)$ Kanten eines Knotens x kann zur Kantenbildung genutzt werden. Dabei erzeugt genau ein Paar dieser Kanten zwei Kanten im Produktgraphen. Pro Knoten können $\binom{d'_3(x)}{2}$ solche Paare gebildet werden. Daraus folgt aber:

$$m(G_3) \geq 2 \cdot \sum_{v \in V} \binom{d'_3(v)}{2}.$$

Hier werden n Funktionswerte von $f(x) = \binom{x}{2} = (x^2 - x)/2$ aufsummiert. Die Funktion selbst ist konvex von unten, da $f''(x) = 1 > 0$ gilt. Die Summe der n Argumente ist ebenfalls bekannt. Somit können wir die Jensensche Ungleichung (bzw. deren Folgerung in Ungleichung 230) anwenden. Man beachte ferner, daß $d = (m/n) \rightarrow \infty$ und somit $1/d = n/m = o(1)$ gilt:

$$\begin{aligned} m(G_3) &\geq 2 \cdot \sum_{v \in V} \binom{d'_3(v)}{2} \\ &\geq 2n \cdot \binom{\frac{\sum_{v \in V} d'_3(v)}{n}}{2} \\ &= 2n \cdot \binom{\frac{m - |o(m)|}{n}}{2} \\ &= n \cdot \left(\frac{m^2 + |o(m)|^2 - 2m|o(m)|}{n^2} - \frac{m - |o(m)|}{n} \right) \\ &= \frac{m^2 - |o(m)|^2 - m(1 - |o(1)|)}{n} \\ &= m^2 \cdot \left(\frac{1 - |o(1)|}{n} - \frac{1}{m}(1 - |o(1)|) \right) \\ &= \frac{m^2}{n} \cdot \left(1 - |o(1)| - \widehat{\frac{n}{m}}^{1/d=|o(1)|} (1 - |o(1)|) \right) \\ &\Rightarrow m(G_3) \geq \frac{m^2}{n} \cdot (1 - |o(1)|). \end{aligned}$$

Aus dieser unteren Schranke und der oberen Schranke in Ungleichung 76 für die Kantenanzahl im Produktgraphen G_3 folgt nun sofort

$$|E_3| = \frac{m^2}{n} \cdot (1 + o(1)). \quad \square$$

In Lemma 3.13 wurde gezeigt, daß fast alle 3-uniformen gerichteten Hypergraphen $H =$

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

(V, E) aus $\mathcal{H}_{n,3,cn^{\varepsilon-2}(1+o(1))}$ mit $0 < \varepsilon < 1$ stark d -regulär sind. Dabei beträgt $d = 2cn^\varepsilon \rightarrow \infty$. Daraus folgt aber sofort, daß fast alle diese Graphen eine Kantenzahl $m = d \cdot n \cdot (1 + o(1))$ haben. Wendet man hierauf das Lemma 4.3 an, so erhält man:

Lemma 4.4. *Es sei ε eine Konstante mit $0 < \varepsilon < 1$. Für fast alle 3-uniformen gerichteten Hypergraphen $H = (V, E)$ aus $\mathcal{H}_{n,3,cn^{\varepsilon-2}(1+o(1))}$ gilt:*

1. *Die Projektionsgraphen $G_{i,j} = G_{i,j}(H) = (V, E_{i,j})$ bezüglich aller Koordinaten $i \neq j$ von H haben eine Kantenzahl von $|E_{i,j}| = cn^{\varepsilon+1}(1 - |o(1)|)$.*
2. *Die Produktgraphen $G_i = G_i(H) = (V \times V, E_i)$ bezüglich aller Koordinaten i von H haben eine Kantenzahl von $|E_i| = c^2n^{2\varepsilon+1}(1 - |o(1)|)$.*

4.3 Eigenschaften des Projektionsgraphen

Wenn die Anzahl der Kanten in den Projektions- und in den Produktgraphen bekannt ist, so kann gezeigt werden, daß die Projektions- und Produktgraphen unserer zufälligen Hypergraphen ebenfalls eine geringe Diskrepanz zeigen und fast d -regulär sind:

Lemma 4.5. *Es sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer gerichteter Hypergraph aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p = cn^\varepsilon/n^2(1 + o(1))$. Ferner seien $0 < \varepsilon < 1$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ Konstanten sowie $d = 2cn^\varepsilon$. Für fast alle Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ weisen alle Projektionsgraphen $G_{i,j} = (V, E_{i,j})$ bezüglich aller Koordinaten i und j mit $1 \leq i, j \leq k$ sowie $i \neq j$ eine geringe Diskrepanz auf und sie sind fast d -regulär.*

Beweis. Die Konstruktion aller Projektionsgraphen ist bis auf die verwendeten Koordinaten identisch. Wir können also zunächst o. B. d. A. einen festen Projektionsgraphen, z. B. bezüglich der Koordinaten $i = 1$ und $j = 2$, betrachten. Hat dieser Projektionsgraph für fast alle Hypergraphen H die geforderten Eigenschaften, so trifft dies dann gleichfalls auf die anderen Projektionsgraphen zu. Insgesamt gibt es 3 und somit endlich viele Projektionsgraphen. Geht die Wahrscheinlichkeit für jeden Projektionsgraphen gegen 1, daß dieser dem Lemma genügt, so geht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es mindestens einen Projektionsgraphen gibt, der dem Lemma nicht genügt, gegen 0.

Die betrachteten Koordinaten seien also o. B. d. A. $i = 1$ und $j = 2$. Auf Grund der Konstruktion handelt es sich bei dem Projektionsgraphen um einen einfachen Graphen, d. h. Schlingen bzw. Mehrfachkanten gibt es nicht. Eine Kante $\{x, y\}$ gibt es im Projektionsgraphen genau dann, wenn der Hypergraph H eine Kante vom Typ $(\{x\}, \{y\}, V)$ bzw. vom Typ $(\{y\}, \{x\}, V)$ enthält. Diese Kanten werden in H alle unabhängig voneinander

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

mit der Wahrscheinlichkeit $p = cn^\varepsilon/n^2(1 + o(1))$ gezogen. Auf der letzten Position (Nr. 3) dieser Kantentypen können jeweils n verschiedene Knoten stehen. Es gibt somit $2n$ verschiedene mögliche Kanten in H , die $\{x, y\}$ generieren könnten. Für das Produkt $2np$ gilt mit $\varepsilon < 1$ offensichtlich

$$\begin{aligned} 2np &= 2cn \overbrace{1 + \varepsilon}^{<0} - 2(1 + o(1)) \\ &= o(1) . \end{aligned}$$

Nun kann die Wahrscheinlichkeit p' dafür bestimmt werden, daß die Kante $\{x, y\}$ mit $x \neq y$ in $G_{1,2}$ vorhanden ist:

$$\begin{aligned} p' &= \text{Prob} [\{x, y\} \in F_{1,2}] \\ &= \text{Prob} \left[\bigcup_{\substack{e \in (\{x\}, \{y\}, V) \\ \cup (\{y\}, \{x\}, V)}} e \in E \right] \\ &= 2np(1 - |o(1)|) \\ &= 2ncn^\varepsilon/n^2(1 + o(1)) \\ &= 2c \cdot \frac{n^\varepsilon}{n} \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned}$$

Betrachtet man zwei verschiedene mögliche Kanten $\{v, w\}$ und $\{x, y\}$, also $\{v, w\} \neq \{x, y\}$, so haben die Kantentypen $(\{v\}, \{w\}, V) \cup (\{w\}, \{v\}, V)$ und $(\{x\}, \{y\}, V) \cup (\{y\}, \{x\}, V)$ des Hypergraphen keine Kante gemeinsam. Dies gilt ebenfalls für eine beliebige Menge von möglichen Kanten des Projektionsgraphen. Die Kanten des Hypergraphen wurden alle unabhängig voneinander gezogen. Damit wurden auch die Kanten des Projektionsgraphen alle unabhängig voneinander und alle mit der selben Wahrscheinlichkeit p' gewählt. Damit stammt aber $G_{1,2}$ aus $\mathcal{G}_{n,p'}$. Da die Kantenwahrscheinlichkeit $p' = 2c \cdot n^\varepsilon/n(1 + o(1))$ mit $0 < \varepsilon < 1$ beträgt, folgt nun der Beweis aus Lemma 3.2. \square

Die Produktgraphen sind ebenfalls zufällige Graphen. Leider sind hier die Kanten nicht unabhängig voneinander. Die Abhängigkeiten sind jedoch nicht zu stark, so daß hier ebenfalls geringe Diskrepanz bzw. Fast- d -Regularität nachgewiesen werden kann. Diese Betrachtungen erfolgen in den ersten beiden Lemmatas des nächsten Abschnitts.

4.4 Eigenschaften des Produktgraphen

Lemma 4.6. *Es sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer gerichteter Hypergraph aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p = cn^\varepsilon/n^{3/2}(1 + o(1))$. Ferner sei $0 < \varepsilon < 1/6$ eine Konstante sowie $d = 2c^2n^{2\varepsilon}$. Für fast alle Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ sind alle Produktgraphen $G_i(H) = (V \times V, E_i)$ bezüglich aller Koordinaten i mit $1 \leq i \leq k$ fast d -regulär*

Beweis. Der Beweis folgt dem Beweis des Lemmas 11 in [FGK02]. O. B. d. A. beschränken wir uns in unseren Betrachtungen auf den Produktgraphen G_3 . Gibt es im Hypergraphen H die beiden Kanten (a_1, b_1, z) und (a_2, b_2, z) , so werden in G die beiden Kanten $(a_1, a_2) - (b_1, b_2)$ und $(a_2, a_1) - (b_2, b_1)$ gebildet. Nun fixieren wir den Knoten (a_1, a_2) in G_3 . In den Zufallsvariablen $X = X(H, a_1, a_2)$ und $Y = Y(H, a_1, a_2)$ werden wir die Kantenpaare aus H zählen, die eine Kante mit dem Endpunkt (a_1, a_2) in G_3 erzeugen. Hierzu definieren wir zunächst die Indikatorzufallsvariablen $X_z = X_z(H, a_1, a_2)$ und $Y_z = Y_z(H, a_1, a_2)$, die uns angeben, ob eine in (a_1, a_2) endende Kante bezüglich z gebildet wurde. Wir unterscheiden ebenfalls, ob $a_1 = a_2$ gilt. Ein ungeordnetes Kantenpaar $\{(a_1, b_1, z), (a_2, b_2, z)\}$ des Hypergraphen erzeugt die zwei verschiedenen Kanten $(a_1, a_2) - (b_1, b_2)$ und $(a_2, a_1) - (b_2, b_1)$ des Produktgraphen. Betrachten wir dagegen geordnete Paare, so kann eine Produktgraphkante mit dem Endpunkt (a_1, a_2) durch ein Kantenpaar $((a_1, \cdot, z), (a_2, \cdot, z))$ oder durch ein Paar $((\cdot, a_1, z), (\cdot, a_2, z))$ erzeugt werden. Den ersten Fall zählen wir in X_z , den zweiten in Y_z :

$$X_z = \begin{cases} 1 : & a_1 \neq a_2, \exists b_1 \text{ und } \exists b_2 \text{ mit } (a_1, b_1, z), (a_2, b_2, z) \in E \\ 1 : & a_1 = a_2, \exists b_1 \text{ und } b_2 \text{ mit } (a_1, b_1, z), (a_2, b_2, z) \in E \text{ und } b_1 \neq b_2 \\ 0 : & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog definieren wir Y_z für das andere Paar, welches eine in (a_1, a_2) endende Kante generiert:

$$Y_z = \begin{cases} 1 : & a_1 \neq a_2, \exists b_1 \text{ und } \exists b_2 \text{ mit } (b_1, a_1, z), (b_2, a_2, z) \in E \\ 1 : & a_1 = a_2, \exists b_1 \text{ und } b_2 \text{ mit } (b_1, a_1, z), (b_2, a_2, z) \in E \text{ und } b_1 \neq b_2 \\ 0 : & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es seien jetzt $X = \sum_{z \in V} X_z$ und entsprechend $Y = \sum_{z \in V} Y_z$. Auf Grund dieser Definition gibt es für jede Kante in G_3 , die den Knoten (a_1, a_2) enthält, mindestens ein $X_z = 1$ bzw. $Y_z = 1$. Dies läßt bereits $d(a_1, a_2) \approx X + Y$ vermuten.

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

Die ursprünglichen Kantenpaare unterscheiden sich immer in der letzten Koordinate. Da die Kanten des Hypergraphen H unabhängig voneinander gezogen wurden müssen die Zufallsvariablen X_z bzw. Y_z alle voneinander unabhängig sein. Damit sind aber X und Y binomialverteilt. Mittels der Chernoff-Schranken werden wir die scharfe Konzentration von X und Y und damit auch die scharfe Konzentration der Summe $(X + Y)$ zeigen. Anschließend werden wir sehen, daß alle Knoten (a_1, a_2) des Produktgraphen G_3 den Grad $d(a_1, a_2) \sim X + Y$ haben.

Wir beginnen mit der Berechnung des Erwartungswertes $E[X_z]$. Zuerst betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, ob es in H zu den beiden Knoten a und z einen Knoten b gibt, so daß (a, b, z) eine Kante des Hypergraphen ist. Für den Knoten b gibt es n verschiedene Möglichkeiten. Mit $\varepsilon < 1/2$ gilt $np = o(1)$. Ferner sind alle Kanten aus H voneinander unabhängig. D. h. wir können die Siebformel (Gleichung 217) anwenden und erhalten $\text{Prob}[\exists b : (a, b, z) \in H] = np(1 - |o(1)|)$. Nun betrachten wir den Fall $a_1 \neq a_2$. Zwei Kanten (a_1, b_1, z) und (a_2, b_2, z) sind immer verschieden und damit immer unabhängig voneinander. In diesem Fall erhalten wir also

$$\begin{aligned} \text{Prob}[X_z = 1] &= \text{Prob}[\exists b_1 : (a_1, b_1, z) \in H] \cdot \text{Prob}[\exists b_2 : (a_2, b_2, z) \in H] \\ &= (np(1 - |o(1)|))^2 \\ &= n^2 \cdot p^2 \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned} \tag{77}$$

Nun betrachten wir den Fall $a_1 = a_2$. Hier muß $b_1 \neq b_2$ gelten. Damit sind die beiden Kanten wieder unabhängig. Zunächst fixieren wir a_1, b_1 und z . Die Wahrscheinlichkeit für die Kante (a_1, b_1, z) beträgt also p . Nun betrachten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß neben b_1 ein weiteres b_2 existiert, so daß (a_1, b_2, z) ebenfalls eine Kante aus H ist. Für b_2 gibt es nun $(n - 1)$ verschiedene, voneinander unabhängige Möglichkeiten. Für $\varepsilon < 1/2$ gilt immer noch $np = o(1)$ bzw. $(n - 1)p = o(1)$. Wir erhalten also $\text{Prob}[\exists b_2 : (a_1, b_2, z), (a_1, b_1, z) \in E / (a_1, b_1, z) \in E] = (n - 1)p(1 - |o(1)|)$. Nach dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \text{Prob}[X_z = 1] &= \sum_{z \in V} (n - 1)p(1 - |o(1)|) \cdot p \\ &= n^2 \cdot p^2 \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned} \tag{78}$$

In beiden Fällen gilt also $\text{Prob}[X_z = 1] = n^2 \cdot p^2 \cdot (1 + o(1))$. X_z ist eine Indikatorzufallsvariable, damit folgt ebenfalls $E[X_z] = n^2 \cdot p^2 \cdot (1 + o(1))$. Analog berechnen wir

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

$\text{Prob}[Y_z = 1] = \text{E}[Y_z] = n^2 \cdot p^2 \cdot (1 + o(1))$. Nun können wir die Erwartungswerte $\text{E}[X]$ und $\text{E}[Y]$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{E}[X] &= n \cdot \text{Prob}[X_z = 1] \\ &= n^3 \cdot p^2 \cdot (1 + o(1)) \\ &= c^2 n^{2\varepsilon} \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned} \tag{79}$$

Analog berechnen wir

$$\text{E}[Y] = c^2 n^{2\varepsilon} \cdot (1 + o(1)) . \tag{80}$$

Die Konzentrierung von X und Y um den Erwartungswert folgt aus den Chernoff-Schranken (Gleichung 223). Es sei $0 < \delta < 1$. Wir ermitteln:

$$\text{Prob}[|X - \text{E}[X]| \geq \delta \cdot \text{E}[X]] \leq 2 \cdot e^{-\delta^2 \cdot c^2 \cdot n^{2\varepsilon} (1+o(1))/3} . \tag{81}$$

Für eine geeignet gewählte Funktion $\delta = \delta(n) = o(1)$, z. B. $\delta(n) = 1/\ln n$ oder $\delta(n) = 1/n^{\varepsilon/2}$ gilt $2 \cdot \ln -\delta^2 \cdot c^2 \cdot n^{2\varepsilon} (1 + o(1))/3 \rightarrow -\infty$. Daraus folgt

$$\text{Prob}[|X - \text{E}[X]| \geq \delta \cdot \text{E}[X]] = o\left(\frac{1}{n^2}\right) . \tag{82}$$

Mit $\delta = o(1)$ folgt aus dieser Ungleichung für den Knoten (a_1, a_2) , daß $X(H, a_1, a_2) \sim c^2 n^{2\varepsilon}$ mit Wahrscheinlichkeit $o(1/n^2)$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es einen Knoten (x, y) gibt, für den dies nicht zutrifft, beträgt maximal $n^2 \cdot o(1/n^2) = o(1)$. Analog zeigt man die Konzentration von Y . Für fast alle Hypergraphen H gilt also, daß in allen Produktgraphen G_i in allen Knoten die Summe aus X und Y

$$(X + Y) = 2 \cdot n^{2\varepsilon} \cdot (1 + o(1)) \tag{83}$$

beträgt. Nun ist zu zeigen, daß für alle Knoten (a_1, a_2) zusätzlich $d(a_1, a_2) \sim (X + Y)$ gilt. Hierzu überlegen wir uns, in welchen Fällen $(X + Y)$ nicht den korrekten Grad widerspiegelt. Hier sind zwei prinzipielle Fälle zu unterscheiden. Zum einen ist es möglich, daß es ein $X_z = 1$ gibt, welches nicht für die Bestimmung des Grades aufsummiert werden darf. Zum anderen kann es ebenfalls möglich sein, daß es ein $X_z = 1$ gibt, für das mehrere Kanten bei der Ermittlung des Grades gezählt werden müssen. Wir werden nun zeigen, daß es eine Konstante $C \in \mathbb{N}$ gibt, so daß mit hoher Wahrscheinlichkeit für alle Knoten

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

(a_1, a_2) des Produktgraphen

$$|d(a_1, a_2) - (X + Y)| \leq C$$

gilt. Wenn der Grad jedes Knotens maximal um die Konstante C von $(X + Y)$ abweicht, so folgt aus der Konzentration von $(X + Y)$ die Konzentration der Grades.

Diesen Teil des Beweises werden wir in zwei Schritten vollziehen. Wie beschränken uns in den folgenden Betrachtungen auf die Variablen X_z . Diese Beobachtungen können anschließend analog auf die Y_z übertragen werden. Zuerst zeigen wir, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit für alle Knoten (a_1, a_2) des Produktgraphen sowie alle $X_z(H, a_1, a_2)$ gilt, daß die Anzahl der Kanten vom Typ $((a_1, a_2), V \times V)$ im Produktgraphen, die bei ihrer Konstruktion $X_z(H, a_1, a_2) = 1$ bewirken, nicht größer als eine Konstante C ist. Dies allein genügt jedoch noch nicht, um die Konzentration des Grades zu zeigen. Es wäre durchaus denkbar, daß für jedes $X_z(H, a_1, a_2) = 1$ entsprechend $C - 1$ Kanten im Produktgraphen existieren. Bei n verschiedenen z ergäbe dies einen Unterschied zwischen dem Grad eines Knotens sowie $(X + Y)$ von $2(C - 1)n$. Hier genügt es nun im zweiten Teil zu zeigen, daß die Anzahl der Knoten z durch eine Konstante C beschränkt ist, für die ein Knoten (a_1, a_2) im Produktgraphen existiert, so daß im Produktgraphen mehr als eine Kante existiert, deren Konstruktion $X_z(H, a_1, a_2) = 1$ bewirkt hat. Damit zeigen wir, daß es pro Knoten (a_1, a_2) eine konstante Anzahl an X_z gibt, deren Summation zu wenig bei der Gradermittlung beiträgt. Diese Differenz ist ebenfalls wieder durch eine Konstante beschränkt. Das Produkt der beiden Konstanten des ersten und des zweiten Teiles liefert nun die gesuchte Konstante.

Wir beginnen mit dem ersten Teil. Zunächst fixieren wir die Knoten a_1, a_2 und z mit $a_1 \neq a_2$. Damit im Produktgraphen ein Kante entsteht, die den Knoten (a_1, a_2) enthält und die Konstruktion $X_z = 1$ bewirkt muß der Hypergraph H sowohl eine Kante vom Typ $(\{a_1\}, V, \{z\})$ als auch eine Kante vom Typ $(\{a_2\}, V, \{z\})$ vorhanden sein. Zwei Kanten der Typen $(V, \{a_1\}, \{z\})$ und $(V, \{a_2\}, \{z\})$ generieren ebenfalls eine den Knoten (a_1, a_2) . Dies bewirkt jedoch $Y_z = 1$ anstelle von X_z . Die Anzahl der so gebildeten Kanten fließt bei der Betrachtung der Y_z ein. Das Kantenpaar $(a_1, a_1, z), (a_2, a_2, z)$ braucht nicht untersucht werden, da keine Schlingen im Produktgraphen erzeugt werden.

Wenn c_1 Kanten vom Typ $(\{a_1\}, V, \{z\})$ sowie c_2 Kanten vom Typ $(\{a_2\}, V, \{z\})$ vorliegen, so werden hierdurch maximal $C = c_1 \cdot c_2$ Kanten im Produktgraphen erzeugt.

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

Der Grad von (a_1, a_2) erhöht sich um $c_1 \cdot c_2$, in X_z wird jedoch nur 1 gezählt. Wir werden nun den Erwartungswert der $(c_1 + c_2)$ -Tupel an Hypergraphkanten bestimmen, die diese C Kanten im Produktgraphen bilden können. Zunächst notieren wir, daß es für $C, c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ maximal C Möglichkeiten gibt, das Produkt $C = c_1 \cdot c_2$ darzustellen. Die Kanten eines $(c_1 + c_2)$ -Tupels sind auf Grund von $a_1 \neq a_2$ voneinander unabhängig. Die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein eines solchen Tuples beträgt $p^{c_1+c_2}$. Sind c_1 und c_2 bekannt, so gibt es auf Grund der einen frei wählbaren Koordinate maximal $n^{c_1+c_2}$ viele Tupel. Damit beträgt der Erwartungswert maximal

$$\sum_{C=c_1 \cdot c_2} n^{c_1+c_2} \cdot p^{c_1+c_2} = \sum_{C=c_1 \cdot c_2} n^{(\varepsilon-1/2) \cdot (c_1+c_2)} \cdot (1 + o(1))$$

Mit $\varepsilon < 1/2$ gilt $(\varepsilon - 1/2) \cdot (c_1 + c_2) < 0$ bzw. $0 < n^{(\varepsilon-1/2) \cdot (c_1+c_2)} < 1$. Es ergibt sich somit eine obere Schranke für die Summanden, wenn die Summe $c_1 + c_2$ minimiert wird. Unter der Bedingung $C = c_1 \cdot c_2$ gilt $c_1 + c_2 \geq 2\sqrt{C}$. Somit ist der Erwartungswert nicht größer als

$$C \cdot n^{(\varepsilon-1/2) \cdot 2 \cdot \sqrt{C}} \cdot (1 + o(1)) .$$

Mit $C > 36/(1 - 2\varepsilon)^2 > 9/(1 - 2\varepsilon)^2$ gilt $(\varepsilon - 1/2) \cdot 2 \cdot \sqrt{C} < -3$. Wir erhalten somit für den Erwartungswert $o(1/n^3)$.

Nun betrachten wir im ersten Teil den Fall $a_1 = a_2$. Liegen c_1 Kanten vom Typ $(\{a_1\}, V \setminus \{a_1\}, \{z\})$ vor, so werden hieraus genau $C = c_1(c_1 - 1)$ viele relevante Kanten im Produktgraphen gebildet. Es steht also der Wert $c_1 \approx \sqrt{C}$ fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein c_1 vieler konkreter Kanten beträgt p^{c_1} . Für die zweite Koordinate gibt es $(n - 1)$ Wahlmöglichkeiten. Bei c_1 vielen Kanten ergibt dies maximal n^{c_1} viele Varianten. Der Erwartungswert beträgt nun in diesem Fall höchstens

$$\begin{aligned} n^{c_1} \cdot p^{c_1} &= n^{(\varepsilon-1/2) \cdot c_1} \cdot (1 + o(1)) \\ &\leq n^{(\varepsilon-1/2) \cdot \sqrt{C}} \cdot (1 + o(1)) \end{aligned} \tag{84}$$

Es ist wieder $\varepsilon - 1/2 < 0$. Für $C > 36/(1 - 2\varepsilon)^2$ gilt $(\varepsilon - 1/2) \cdot \sqrt{C} < -3$. Damit ist auch hier der Erwartungswert $o(1/n^3)$.

In beiden Fällen beträgt der Erwartungswert $o(1/n^3)$. Aus der Markoff-Ungleichung folgt damit für eine hinreichend große Konstante C sowie die Knoten a_1, a_2 und z , daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es mindestens C Produktgraphkanten gibt, deren Erzeu-

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

gung $X_z(H, a_1, a_2) = 1$ oder $Y_z(H, a_1, a_2) = 1$ ergibt, $o(1/n^3)$ beträgt. Berechnen wir nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es wenigstens ein Knotentupel (a_1, a_2, z) gibt, so erhalten wir $n^3 \cdot o(1/n^3) = o(1)$.

Im zweiten Teil halten wir wieder die Knoten a_1 und a_2 fest. Wir wollen nun zeigen, daß es maximal C verschiedene Knoten z gibt, so daß mehr als eine Kante im Produktgraphen über z konstruiert wird, die den Knoten (a_1, a_2) enthält. Man überlegt sich leicht, daß hierfür mindestens drei Kanten aus H erforderlich sind. Auf der 3. Koordinate steht der Knoten z , die erste oder die zweite Koordinate enthält einen der Knoten a_1 oder a_2 . Die Anzahl solcher Kantentripel ist somit eine obere Schranke für die Anzahl der gesuchten Knoten z . Wir berechnen nun den Erwartungswert für das Vorliegen von C verschiedenen Tripeln. Ein Tripel besteht aus drei verschiedenen Kanten, alle Tripel sind verschieden voneinander. Die Wahrscheinlichkeit, daß H genau diese $3C$ Kanten enthält beträgt folglich p^{3C} . Eine Kante im Tripel enthält entweder auf Position 1 oder auf Position 2 einen der Knoten a_1 oder a_2 . Dies sind pro Kante vier verschiedene Möglichkeiten. Über alle C Tripel zählen wir hier 4^{3C} Möglichkeiten. Pro Tripel kann einer von maximal n möglichen Knoten z ausgewählt werden. Pro Kante im Tripel gibt es nun einen weiteren frei wählbaren Knoten. Dies ergibt pro Tripel n^4 Varianten bzw. insgesamt n^{4C} Möglichkeiten. Wir haben also maximal $4^{3C} \cdot n^{4C}$ verschiedene Möglichkeiten, C geeignete Kantentripel in H auszuwählen. Somit berechnen wir den Erwartungswert aus:

$$\begin{aligned} 4^{3C} \cdot n^{4C} \cdot p^{3C} &= (4c)^{3C} \cdot n^{(3\varepsilon - 9/2 + 4)C} \cdot (1 + o(1)) \\ &= (4c)^{3C} \cdot n^{(3\varepsilon - 1/2)C} \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon < 1/6$ gilt $3\varepsilon - 1/2 < 0$. Wählen wir $C > 2/(1/2 - 3\varepsilon)$, so ist $3\varepsilon - 1/2C < -2$ bzw. der Erwartungswert beträgt $o(1/n^2)$. Damit beträgt nach der Markoff-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es C verschiedene Knoten z gibt, zu denen mehr als eine in (a_1, a_2) endende Produktgraphkante generiert wird, ebenfalls $o(1/n^2)$. Betrachten wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es wenigstens einen solchen Knoten im Produktgraph gibt, so erhalten wir $n^2 \cdot o(1/n^2) = o(1)$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Erst im letzten Teil des Beweises ist die Einschränkung $\varepsilon < 1/6$ notwendig. Es ist zu vermuten, daß eine bessere Analyse der Abweichung der Summe $(X+Y)$ vom Grad eines Knotens das Lemma für $0 < \varepsilon < 1/2$ beweist. Hier zeigt sich ein weiterer interessanter Aspekt des Beweises. Würde anstelle eines einfachen Graphen ein Multigraph erzeugt

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

werden, indem jedes geeignete Kantenpaar aus H zwei neue Kanten im Produktgraphen generiert, so kann der Beweis analog durchgeführt werden. Der letzte Teil darf sogar entfallen, da nun Mehrfachkanten zulässig sind. Damit gilt dann das Lemma sogar für $0 < \varepsilon < 1/2$.

Im Gegensatz zu dem eben betrachteten Projektionsgraphen werden im Produktgraphen die Kanten nicht mehr unabhängig voneinander gezogen. Auf Grund der verwendeten Konstruktion sind die Abhängigkeiten nicht zu groß, so daß hier eine gleichwertige Aussage bewiesen werden kann:

Lemma 4.7. *Es sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer gerichteter Hypergraph aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p = c(1 + o(1))n^\varepsilon/n^{3/2}$. Ferner seien $0 < \varepsilon < 1/6$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ Konstanten. Für fast alle Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ weisen alle Produktgraphen $G_i(H) = (V \times V, E_i)$ bezüglich aller Koordinaten i mit $1 \leq i \leq 3$ eine geringe Diskrepanz auf.*

Das Lemma entspricht dem Korollar 1 (b) in [GJ02] bzw. ist eine Folgerung des Theorems 18 in [FGK02], es wird daher ohne Beweis angegeben. In [FGK02] erfolgt eine ähnliche Konstruktion eines Produktgraphen, die an Stelle des 3-uniformen Hypergraphen 3-SAT-Formeln verwendet. Der Beweis dieses Theorem nutzt ebenfalls die Spurmethode. Bei den hier verwendeten Kantenwahrscheinlichkeiten ist die Anzahl der Kantenpaare im Hypergraphen, die die selbe Kante im Produktgraphen induzieren, im Verhältnis zur Gesamtzahl der Kanten im Produktgraphen vernachlässigbar. Das Lemma kann also auch als Spezialfall des noch folgenden Theorems 5.13 gesehen werden, indem die gleiche Aussage bei der Verwendung von Mehrfachkanten im Produktgraphen bewiesen wird.

Im vorigen Kapitel wurden effiziente Methoden vorgestellt, um die geringe Diskrepanz bzw. Fast- d -Regularität nachzuweisen. Wie eben gezeigt wurde, sind fast alle betrachteten zufälligen Hypergraphen fast d -regulär bzw. haben eine geringe Diskrepanz. Interessant ist jedoch, daß für diese Hypergraphen die Produktgraphen und die Projektionsgraphen analoge Eigenschaften haben, welche effizient verifiziert werden können. Wir werden nun untersuchen, wie die geringe α -Diskrepanz auf die Projektionsgraphen sowie die Produktgraphen zurückgeführt werden kann. Das Ziel ist letztendlich ein Algorithmus, der effizient verschiedene Eigenschaften der Produkt- und Projektionsgraphen verifiziert und dadurch die geringe Diskrepanz eines Hypergraphen beweist. Der folgende Satz und sein Beweis entsprechen im Wesentlichen dem Theorem 5 in [GJ02]. Wir werden sehen, daß es für den Nachweis der geringen Diskrepanz eines stark d -regulären

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

Hypergraphen H genügt, die geringe Diskrepanz seiner Projektions- und Produktgraphen nachzuweisen:

Theorem 4.8. *Es sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer gerichteter Hypergraph mit $|V| = n$, $0 \leq \alpha(n) \leq 1$ sowie $d = d(n) \rightarrow \infty$. H zeigt eine geringe α -Diskrepanz, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. H ist stark d -regulär.
2. Alle Projektionsgraphen $G_{i,j}(H)$ mit $1 \leq i < j \leq 3$ zeigen geringe α -Diskrepanz.
3. Alle Produktgraphen $G_k(H)$ mit $1 \leq k \leq 3$ zeigen geringe α^2 -Diskrepanz sowie geringe $(1 - \alpha)^2$ -Diskrepanz.

Beweis. Es seien wieder $G_{i,j} = G_{i,j}(H) = (V, E_{i,j})$ die Projektionsgraphen bezüglich der Koordinaten i und j sowie $G_i = G_i(H) = (V \times V, E_i)$ die Produktgraphen bezüglich der Koordinaten i von H .

Es bezeichne weiter $m_{(A,B,\dots)}(G)$ die Anzahl der Kanten vom Typ (A, B, \dots) im Graphen bzw. Hypergraphen G . Die Anzahl aller Kanten sei $m(G)$. Der vorliegende gerichtete 3-uniforme Hypergraph $H = (V, E)$ habe $m = m(H) = |E|$ Kanten. Wir untersuchen zunächst, wieviele Kanten die Projektions- bzw. Produktgraphen haben müssen, wenn wir voraussetzen, daß der Hypergraph H fast d -regulär ist. Aus Lemma 4.3 wissen wir, daß

$$m(G_{i,j}) = m \cdot (1 + o(1)) \quad \text{und} \quad m(G_i) = \frac{m^2}{n} \cdot (1 + o(1))$$

gilt.

Der Hypergraph H ist stark d -regulär. Damit kann die Anzahl der Kanten des Hypergraphen, die zusammen auf eine Kante des Projektionsgraphen abgebildet werden, vernachlässigt werden.

Für den Nachweis der geringen Diskrepanz müssen nur hinreichend große Knotenmengen $X \subseteq V$ betrachtet werden. Es sei also im weiteren $|X| \neq o(1)$ bzw. es existiert eine Konstante $\varepsilon' > 0$, so daß $\varepsilon'n < |X|$ erfüllt ist. Dies gelte auch für die andere Teilmenge $Y = V \setminus X$. Insbesondere notieren wir $|X|, |Y| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Betrachten wir die Kanten vom Typ (X, X, V) in H , so erhalten wir analog zu Lemma 4.3, daß

$$m_{(X,X)}(G_{1,2}) = m_{(X,X,V)}(H) \cdot (1 + o(1))$$

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

Kanten vom Typ (X, X) im Projektionsgraphen $G_{1,2}$ generiert werden. Andererseits kann man hieraus, wenn die Anzahl der Kanten vom Typ (X, X) bekannt sind, auf die Anzahl der Kanten vom Typ (X, X, V) in H schließen. Analoge Aussagen erhalten wir ebenfalls wieder für die Anzahl an Kanten vom Typ (Y, Y) in $G_{1,2}$.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen kann der eigentliche Beweis durchgeführt werden. Wir werden nun immer annehmen, daß der Hypergraph stark d -regulär ist und die beiden Graphen $G_{1,2}$ und G_3 bzw. alle weiteren Projektions- und Produktgraphen die geforderte geringe Diskrepanz zeigen. Hierfür untersuchen wir alle Kantentypen der Definition 3.4. Für jeden dieser Typen nehmen wir jeweils an, daß die Kanten dieses Typs nicht dem Lemma genügen. Daraus berechnen wir dann die Anzahl der Kanten eines bestimmten Typs im Projektionsgraphen und zeigen, daß sich daraus ein Widerspruch ergibt. Die Definition 3.4 umfaßt acht verschiedene Kantentypen. Während des Beweises ergibt es sich aber, daß wir uns nur auf zwei verschiedene Fälle konzentrieren müssen.

Zuerst betrachten wir die Kanten vom Typ (X, X, X) in H . Gemäß der Definition 3.4 ist $|X| = (\alpha + o(1))n$ und $Y = V \setminus X$ bzw. $Y = (1 - \alpha - o(1))n$. Für den Widerspruchsbeweis nehmen wir an, daß $m_{(X,X,X)}$ nicht der Definition 3.4 genügt. Es existiert also ein $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, n)$ mit $\varepsilon \neq o(1)$, so daß sich die Anzahl der Kanten vom Typ (X, X, X) als

$$m_{(X,X,X)}(H) = (\alpha^3 + \varepsilon) m(1 + o(1))$$

darstellen läßt. (Dabei darf ε sowohl positiv als auch negativ sein.) Hieraus können wir aber sofort die Anzahl der Kanten vom Typ (X, X, Y) bestimmen. Der Projektionsgraph $G_{1,2}$ zeigt eine geringe α -Diskrepanz. Gemäß Definition 2.2 gibt es

$$m_{(X,X)}(G_{1,2}) = \alpha^2 m(G_{1,2})(1 + o(1)) = \alpha^2 m(1 + o(1))$$

Kanten vom Typ (X, X) im Projektionsgraphen. Daraus können wir aber schließen, daß der Hypergraph H

$$m_{(X,X,V)} = \alpha^2 m(1 + o(1))$$

Kanten vom Typ (X, X, V) enthalten muß. Eine Kante vom Typ (X, X, V) ist entweder vom Typ (X, X, X) oder vom Typ (X, X, Y) , da $V = X \cup Y$ gilt. Hieraus ergibt sich

$$m_{(X,X,V)}(H) = m_{(X,X,X)}(H) + m_{(X,X,Y)}(H)$$

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

bzw.

$$\begin{aligned} m_{X,X,Y}(H) &= \left(\alpha^2 - (\alpha^3 + \varepsilon) \right) m(1 + o(1)) \\ &= \left(\alpha^2(1 - \alpha) - \varepsilon \right) m(1 + o(1)) . \end{aligned}$$

Nun betrachten wir, welche Kanten im Produktgraphen G_3 durch die Kanten vom Typ (X, X, X) bzw. (X, X, Y) in H erzeugt werden. Es sind immer Kanten vom Typ $((X \times X), (X \times X))$. Diese Kanten des Produktgraphen können aber nur durch Kanten vom Typ (X, X, V) , also nur durch Kanten vom Typ (X, X, X) bzw. (X, X, Y) gebildet werden. Die Konstruktion erfordert einen gemeinsamen Knoten für das erzeugende Kantenpaar. Es ist also nicht möglich, das eine Kante vom Typ (X, X, X) zusammen mit einer Kante vom Typ (X, X, Y) eine neue Kante im Produktgraphen bildet.

Zuerst berechnen wir, wieviele Produktgraphkanten durch die Kanten des Typs (X, X, X) gebildet werden. Analog zum Grad sei $g(x)$ die Anzahl der Kanten vom Typ $(X, X, \{x\})$. Bezüglich des Knoten x werden im Produktgraphen maximal $2 \cdot \binom{g(x)}{2} = g(x)^2 - g(x)$ Kanten gebildet. Es ist durchaus möglich, daß es in H mehrere Kantenpaare gibt, die die gleiche Produktgraphkante generieren. Nun können wir von allen Kanten des Typs (X, X, V) nur diejenigen auswählen, daß jede Produktgraphkante vom Typ $(X \times X, X \times X)$ nur von einem Kantenpaar generiert wird. Eine solche Auswahl sei bezüglich der generierten Produktgraphkanten maximal. Es sei nun $g'(x)$ die Anzahl dieser Kanten vom Typ $(V, V, \{x\})$. Für die Anzahl Kanten des Typs $(X \times X, X \times X)$ im Produktgraphen gilt offensichtlich:

$$\sum_{x \in V} \left(g'(x)^2 - g'(x) \right) \leq m_{(X \times X, X \times X)}(G_3) \leq \sum_{x \in V} \left(g(x)^2 - g(x) \right) .$$

Die Anzahl Kanten der Art (X, X, V) berechnet sich aus

$$m_{(X,X,V)} = \sum_{x \in V} g(x). \tag{85}$$

Die Anzahl Kanten vom Typ (X, X, X) und (X, X, Y) kann entsprechend aus

$$m_{(X,X,X)} = \sum_{x \in X} g(x) \tag{86}$$

$$m_{(X,X,Y)} = \sum_{x \in Y} g(x) . \tag{87}$$

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

bestimmt werden.

Aus der starken d -Regularität folgt, daß es kaum Kanten in H gibt, so daß Produktgraphkanten mehrfach generiert werden. Analog zu Lemma 4.3 folgern wir aus der starken d -Regularität

$$\sum_{x \in V} (g(x) - g'(x)) = o(m) . \quad (88)$$

Unter Verwendung der Gleichungen 85 bis 88 kann nun die Anzahl an Kanten eines Typs (X, X, \cdot) als Summe der entsprechenden $g'(x)$ dargestellt werden:

$$m_{(X, X, V)} = \sum_{x \in V} (g'(x) - o(m)) \quad (89)$$

$$m_{(X, X, X)} = \sum_{x \in X} (g'(x) - o(m)) \quad (90)$$

$$m_{(X, X, Y)} = \sum_{x \in Y} (g'(x) - o(m)) . \quad (91)$$

Nun können wir eine untere Schranke für die gebildeten Produktgraphkanten des Typs $(X \times X, X \times X)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} m_{(X \times X, X \times X)}(G_3) &\geq \sum_{v \in V} (g'(v)^2 - g'(v)) \\ &\geq \sum_{x \in X} g'(x)^2 + \sum_{y \in Y} g'(y)^2 - \sum_{v \in V} g'(v) \\ \Rightarrow m_{(X \times X, X \times X)}(G_3) &\geq \sum_{x \in X} g'(x)^2 + \sum_{y \in Y} g'(y)^2 - m_{X, X, V}(H) . \end{aligned}$$

Aus der geringen Diskrepanz der Projektionsgraphen wissen wir $m_{X, X, V}(H) \sim \alpha^2 m$. Auf die beiden Summen können wir die Jensensche Ungleichung (230) anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} m_{(X \times X, X \times X)}(G_3) &\geq \left(\alpha n \left(\frac{\sum_{x \in X} g'(x)}{\alpha n} \right)^2 + (1 - \alpha) n \left(\frac{\sum_{x \in Y} g'(x)}{(1 - \alpha) n} \right)^2 - \alpha^2 m \right) \\ &\quad \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned}$$

4 Diskrepanz von Hypergraphen und einfache Graphen

Die beiden Summen werden entsprechend den Gleichungen 90 und 91 ersetzt:

$$\begin{aligned}
 m_{(X \times X, X \times X)}(G_3) &\geq \left(\frac{\left(m_{(X, X, X)}(H) - o(m)\right)^2}{\alpha n} + \frac{\left(m_{(X, X, Y)}(H) - o(m)\right)^2}{(1 - \alpha)n} - \alpha^2 m \right) \\
 &\quad \cdot (1 + o(1)) \\
 &= \left(\frac{m_{(X, X, X)}^2(H)}{\alpha n} + \frac{m_{(X, X, Y)}^2(H)}{(1 - \alpha)n} - \frac{2m_{(X, X, X)} \cdot o(m) + o(m^2)}{\alpha n} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2m_{(X, X, Y)} \cdot o(m) + o(m^2)}{(1 - \alpha)n} - \alpha^2 m \right) \cdot (1 + o(1)) \\
 &= \left(\frac{m_{(X, X, X)}^2(H)}{\alpha n} + \frac{m_{(X, X, Y)}^2(H)}{(1 - \alpha)n} - o\left(\frac{m^2}{n}\right) - \alpha^2 m \right) \cdot (1 + o(1)) .
 \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir $m_{(X, X, X)}(H) \sim (\alpha^3 + \varepsilon)m$ und $m_{(X, X, Y)}^2(H) \sim (\alpha^2(1 - \alpha) - \varepsilon)m$ entsprechend der Gegenannahme ein. Dies führt zu:

$$\begin{aligned}
 m_{(X \times X, X \times X)}(G_3) &\geq \left(\frac{(\alpha^3 + \varepsilon)^2}{\alpha} \cdot \frac{m^2}{n} + \frac{(\alpha^2(1 - \alpha) - \varepsilon)^2}{1 - \alpha} \cdot \frac{m^2}{n} - o\left(\frac{m^2}{n}\right) \right) \cdot (1 + o(1)) \\
 &= \left(\left(\alpha^5 + 2\alpha^2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \right) + \left(\alpha^4 - \alpha^5 - 2\alpha^2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{1 - \alpha} \right) \right) \\
 &\quad \cdot m(G_3)(1 + o(1)) \\
 \Rightarrow m_{(X \times X, X \times X)}(G_3) &\geq \left(\alpha^4 + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{\alpha(1 - \alpha)}}_{\neq o(1), > 0} \right) \cdot m(G_3)(1 + o(1)) . \tag{92}
 \end{aligned}$$

Die Menge X hat eine Größe von $|X| = (\alpha + o(1))n$. Damit gibt es genau $(\alpha^2 + o(1))n^2$ Knoten aus $(X \times X)$ im Produktgraphen G_3 . Dieser zeigt laut Voraussetzung eine geringe α^2 -Diskrepanz. Damit gilt aber entsprechend Definition 2.2:

$$m_{((X \times X), (X \times X))}(G_3) = \alpha^4 \cdot m(G_3) \cdot (1 + o(1)) . \tag{93}$$

Die Ungleichungen 92 und die Gleichung 93 stellen aber für $\varepsilon \neq o(1)$ und hinreichend großes n einen Widerspruch dar. Damit genügt also die Anzahl Kanten vom Typ (X, X, X) in H der Definition. Während des Beweises wurde gezeigt, daß sich die Anzahl der Kanten vom Typ (X, X, Y) aus der Anzahl der Kanten vom Typ (X, X, X) berechnen läßt. Hier ergibt sich ebenfalls die korrekte Anzahl. Während der Betrachtungen zum

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Kantentyp (X, X, X) kann o. B. d. A. X mit Y sowie α mit $(1 - \alpha)$ vertauscht werden. Hieraus folgt dann sofort, daß die Anzahl an Kanten vom Typ (Y, Y, Y) bzw. vom Typ (Y, Y, X) ebenfalls der Definition genügt.

Beim Vorliegen der geringen α -Diskrepanz folgt sofort die geringe $(1 - \alpha)$ -Diskrepanz aus der Definition. Die noch fehlenden Beweise für die Kantenzahlen der noch nicht untersuchten Kantentypen (X, Y, X) , (Y, X, Y) , (X, Y, Y) und (Y, X, X) folgen nun analog unter Verwendung der entsprechenden Projektions- und Produktgraphen. \square

Für den Nachweis der geringen Diskrepanz eines Hypergraphen folgt nun unmittelbar

Korollar 4.9. *Es sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer gerichteter Hypergraph mit $|V| = n$, sowie $d = d(n) \rightarrow \infty$. H zeigt eine geringe Diskrepanz, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

1. H ist stark d -regulär.
2. Alle Projektionsgraphen $G_{i,j}(H)$, $1 \leq i < j \leq 3$ zeigen geringe Diskrepanz.
3. Alle Produktgraphen $G_k(H)$, $1 \leq k \leq 3$ zeigen geringe Diskrepanz.

Aus dem Korollar ergibt sich die Vorgehensweise zum Nachweis der geringen Diskrepanz eines 3-uniformen gerichteten Hypergraphen H . Zuerst überprüft man die Konzentrierung aller Grade sowie aller $D'(x)$. Anschließend generiert man alle Projektions- und Produktgraphen und überprüft deren geringe Diskrepanz mittels der Eigenwerte der Adjazenzmatrix. Auf eine exakte Formulierung des Algorithmus wird an dieser Stelle verzichtet. Es kann sinngemäß der folgende Algorithmus 5.19 verwendet werden, der die geringe Diskrepanz unter der Verwendung von Multigraphen nachweist.

5 Nachweis der geringen Diskrepanz von Hypergraphen mittels Multigraphen

5.1 Der Projektions- und der Produktmultigraph

In den letzten Abschnitten wurde gezeigt, daß zufällige gerichtete Hypergraphen aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit $p = cn^\varepsilon/n^2$ und $1/2 < \varepsilon < 2/3$ effizient auf geringe Diskrepanz getestet werden können. Dichtere zufällige Hypergraphen, also $\varepsilon \geq 1/2$, haben nach Lemma 3.6 ebenfalls eine geringe α -Diskrepanz. Für diese Hypergraphen versagt aber der Test. Dies liegt daran, daß die Anzahl der Kanten, die ein Knotenpaar gemeinsam haben, signifikant ansteigt. Damit ist das Lemma 3.13 nicht mehr erfüllt und der Hypergraph nicht

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

mehr stark d -regulär. Damit entfallen die Aussagen über die Diskrepanz der Projektions- und Produktgraphen. Besonders deutlich sieht man dies am Beispiel der Projektionsgraphen. Hat der Hypergraph H eine Kantenwahrscheinlichkeit von $p = n^\varepsilon/n^2$ mit $\varepsilon \geq 1$, so liegt der Erwartungswert für den Grad eines Knotens auf einer bestimmten Position im Hypergraphen bei $n^\varepsilon \geq n$ für $\varepsilon \geq 1$. Damit sind aber für alle $\varepsilon \geq 1$ nahezu vollständige Projektionsgraphen zu erwarten. Aus diesen Graphen kann man keine Rückschlüsse mehr über die Anzahl der Kanten im Hypergraphen oder dessen Diskrepanz mehr ziehen.

Eine Alternative bietet sich hier an, indem Mehrfachkanten bei den Projektions- und Produktgraphen zugelassen werden. Aus diesen können die nötigen Informationen gewonnen werden. Die bisherigen Aussagen über die Projektions- und Produktgraphen können nicht mehr angewandt werden, da diese sich auf einfache Graphen bezogen und nun aber Multigraphen vorliegen. Es müssen die bisher eingeführten Definitionen und gefundenen Lemmas für diese Multigraphen erweitert werden.

Wir können nun die Definitionen der Multigraphen bzw. gewichteten Graphen nutzen, um Projektions- bzw. Produktgraphen zu definieren, die mehr Informationen enthalten. Die nachfolgende Definition läuft darauf hinaus, daß für jede Kante des Hypergraphen ebenfalls eine Kante in der Projektion entsteht. Auf die projizierte Kante wird nur verzichtet, wenn diese eine Schlinge bilden würde. Man beachte für die beiden folgenden Definitionen, daß e_i den i -ten Knoten in der Kante gerichteten Kante $e = (e_1, \dots, e_k)$ bezeichnet.

Definition 5.1 (Projektionsmultigraphen und gewichtete Projektionsgraphen).

Es sei $H = (V, E)$ ein r -uniformer gerichteter Hypergraph. Es sei weiter $\{i, j\} \subset \{1, \dots, k\}$. Der einfache, ungerichtete und gewichtete Graph $G_{i,j}(H) = (V, E_{i,j}, c_{i,j})$ heißt gewichteter Projektionsgraph von H bezüglich der Koordinaten i und j , wenn für alle Kantengewichte

$$c_{i,j}(u, v) = \begin{cases} \left| \left\{ e \in E : \begin{array}{l} (e_i=u \text{ und } e_j=v) \text{ oder} \\ (e_i=v \text{ und } e_j=u) \end{array} \right\} \right| & \text{für } u \neq v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Der Multigraph $M_{i,j}(H) = (V, F_{i,j}, f_{i,j})$ heißt Projektionsmultigraph von H bezüglich

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

der Koordinaten i und j , wenn

$$G(M_{i,j}(H)) = G_{i,j}(H)$$

gilt.

Analog definieren wir nun die Produktmultigraphen. In H erzeugt jetzt jedes Kantenpaar $((a_1, a_2, z), (b_1, b_2, z))$ bezüglich des Knoten z auf der dritten Koordinate zwei weitere Kanten e und h mit $f(e) = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ und $f(h) = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2)\}$.

Definition 5.2 (Produktmultigraphen und gewichtete Produktgraphen). *Es sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer gerichteter Hypergraph und $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Der einfache, ungerichtete und gewichtete Graph $G_i(H) = (V \times V, E_i, c_i)$ heißt gewichteter Produktgraph von H bezüglich der Koordinate i , wenn für alle Kantengewichte*

$$c_i((a, b), (c, d)) = \left| \left\{ \{e, g\} : e, g \in E, e_i = g_i, e \neq g, \begin{pmatrix} (e_j=a, g_j=b, e_k=c, g_k=d) \\ \text{oder} \\ (e_j=c, g_j=d, e_k=a, g_k=b) \end{pmatrix} \right\} \right|$$

gilt.

Der Multigraph $M_i(H) = (V \times V, F_i, f_i)$ heißt Produktmultigraph von H bezüglich der Koordinate i , wenn

$$G(M_i(H)) = G_i(H)$$

gilt.

5.2 Die Konzentrierung des Grades im Projektionsmultigraphen

Für die weiteren Betrachtungen ist es notwendig, daß der Hypergraph H relativ wenig Kanten enthält, in denen mindestens ein Knoten doppelt vorkommt – beispielsweise eine Kante (x, x, \dots) . Solche Kanten würden im Projektionsgraphen eine Schlinge erzeugen und werden deshalb nicht beachtet. Wir zeigen nun, daß diese Anzahl vernachlässigbar klein ist:

Lemma 5.3. *Es sei $D'_x(H)$ die Anzahl der Kanten des 3-uniformen gerichteten Hypergraphen, die den Knoten x enthalten und ein Knoten mindestens zweimal auftritt. Für fast alle Hypergraphen $H = (V, E)$ aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit $|E| = m$, $0 < \varepsilon < 2$ und $p = cn^{\varepsilon-2}(1 + o(1))$ gilt, daß die Anzahl dieser Kanten bei allen Knoten $x \in V$ für alle Koordinaten i*

$$D'_x(H) = o(d_i(x))$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

beträgt.

Beweis. In $D'_x(H)$ zählen wir also alle Kanten der Art (x, a, a) , (b, x, b) aber auch alle Kanten der Form (\cdot, x, x) oder (x, \cdot, x) bzw. (x, x, x) . Bevor wir mit dem Beweis beginnen schätzen wir den Erwartungswert $E[D'_x]$ ab. In etwa $3n$ möglichen Kanten kommt der Knoten x zweimal vor. In ebenfalls $3n$ Kanten kommt ein Knoten zweimal und zusätzlich der Knoten x vor. Damit beträgt $E[D'_x] \approx 6np \approx 6cn^\varepsilon/n$. Dies ist im Vergleich zu $d = cn^\varepsilon$ verschwindend gering. Will man nun jedoch zeigen, daß dies für alle Knoten fast aller Hypergraphen gilt und verwendet man hierzu einen üblichen Ansatz, beispielsweise die Nutzung der Markoff-Ungleichung, so führt dies leider nicht zum Ziel. Der nun folgende Beweis nimmt schon fast die Anwendung des Lemmas vorweg. Wir werden ausnutzen, daß der Grad aller Knoten scharf konzentriert ist und ebenfalls zeigen, daß der Grad ohne die Zählung der Kanten mit doppelten Knoten ebenfalls für alle Knoten scharf konzentriert ist. Daraus folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Es sei $d'_i(x) = d'_i(x, H)$ die Zufallsvariable, die für den Hypergraphen H die Anzahl von Kanten zählt, die an der Position i den Knoten x stehen haben und in denen kein Knoten doppelt vorkommt. All diese Kanten treten unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p auf. Es gibt insgesamt n^2 mögliche Kanten, die auf der i -ten Position den Knoten x stehen haben. Für die Positionen ungleich i gibt es insgesamt $n - 1$ Möglichkeiten, daß auf diesen beiden Positionen der gleiche Knoten (außer x) vorkommt. Ferner gibt es zusätzlich noch $2 \cdot (n - 1)$ viele Möglichkeiten, daß neben der Position i genau ein weiteres x in der Kante vorkommt. Der letzte zu beachtende Fall ist natürlich (x, x, x) . Damit müssen für $d'_i(x)$ genau $n^2 - (n - 1) + 2(n - 1) + 1 = n^2 - 3n + 2 = n^2(1 + o(1))$ viele potentielle Kanten betrachtet werden. Damit ist aber $d'_i(x)$ binomialverteilt mit den Parametern $(n^2 - 3n + 2; p)$. Nun gehen wir zurück zum Beweis von Lemma 3.10, wo die Konzentrierung des Grades $d_i(x)$ für alle Knoten fast aller Hypergraphen H bewiesen wurde. Hier stellten wir fest, daß der Grad $d_i(x)$ mit den Parametern $(n^2; p)$ binomialverteilt ist. Im Beweis des Lemmas 3.10 macht es keinen Unterschied, ob mit n^2 oder $n^2(1 + o(1))$ gerechnet wird. Damit betragen für alle Knoten x und alle Koordinaten i fast aller Graphen H die Werte

$$\begin{aligned} d_i(x) &= cn^\varepsilon(1 + o(1)) \text{ und} \\ d'_i(x) &= cn^\varepsilon(1 + o(1)) . \end{aligned} \tag{94}$$

Nun kommen wir zum Werte $D'_x(H)$ zurück. Wenn es eine Kante gibt, die den Knoten x zweimal enthält, so gibt es eine Koordinate i , so daß diese Kante in $d'_i(x)$ gezählt wird

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

und in $d'_i(x)$ nicht. Damit ergibt sich aber folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 D'_x &\leq \sum_{i=1}^3 (d_i(x) - d'_i(x)) \\
 &= o(1) \cdot cn^\varepsilon \\
 &= o(d).
 \end{aligned} \tag{95}$$

Dies gilt natürlich für alle Knoten und alle Koordinaten fast aller Hypergraphen H . \square

An dieser Stelle erfolgt nochmals ein kleiner Rückblick auf den Beweis des Lemmas 3.10. Bei der Anwendung der Chernoff-Schranke konnte $\delta(n) = 1/\ln^k n$ mit $k > 0$ verwendet werden. Es ist aber auch $\delta(n) = 1/(3 \ln^k n)$ geeignet. Dabei ist $k > 0$ eine Konstante. Es gilt also mit hoher Wahrscheinlichkeit $|d_i(x) - d|/d < 1/(3 \ln^k n)$ und $|d'_i(x) - d|/d < 1/(3 \ln^k n)$ für alle Knoten $x \in V$ sowie alle drei Koordinaten $1 \leq i \leq 3$. Hieraus folgt mit $d'_i(x) < d_i(x)$ aber sofort $d_i(x) - d'_i(x) \leq d/(3 \ln^k n)$ und damit

$$D'_x < 3d/(3 \ln^k n) = o(d) \tag{96}$$

für alle Knoten fast aller Hypergraphen. Dies ist wieder wichtig für eine effiziente Überprüfung. Die algorithmische Bestimmung von D'_x erfolgt leicht, indem alle Kanten überprüft werden. Dies führt uns zu Algorithmus 5.4 *Test_D'*.

Lemma 5.5. *Es sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer gerichteter Hypergraph und $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion mit $0 < g(n) < 1$ und $g(n) = o(1)$. Wendet man auf H den Algorithmus 5.4 *Test_D'* an, dann gilt:*

1. *Der Algorithmus liefert genau dann das Ergebnis TRUE, wenn für alle Knoten $x \in V$*

$$D'_x \leq g(n) \cdot d$$

gilt.

2. *Der Algorithmus hat polynomielle Laufzeit.*

Beweis. Offensichtlich bestimmt der Algorithmus in den Zeilen 1 bis 6 korrekt den Wert $D'[v] = D'_v$ für alle Knoten $v \in V$ entsprechend der Definition in Lemma 5.3. Die Schleife in Zeile 3 benötigt maximal $\binom{3}{2} = 3$ Durchläufe. Die Schleife in Zeile 1 wird für jeden Knoten, die in Zeile 2 für jede Kante einmal ausgeführt. In den Zeilen 7 und 8 wird für jeden Knoten v überprüft, ob D'_v hinreichend klein (vgl. wieder Lemma 5.3) ist. Die Antwort des Algorithmus ist also korrekt. Die Laufzeit beträgt $O(|V| + |E|) = O(n^3)$. \square

Algorithmus 5.4 (Test $D'(H, g(), d)$).

Eingabe: · $H = (V, E)$ - 3-uniformer gerichteter
 Hypergraph mit $|V| = n$
 · $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g(n) = o(1)$, $0 < g(n) < 1$
 · d // $d > 0$
 Ausgabe: TRUE / FALSE

1. FOR $i := 1$ TO n DO $D'[i] := 0$
2. FOR EACH $e = (v_1, v_2, v_3) \in E$ DO
3. FOR EACH $\{i, k\} \subset \{1, 2, 3\}$, $i < k$ DO
4. IF $v_i = v_k$ THEN {
5. $D'[v_i] := D'[v_i] + 1$
6. BREAK }
7. FOR $i := 1$ TO n DO
8. IF $\frac{D'[i]}{d} > g(n)$ THEN RETURN FALSE
9. RETURN TRUE

Nach Lemma 3.10 sind fast alle Hypergraphen $H = (V, E)$ aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ fast d -regulär. Nach Lemma 5.3 und insbesondere nach Gleichung 96 gilt ebenfalls $D'_x(H) \leq d/\ln^k n$ mit hoher Wahrscheinlichkeit für alle Knoten $x \in V$. Nach Lemma 5.5 kann dies in Polynomialzeit verifiziert werden. Analog zu Korollar 3.11 sind hier Funktionen der Art $\Theta(1/\ln^k n)$ für die Analysen geeignet. Dies führt zu

Korollar 5.6. Für fast alle Hypergraphen $H = (V, E)$ aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit $0 < \varepsilon < 2$, $p = cn^{\varepsilon-2}(1 + o(1))$, $d = cn^\varepsilon$ und einer Konstanten $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ zertifiziert der Algorithmus 5.4 Test D' mit $g(n) = 1/\lceil \ln n \rceil^k$ effizient, daß für alle $x \in V$

$$D'_x(H) \leq g(n) \cdot d \quad \text{und damit} \quad D'_x(H) = o(d)$$

gilt.

Die betrachteten zufälligen Hypergraphen sind fast regulär. Aus ihrer Fast-Regularität folgt aber auch auf Grund des Konstruktionsprozesses mit hoher Wahrscheinlichkeit die Fast-Regularität der Projektionsgraphen:

Lemma 5.7. *Es sei $H = (V, E)$ ein fast d -regulärer gerichteter 3-uniformer Hypergraph. Für alle Knoten $x \in V$ gelte $D'_x(H) = o(d)$. Dann sind alle Projektionsmultigraphen $M_{i,j}$ (bzw. alle gewichteten Projektionsgraphen $G_{i,j}$) fast $2d$ -regulär.*

Beweis:

Der Grad $d(x, M_{i,j})$ des Knotens x im Projektionsmultigraphen entspricht genau der Summe der beiden Grade $d_i(x)$ und $d_j(x)$ im Hypergraphen H abzüglich der Kanten, die eine Schlinge bilden würden. Dies sind Kanten des Hypergraphen, die an den Positionen i und j den Knoten x enthalten. Diese Kanten werden in $D'_x(H)$ gezählt. Davon gibt es aber nach der Voraussetzung für diesen Knoten x nur $o(d)$ viele. Diese Beobachtung gilt für alle Knoten $x \in V$. \square

5.3 Zusammenhang zwischen den Kanten im Hypergraphen und den Kanten im Projektions- bzw. Produktmultigraphen

In unseren Betrachtungen spielen 3-uniforme gerichtete Hypergraphen eine wichtige Rolle. Aus diesen Hypergraphen konstruieren wir Projektions- und Produktmultigraphen. Als erstes ist es natürlich wichtig zu wissen, wieviele Kanten durch die Konstruktion erzeugt werden. Im Falle von Projektionsmultigraphen erscheint dies einfach. Es sind fast so viele Kanten wie im Hypergraphen, wenn man die Kanten, die einen Knoten doppelt enthalten und somit in einem Projektionsgraphen eine Schlinge erzeugen würden, vernachlässigen kann. Aber auch im Produktgraphen kann die Anzahl der generierten Kanten ermittelt werden, wenn der Hypergraph fast regulär ist:

Lemma 5.8. *Es sei H ein fast d -regulärer 3-uniformer gerichteter Hypergraph. Für alle Knoten x gelte $D'_x(H) = o(d)$. Dann gilt für die Anzahl der Kanten $m(H)$ des Hypergraphen, für die Anzahl der Kanten $m(M_{i,j})$ aller Projektionsmultigraphen $M_{i,j}$ sowie für die Anzahl Kanten $m(M_i)$ aller Produktmultigraphen M_i :*

1. $m(H) = d \cdot n \cdot (1 + o(1))$,
2. $m(M_{i,j}) = m(H) \cdot (1 - |o(1)|)$ und
3. $m(M_i) = 2 \cdot \binom{d}{2} \cdot n \cdot (1 + o(1)) \sim \frac{(m(H))^2}{n}$

Beweis. Der Beweis gliedert sich wie das Lemma in drei Teile:

1. Der Hypergraph H ist fast d -regulär. Jeder Knoten x kommt damit für jede Position i in $d(1 + o(1))$ viele Kanten vor. Die Anzahl der Kanten in H erhält man u. a., indem man über die Grade aller Knoten bezüglich einer festen Koordinate

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

i summiert. Alle Grade sind auf Grund der Fast- d -Regularität konzentriert. Wir erhalten also: $m(H) = \sum_{x \in V} d_i(x) = d \cdot n \cdot (1 + o(1))$.

2. Jede Kante des Hypergraphen H erzeugt eine Kante im Projektionsmultigraphen $M_{i,j}(H)$, es sei denn, daß auf den Positionen i und j der Kante derselbe Knoten (Schlingenbildung) steht. Von diesen Kanten gibt es aber maximal $\sum_{x \in V} D'_x(H) = o(dn) = o(m(H))$ viele. Es gilt folglich $m(M_{i,j}) = m(H) - |o(m)|$.
3. Der Produktmultigraph enthält auf Grund der Konstruktion keine Schlingen. Wir ermitteln auch hier wieder zuerst die Anzahl von möglichen Schlingen und zeigen anschließend, daß diese Anzahl keinen bedeutenden Einfluß auf die Gesamtzahl der Kanten im Produktmultigraphen hat.

Die Knoten des Produktmultigraphen bestehen aus (geordneten) Paaren von Knoten des Hypergraphen H . Eine Schlinge im Produktmultigraph hätte beispielsweise die Form $(a, b) - (a, b)$. Betrachten wir o. B. d. A. M_3 , so muß es einen Knoten z in H geben, so daß die beiden Kanten (a, a, z) und (b, b, z) in H existieren. Wie dieses Beispiel zeigt, können auch hier Schlingen nur von Kanten gebildet werden, die einen Knoten doppelt enthalten. Für diesen Knoten z auf der letzten Position gibt es maximal $D'(z) = o(d)$ viele solcher Kanten.

Bezüglich eines Knoten z können maximal $2^{\binom{d(1+o(1))}{2}} \sim d^2$ viele Produktgraphkanten gebildet werden. Gleichzeitig erhalten wir $2^{\binom{D'(z)}{2}} \sim o(d^2)$ als obere Schranke für die Paare, die eine Schlinge erzeugen würden. Bezüglich eines Knoten z werden also $d^2(1 + o(1))$ viele Produktgraphkanten generiert. Summieren wir nun über alle Knoten, so erhalten wir die Anzahl der Kanten im Produktgraphen: $m(H_i) = \sum_{z \in V} d^2(1 + o(1)) = d^2 \cdot n \cdot (1 + o(1))$. Mit $m(H) \sim dn$ folgt nun unmittelbar die Behauptung. □

5.4 Geringe Diskrepanz des Projektionsmultigraphen

Im nächsten Lemma wird die Diskrepanz der Projektionsmultigraphen eines Hypergraphen mit geringer Diskrepanz untersucht. Wir werden feststellen, daß aus der geringen Diskrepanz des Hypergraphen die geringe Diskrepanz der Projektionsmultigraphen folgt. Damit wird die geringe Diskrepanz der Projektionsmultigraphen unser erstes notwendiges Kriterium zum Nachweis der geringen Diskrepanz eines Hypergraphen werden.

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Lemma 5.9. *Es sei $H = (V, E)$ ein gerichteter 3-uniformer Hypergraph mit geringer α -Diskrepanz. Für alle Knoten $x \in V$ gelte $D'_x(H) = o(d)$. Dann haben alle Projektionsmultigraphen $M_{i,j}$ (bzw. alle gewichteten Projektionsgraphen $G_{i,j}$) geringe α -Diskrepanz.*

Beweis. O.B.d.A. sei $i = 1$ und $j = 2$. Wir untersuchen also den Projektionsmultigraphen $M_{1,2}$. Wenn wir eine Knotenmenge X mit $|X| = (\alpha + o(1))n$ gemäß Definition 2.2 betrachten, dann werden alle Kanten, die nur aus Knoten von X bestehen, aus Hyperkanten des Typs (X, X, V) gebildet. Die Menge dieser Kanten unterteilt sich in Kanten des Typs (X, X, X) und (X, X, Y) . H hat geringe α -Diskrepanz. Damit gilt unter Verwendung des Lemmas 5.8 $m_{(X,X,X)}(H) = \alpha^3 \cdot m(H)(1+o(1)) = \alpha^2 \cdot \alpha \cdot m(M_{1,2})(1+o(1))$ sowie $m_{(X,X,Y)}(H) = \alpha^2 \cdot (1-\alpha) \cdot \alpha \cdot m(H)(1+o(1)) = \alpha^2 \cdot (1-\alpha) \cdot m(M_{1,2})(1+o(1))$. Die Anzahl der Kanten, die Schlingen ergeben könnten, beträgt maximal $|X| \cdot o(d) = o(m(M_{1,2}))$. Alle anderen Kanten vom Typ (X, X, V) ergeben genau eine Kante in $M_{1,2}$ mit Endpunkten in X . Dadurch gilt aber $m_{(X,X)}(M_{1,2}) = m_{(X,X,X)}(H) + m_{(X,X,Y)}(H) - |o(m(M_{1,2}))| = \alpha^2 \cdot m(M_{1,2}) \cdot (1 + o(1))$.

Für die Anzahl der Kanten zwischen X und $Y = V \setminus X$ kann analog verfahren werden. \square

Aus den Lemmata 3.6, 3.10, 5.7 und 5.9 folgt sofort

Korollar 5.10. *Es seien $c > 0$, und $0 < \varepsilon < 2$ Konstanten sowie $d = 2c \cdot n^\varepsilon$. Für fast alle Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ mit $p = cn^{\varepsilon-2}(1 + o(1))$ sind alle Projektionsmultigraphen $M_{i,j}(H)$ bzw. alle gewichteten Projektionsgraphen $G_{i,j}(H)$ fast d -regulär und haben eine geringe Diskrepanz.*

Wir können effizient überprüfen, ob ein Multigraph fast d -regulär ist. Hierfür muß jedoch noch der $o(1)$ -Term analysiert werden. Die Fast-Regularität folgte aus der Fast-Regularität des Hypergraphen sowie der Konzentrierung aller D'_x . Betrachtet man das Korollar 3.11 sowie die Gleichung 96 bzw. deren Herleitung, so gilt mit hoher Wahrscheinlichkeit für alle Knoten $x \in V$ des Projektionsgraphen:

$$|d_v - d|/d \leq 1/\ln^k n, \quad (97)$$

wobei $k \geq 1$ eine Konstante ist.

Für den Nachweis der geringen Diskrepanz können wir wieder auf die Eigenwertseparierung zurückgreifen. Dafür benötigen wir das nächste Theorem.

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Theorem 5.11. *Es seien $c > 0$ und $1/2 < \varepsilon < 2$ Konstanten, $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ sowie $p = cn^\varepsilon/n^2(1 - |o(1)|)$. Für fast alle 3-uniformen Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ haben die Adjazenzmatrizen aller Projektionsmultigraphen $M_{i,j}(H)$ (bzw. aller gewichteten Projektionsgraphen $G_{i,j}(H)$) Eigenwertseparierung.*

Beweis. Der Beweis erfolgt mittels der sogenannten Spurmethode (siehe auch [FK81, Fri91]). Zunächst erinnern wir uns, daß nach Korollar 5.10 für $d = cn^\varepsilon$ alle Projektionsmultigraphen fast aller betrachteter Hypergraphen fast $2d$ -regulär sind. Wir fixieren nun einen solchen Projektionsmultigraphen und beweisen hierfür das Lemma. Es wird also o. B. d. A. der Projektionsmultigraph $M_{1,2}(H)$ betrachtet. Die Adjazenzmatrix von $M_{1,2}(H)$ sei \mathbf{A} . Die nachfolgenden Analysen können analog für die anderen beiden Projektionsmultigraphen wiederholt werden. Hat nun jeder Projektionsmultigraph fast sicher die Eigenwertseparierung, so geht auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es mindestens einen Projektionsmultigraphen ohne Eigenwertseparierung gibt, gegen null.

Die (symmetrische) Adjazenzmatrix \mathbf{A} hat die n reellen Eigenwerte $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Der Projektionsmultigraph selbst ist fast $2c \cdot n^\varepsilon$ -regulär. Damit berechnet sich der größte Eigenwert nach Lemma 2.10 bzw. Gleichung 32 aus

$$\lambda_1 = 2c \cdot n^\varepsilon \cdot (1 + o(1)) \tag{98}$$

$$= \Omega(n^\varepsilon \cdot (1 + o(1))) . \tag{99}$$

Für die Eigenwertseparierung müssen wir nachweisen, daß eine gerade Konstante $k \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für die Eigenwerte der Adjazenzmatrix $\sum_{i>1} \lambda^k = o(\lambda_1^k)$ gilt. Dazu werden wir wie folgt vorgehen: Die Summe der Eigenwerte einer Matrix ist gleich der Spur der Matrix. In der k -ten Potenz der Adjazenzmatrix ist aber die Spur gleich der Anzahl der geschlossenen Wege der Länge k . Die Abschätzung des Erwartungswertes der Anzahl dieser Wege ergibt eine Abschätzung für den Erwartungswert der Summe $\sum_{i>1} \lambda^k$. Mittels der Markoff-Ungleichung zeigen wir, daß die Abweichung der Summe $\sum_{i>1} \lambda^k$ vom Erwartungswert nicht zu groß werden kann.

Bevor wir mit der Analyse fortfahren, betrachten wir den entstehenden Multigraphen etwas genauer. Auf Grund der Konstruktion können keine Schleifen entstehen. Zwischen zwei Knoten x und y im Projektionsmultigraphen gibt es genau dann eine Kante, wenn in dem zu Grunde liegenden Hypergraphen mindestens eine Kante vom Typ $(\{x\}, \{y\}, V)$ oder vom Typ $(\{y\}, \{x\}, V)$ existiert. Dies bedeutet aber, daß zwischen zwei Knoten im entstehenden Multigraphen maximal $2n$ Kanten verlaufen können. Jede der Kanten im

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Projektionsmultigraphen wird von genau einer Kante des ursprünglichen 3-uniformen Hypergraphen H erzeugt. Damit tritt jede dieser Kanten mit der Wahrscheinlichkeit $p = cn^\varepsilon/n^2(1 - |o(1)|)$ auf.

Ein geschlossener Weg der Länge k ist ein k -Tupel (e_1, \dots, e_k) von k Kanten mit $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ für $1 \leq i < k$ und $e_k = \{v_k, v_1\}$. Der Weg beginnt also im Knoten v_1 und endet auch wieder dort. Die Knoten und Kanten des Weges müssen nicht notwendigerweise voneinander verschieden sein. Gibt es zwischen zwei Knoten u und v eine Kante, so gibt es also von u nach u bzw. von v nach v geschlossene Wege der Längen 2 ($u-v-u$), 4, 6, usw. Auf die Bezeichnung Kreis wird an dieser Stelle verzichtet, da diese eher für geschlossene Wege verwendet wird, in denen jede Kante bzw. jeder Knoten genau einmal durchlaufen wird. Es sind ebenfalls zwei geschlossene Wege unterschiedlich, wenn sie zwar die gleichen Kanten enthalten aber diese in einer anderen Reihenfolge durchlaufen werden (bzw. wenn der Startknoten v_1 unterschiedlich ist).

Nach Lemma 2.11 finden wir die Anzahl der geschlossenen Wege der Länge k beginnend bei Knoten i auf dem i -ten Hauptdiagonalelement der Matrix \mathbf{A}^k . Es sei nun X die Zufallsvariable, die für den zufälligen Hypergraphen H die Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Wege der Länge k im Projektionsmultigraphen $M_{1,2}(H)$ zählt. Es gilt nun offensichtlich

$$X = \text{Spur } \mathbf{A}^k$$

und damit auch

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\text{Spur } \mathbf{A}^k].$$

Nach Lemma 10.10 ist für jeden Eigenwert λ_i der Matrix \mathbf{A} ebenfalls λ_i^k ein Eigenwert von \mathbf{A}^k . Lemma 10.5 und die Linearität des Erwartungswertes liefert uns nun:

$$\begin{aligned} \text{Spur } \mathbf{A}^k &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \\ \Rightarrow \mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\lambda_i^k] \\ \Rightarrow \mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^k\right] &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\lambda_1^k]. \end{aligned} \tag{100}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Wir beginnen nun mit der Berechnung von $E[\lambda_1^k]$. Für fast alle Hypergraphen unseres Modells ist $\lambda_1 = 2cn^\epsilon(1 + o(1))$ der größte Eigenwert der Adjazenzmatrix \mathbf{A} des Projektionsmultigraphen. Damit ist aber auch für fast alle Hypergraphen des Lemmas $\lambda_1^k = (2c)^k n^{k\epsilon}$ ein Eigenwert von \mathbf{A}^k . Auf Grund der scharfen Konzentration des Grades im Projektionsmultigraphen können wir nun leicht $E[\lambda_1^k]$ berechnen.

Ist der ursprüngliche Hypergraph nicht regulär, so erscheint es schwierig, λ_1^k zu berechnen. Wir wissen aber aus Lemma 2.10, daß der größte Eigenwert zwischen dem kleinsten und dem größten Grad liegt. Zwischen zwei Knoten haben wir maximal $2n$ Kanten. Damit beträgt der Grad eines Knotens und damit der größte Eigenwert von \mathbf{A} minimal null und maximal $(n-1)2n < 2n^2$. Damit gilt immer $0 \leq \lambda_1^k \leq 2^k n^{2k}$. Für Projektionsmultigraphen, die nicht fast $2d$ -regulär sind, können wir hiermit λ_1^k abschätzen.

Für die endgültige Berechnung des Erwartungswertes müssen wir nur noch wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit unser Projektionsmultigraph nicht fast $2d$ -regulär ist. Wir erinnern uns, daß die Fast- $2d$ -Regularität des Projektionsmultigraphen mittels Lemma 5.7 aus der Fast- d -Regularität des Hypergraphen H folgte. Die Fast- d -Regularität fast aller Hypergraphen H wurde in Lemma 3.10 bewiesen. Damit der Projektionsmultigraph nicht fast $2d$ -regulär ist, muß H nicht fast d -regulär sein. Damit ist aber auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Projektionsmultigraph nicht fast $2d$ -regulär ist, maximal so groß wie die Wahrscheinlichkeit, daß H nicht fast d -regulär ist. Nun sei $\delta(n) = o(1)$ so gewählt wie im Beweis zu Lemma 3.10, z. B. $\delta(n) = 1/\ln n$. Es bezeichne \mathcal{A} das Ereignis, daß $|\lambda_1 - 2d| \leq \delta \cdot 2d$ gilt sowie $\bar{\mathcal{A}}$ das entsprechende Komplementäreignis. Der größte Eigenwert λ_1 liegt zwischen dem größten und dem kleinsten Grad. Damit kann $\text{Prob}[\mathcal{A}]$ durch die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt werden, daß der Projektionsmultigraph nicht fast $2d$ -regulär ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist nicht größer als die Wahrscheinlichkeit, daß der Hypergraph H nicht fast d -regulär ist. Diese Wahrscheinlichkeit finden wir in der Gleichung 73 des Lemmas 3.10. Ist der Hypergraph nicht fast d -regulär, so kann der Grad eines Knoten zwischen 0 und n liegen. Damit wissen wir in diesem Fall nur $0 \leq \lambda_1 \leq 2n$ für den Projektionsmultigraphen. Daraus ergibt sich für ein konstantes und gerades k :

$$\begin{aligned} E[\lambda_1^k] &\geq (2c)^k \cdot n^{k\epsilon} \cdot (1 - \delta(n))^k \cdot \text{Prob}[\mathcal{A}] + 0 \cdot \text{Prob}[\bar{\mathcal{A}}] \\ \Rightarrow E[\lambda_1^k] &\geq (2c)^k \cdot n^{k\epsilon} \cdot (1 - \delta(n))^k \end{aligned} \tag{101}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

und

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\lambda_1^k \right] &\leq (2c)^k \cdot n^{k\varepsilon} \cdot (1 + \delta(n))^k \cdot \text{Prob} [\mathcal{A}] + 2^k \cdot n^{2k} \cdot \text{Prob} [\overline{\mathcal{A}}] \\
 &\leq (2c)^k \cdot n^{k\varepsilon} \cdot (1 + \delta(n))^k + 2^k \cdot n^{2k} \cdot 6 \cdot e^{\ln n - \delta^2 c(1+o(1))n^\varepsilon/3} \\
 &= (2c)^k \cdot n^\varepsilon \cdot (1 + \delta(n))^k + 2^k \cdot 6 \cdot e^{(2k+1) \ln n - \delta^2 c(1+o(1))n^\varepsilon/3} .
 \end{aligned}$$

Wie in Lemma 5.7 ergibt sich nun $(\ln n - \delta^2 c(1 + o(1))n^\varepsilon/3) \rightarrow -\infty$ für ein geeignetes δ , z. B. $\delta = 1/\ln n$ oder $\delta = n^{-\varepsilon/4}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\lambda_1^k \right] &\leq (2c)^k \cdot n^{k\varepsilon} \cdot (1 + \delta(n))^k + o(1) \\
 \Rightarrow \mathbb{E} \left[\lambda_1^k \right] &\leq (2c)^k \cdot n^{k\varepsilon} \cdot (1 + o(1)) . \tag{102}
 \end{aligned}$$

Aus den beiden Ungleichungen 101 und 102 folgt:

$$\mathbb{E} \left[\lambda_1^k \right] = (2c)^k \cdot n^{k\varepsilon} \cdot (1 + o(1)) . \tag{103}$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E} \left[\lambda_1^k \right]$ ist also ebenfalls wie der Grad für fast alle Hypergraphen scharf konzentriert. Als nächstes bestimmen wir den Erwartungswert der Spur von \mathbf{A}^k . Dies ist nichts anderes als die erwartete Anzahl aller verschiedenen geschlossenen Wege der Länge k in unserem Projektionsmultigraphen. Für den Nachweis der Eigenwertseparierung ist es hier ausreichend, Wege der Länge vier zu betrachten. Es sei also $X = X(H)$ die Zufallsvariable, die die geschlossenen Wege der Länge $k = 4$ in dem Projektionsmultigraphen $M_{1,2}(H)$ des zufälligen 3-uniformen Hypergraphen H zählt.

Wie wir bereits festgestellt haben, gilt $X = \text{Spur } \mathbf{A}^4$ bzw. $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\text{Spur } \mathbf{A}^4]$. Für die Berechnung des Erwartungswertes von X nutzen wir wieder die Linearität des Erwartungswertes. Wir werden unterscheiden, aus wieviel verschiedenen Kanten ein geschlossener Weg der Länge vier tatsächlich besteht. Es sei also $X_i = X_i(H)$ die Zufallsvariable, die für einen zufälligen Hypergraphen H zählt, wieviel verschiedene geschlossene Wege der Länge vier im Projektionsmultigraphen $M_{1,2}(H)$ existieren, die aus genau i verschiedenen Kanten bestehen. Ein solcher Weg muß mindestens eine Kante enthalten. Besteht der Weg nur aus einer Kante, so wird diese viermal durchlaufen. Wenn jede Kante nur einmal verwendet wird, so haben wir genau vier verschiedene Kanten in unserem Weg.

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Es ist also $X = \sum_{i=1}^4 X_i$ und somit

$$E[X] = \sum_{i=1}^4 E[X_i].$$

Für die Berechnung der einzelnen $E[X_i]$ verfahren wir analog. Es sei w_i ein konkreter geschlossener Weg der Länge vier, der aus genau i verschiedenen Kanten besteht. Für diesen Weg führen wir die Indikatorzufallsvariable Y_{w_i} ein. Es ist Y_{w_i} gleich eins, wenn der Weg w_i in $M_{1,2}$ vorhanden ist, ansonsten gilt $Y_{w_i} = 0$. Die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein des Weges w_i läßt sich leicht berechnen. Jede der Kanten des Weges tritt genau dann auf, wenn die zugehörige erzeugende Kante im Hypergraphen H vorhanden ist. Diese treten aber unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit $p = cn^\varepsilon/n^2(1 - |o(1)|)$ auf. Es ist also für konstante, von n unabhängige i :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[Y_{w_i} = 1] &= p^i \\ \Rightarrow E[Y_{w_i}] &= \frac{c^i \cdot n^{i\varepsilon}}{n^{2i}} \cdot (1 - |o(1)|) \\ \Rightarrow E[Y_{w_i}] &\leq \frac{c^i \cdot n^{i\varepsilon}}{n^{2i}}. \end{aligned} \tag{104}$$

(Für konstante i gilt $(1 - |o(1)|)^i = (1 - |o(1)|)$.)

Die Berechnung der Anzahl der Wege der Länge vier, die aus genau i verschiedenen Kanten bestehen, ergibt sich nun aus $X_i = \sum_{w_i} Y_{w_i}$. Damit berechnet sich ein einzelner Erwartungswert $E[X_i]$ aus:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \sum_{w_i} E[Y_{w_i}] \\ &= \sum_{w_i} \frac{c^i \cdot n^{i\varepsilon}}{n^{2i}} \cdot (1 - |o(1)|) \\ &\leq \sum_{w_i} \frac{c^i \cdot n^{i\varepsilon}}{n^{2i}}. \end{aligned} \tag{105}$$

Nun folgt die Analyse, wieviele geschlossene, aus i vielen verschiedenen Kanten bestehenden Wege der Länge vier es überhaupt geben kann. Hierzu unterscheiden wir vier Fälle entsprechend der Anzahl der verschiedenen Kanten i in einem Weg:

$i = 1$ Eine Kante.

In diesem Fall haben wir genau eine Kante, welche zwei Knoten miteinander ver-

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

bindet (Schleifen können auf Grunde der Konstruktion nicht entstehen). Für die Wahl eines Knotens gibt es jeweils maximal n Möglichkeiten. Es werden maximal n^2 (geordnete) Knotenpaare betrachtet. Zwischen zwei Knoten kann es $2n$ verschiedene Kanten geben. Damit gibt es maximal $n^2 \cdot 2n = 2n^3$ viele verschiedene geschlossene Wege der Länge vier, die nur aus einer Kante bestehen. Es ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &\leq \sum_{w_1} \frac{c \cdot n^\varepsilon}{n^2} \cdot (1 - |o(1)|) \\ &\leq 2n^3 \cdot \frac{c \cdot n^\varepsilon}{n^2} \\ &= 2cn^{1+\varepsilon} . \end{aligned} \tag{106}$$

$i = 2$ Zwei verschiedene Kanten.

Wenn unser Weg über genau zwei verschiedene Kanten führt, so können diese beiden Kanten maximal drei verschiedene Knoten im Weg erzeugen. Für maximal drei verschiedene Knoten im Weg gibt es höchstens n^3 Möglichkeiten diese Tripel zu bilden. Zwischen zwei Knoten gibt es wieder $2n$ viele Möglichkeiten, eine Kante verlaufen zu lassen. Wenn also die (maximal) drei Knoten des Weges feststehen, so gibt es also maximal $(2n)^2$ viele Möglichkeiten, diese beiden Kanten zu wählen. Wir haben somit maximal $n^3 \cdot (2n)^2 = 4n^5$ viele verschiedene Wege der Länge vier, die aus genau zwei verschiedenen Kanten bestehen. Damit berechnet sich der nächste Erwartungswert aus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_2] &\leq \sum_{w_2} \frac{c^2 \cdot n^{2\varepsilon}}{n^4} \cdot (1 - |o(1)|) \\ &\leq 4n^5 \cdot \frac{c^2 \cdot n^{2\varepsilon}}{n^4} \\ &= 4c^2 n^{1+2\varepsilon} . \end{aligned} \tag{107}$$

$i = 3$ Drei verschiedene Kanten.

Wir betrachten wieder die Anzahl der verschiedenen Knoten, die bei drei verschiedenen Kanten auftreten. Hier muß beachtet werden, daß es sich um einen geschlossenen Weg handelt. Eine Kante des Weges wird zweimal durchlaufen, die anderen beiden genau einmal. Hierbei können nun aber nur maximal drei verschiedene Knoten durchlaufen werden. Somit gibt es höchstens n^3 viele Möglichkeiten

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

für die Tupel der durchlaufenen Knoten. Für jede der durchlaufenen Kanten haben wir wieder maximal $2n$ viele Varianten. Damit gibt es höchstens $n^3 \cdot (2n)^3 = 8n^6$ viele verschiedene Wege der Länge vier, die aus drei verschiedenen Kanten bestehen. Nun können wir den dritten Erwartungswert bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_3] &\leq \sum_{w_3} \frac{c^3 \cdot n^{3\varepsilon}}{n^6} \cdot (1 - |o(1)|) \\ &\leq 8n^6 \cdot \frac{c^3 \cdot n^{3\varepsilon}}{n^6} \\ &= 8c^3 n^{3\varepsilon} . \end{aligned} \tag{108}$$

$i = 4$ Vier verschiedene Kanten.

Nun kommen wir zum letzten Fall. Bei vier verschiedenen Kanten liegt die größte Anzahl an verschiedenen Knoten vor, wenn wir einen einfachen Kreis der Länge vier durchlaufen. Es kann also höchstens vier verschiedene Knoten im Weg geben. Hierfür gibt es höchstens n^4 viele Möglichkeiten. Da es zwischen zwei Knoten auch hier wieder $2n$ viele verschiedene Kanten geben kann, gibt es maximal $n^4 \cdot (2n)^4 = 16n^8$ viele verschiedene geschlossenen Wege der Länge vier, die aus vier verschiedenen Kanten bestehen. Somit bestimmt sich der letzte Erwartungswert aus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_4] &= \sum_{w_4} \frac{c^4 \cdot n^{4\varepsilon}}{n^8} \cdot (1 - |o(1)|) \\ &\leq 16n^8 \cdot \frac{c^4 \cdot n^{4\varepsilon}}{n^8} \\ &= 16c^4 n^{4\varepsilon} . \end{aligned} \tag{109}$$

Aus den Gleichungen 106 bis 109 können wir nun die erwartete Anzahl der Wege der Länge vier bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^4 \mathbb{E}[X_i] \\ \Rightarrow \mathbb{E}[X] &\leq 2cn^{1+\varepsilon} + 4c^2n^{1+2\varepsilon} + 8c^3n^{3\varepsilon} + 16c^4n^{4\varepsilon} . \end{aligned} \tag{110}$$

Aus den Gleichungen 98 und 110 sowie den Ungleichungen 100 und 101 ergibt sich eine Abschätzung für die Summe $\sum_{i>1} \lambda_i^4$. Mit $\delta(n) = o(1)$ und $\delta(n) > 0$ gilt für hinreichend

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

große n die einfache Abschätzung $1 - (1 - \delta(n))^4 \leq 4\delta(n)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \right] &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\lambda_1^4] \\ &\leq 2cn^{1+\varepsilon} + 4c^2n^{1+2\varepsilon} + 8c^3n^{3\varepsilon} + 4\delta(n) \cdot 16c^4n^{4\varepsilon} . \end{aligned} \quad (111)$$

Nun wenden wir die Markoff-Ungleichung an:

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \geq \left(1/\delta^{1/3}(n)\right) \cdot \mathbb{E} \left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \right] \right] &\leq \delta^{1/3}(n) \\ &= o(1) . \end{aligned}$$

Es gilt also fast immer:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i^4}{\lambda_1^4} &\leq \frac{\delta^{-1/3}(n) \cdot \mathbb{E} \left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^4 \right]}{16c^4n^{4\varepsilon}(1 + o(1))} \\ &\leq \frac{\delta^{-1/3}(n) \cdot (2cn^{1+\varepsilon} + 4c^2n^{1+2\varepsilon} + 8c^3n^{3\varepsilon}) + 4\delta^{2/3}(n) \cdot 16c^4n^{4\varepsilon}}{16c^4n^{4\varepsilon}(1 + o(1))} \end{aligned} \quad (112)$$

Es ist $\varepsilon > 1/2$. Hieraus folgt unmittelbar $1 + \varepsilon < 4\varepsilon$, $1 + 2\varepsilon < 4\varepsilon$ sowie $3\varepsilon < 4\varepsilon$. Hat man für die Herleitung der Gleichung 103 ein geeignetes $\delta(n)$, z. B. $\delta(n) = 1/\ln^{2l} n$ mit $l > 0$ und konstant, gewählt, so erhält man

$$\frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i^4}{\lambda_1^4} = o(1) .$$

Damit wurde die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix \mathbf{A} des Projektionsmultigraphen $M_{1,2}(H)$ bewiesen. □

Für die effiziente Überprüfung der Eigenwertseparierung kann man nochmals die Ungleichung 112 genauer anschauen. Es sei immer noch $\delta(n) = 1/\ln^{2l} n$ für ein konstantes $l > 0$. Für hinreichend groß n gilt $\delta^{-1/3} \cdot o(1/n^\varepsilon) + 4\delta^{2/3}(n)/(1 + o(1)) \leq \delta^{1/2}(n)$. Damit gilt fast immer

$$\frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i^4}{\lambda_1^4} \leq 1/\ln^l n . \quad (113)$$

5.5 Die Konzentrierung des Grades im Produktmultigraphen

Für den Nachweis der geringen Diskrepanz eines 3-uniformen Hypergraphen H benötigen wir ebenfalls die geringe Diskrepanz des Produktmultigraphen. Bevor diese nachgewiesen werden kann muß zuerst die Konzentrierung des Grades im Produktmultigraphen gezeigt werden. Im Lemma 5.8 hatten wir bereits gezeigt, daß ein fast d -regulärer, gerichteter 3-uniformer Hypergraph $m \sim d \cdot n$ viele Kanten enthält und dadurch in einem Produktmultigraphen $m' \sim 2 \binom{d}{2} \cdot n = d^2 n$ viele Kanten erzeugt werden. Mit $d = cn^\varepsilon$ bestimmen wir somit $2c^2 n^{2\varepsilon-1}$ als Durchschnittsgrad im Produktmultigraphen.

Theorem 5.12. *Es seien $c > 0$ und $1/2 < \varepsilon < 3/2$ Konstanten sowie $1 \leq i \leq 3$, $d = 2c^2 \cdot n^{2\varepsilon-1}$ und $p = cn^{\varepsilon-2}(1 + o(1))$. Für fast alle Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ sind alle Produktmultigraphen $M_i(H)$ bzw. alle gewichteten Produktgraphen $G_i(H)$ fast d -regulär.*

Beweis. Der Beweis gliedert sich in zwei Teile: $1/2 < \varepsilon < 1$ und $1 \leq \varepsilon < 3/2$. Der erste Teil folgt sofort aus dem Beweis zum Lemma 4.6. In diesem Lemma haben wir die Konzentrierung des Grades im (einfachen) Produktgraphen für $1/2 < \varepsilon < 1/6 + 1/2 = 2/3$ bewiesen. Die abschließende Analyse des Beweises zeigte, daß der gleiche Beweis ebenfalls für Produktmultigraphen verwendet werden kann. Die Kantenwahrscheinlichkeit in H ist hier klein genug, so daß die Mehrfachkanten im Produktmultigraphen vernachlässigt werden können. Die Analyse ergab aber auch, daß bei Multigraphen der letzte Beweisschritt entfallen kann und das Lemma dann sogar für $1/2 < \varepsilon < 1/2 + 1/2 = 1$ gilt. Wir konzentrieren uns nun auf $1 \leq \varepsilon < 3/2$.

O. B. d. A. wird mit $i = 3$ der Produktmultigraph $M_3 = M_3(H)$ betrachtet. Die nachfolgende Analyse kann ebenso für die anderen beiden Produktmultigraphen $M_1(H)$ und $M_2(H)$ durchgeführt werden. Im Beweis werden wir zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein spezieller Produktmultigraph nicht fast d -regulär ist, $o(1)$ beträgt. Daraus folgt dann unmittelbar, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens ein Produktmultigraph nicht fast d -regulär ist, ebenfalls $o(1)$ beträgt. Damit gilt das Lemma für alle drei Produktmultigraphen.

Im folgenden beschränken wir uns also auf M_3 . Zunächst halten wir einen Knoten $(a_1, b_1) \in V \times V$ fest und zeigen, daß der Grad dieses Knotens um den Erwartungswert scharf konzentriert ist. Gelingt es uns zu zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Grad dieses speziellen Knoten nicht scharf konzentriert ist, $o(1/n^2)$ beträgt, so können wir schlußfolgern, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von $n^2 \cdot o(1/n^2) = o(1)$ ein

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Knoten auftritt, der nicht die Definition 5.1 von fast d -regulär erfüllt.

Der Erwartungswert für den Grad eines Knotens läßt sich leicht berechnen. Zwischen den beiden Knoten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) wird genau dann eine Kante in M_3 entstehen, wenn ein entsprechendes Kantenpaar in H vorhanden ist. Dies könnte z. B. (a_1, a_2, z) und (b_1, b_2, z) oder (a_2, a_1, z) und (b_2, b_1, z) sein. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines speziellen Kantenpaares in H beträgt p^2 , da die Kanten unabhängig voneinander sind. Zwischen zwei Knoten im Produktmultigraphen sind genau $2n$ Kanten möglich, da auf der dritten Koordinate n Wahlmöglichkeiten bestehen und für jedes hier gewählte z zwei verschiedene Paare eine Kante ergeben können. Die Paare sind geordnet. Treten die beiden Kanten (a_1, a_2, z) und (b_1, b_2, z) gemeinsam in H auf, so erzeugen sie die Multikanten $((a_1, b_1), (a_2, b_2))$ und $((b_1, a_1), (b_2, a_2))$.

Insgesamt hat ein Knoten $n^2 - 1$ viele mögliche Nachbarknoten. Schon an dieser Stelle muß man einen Sonderfall betrachten. Zwischen zwei Knoten (a_1, a_1) und (b_1, b_1) wird es keine Kante geben, da hierfür ein Kantenpaar der Form (a_1, b_1, z) und (a_1, b_1, z) in H notwendig wäre. In H kommen aber keine Kanten doppelt vor. Für den Knoten (a_1, a_1) müssen wir also nur $n^2 - n$ viele Nachbarn betrachten. Beschränken wir uns allgemein auf $n^2(1 + o(1))$ viele Nachbarn, so erhalten wir für den erwarteten Grad $E[d(a_1, b_1)]$ eines Knotens (a_1, b_1) in M_3 :

$$\begin{aligned}
 E[d(a_1, b_1)] &= n^2 \cdot (1 + o(1)) \cdot 2n \cdot p^2 \\
 &= 2n^3 \cdot c^2 \frac{n^{2\varepsilon}}{n^4} \cdot (1 + o(1)) \\
 &= 2c^2 \cdot n^{2\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) .
 \end{aligned} \tag{114}$$

Es gilt $\varepsilon > 1/2$, damit sind für einen Knoten mehr als eine konstante Anzahl an Kanten zu erwarten.

Im nächsten Schritt muß gezeigt werden, daß der Grad eines Knotens um seinen Erwartungswert konzentriert ist. Dies erscheint zunächst schwierig, da die Kantenpaare, die eine Kante mit dem Endpunkt (a_1, b_1) bilden, nicht unabhängig voneinander sind. In solchen Situationen ist es immer hilfreich, unabhängige Zufallsvariablen zu finden bzw. zu definieren, mit denen das Problem beschrieben werden kann. Betrachtet man sich die Kantenpaare genauer, so sieht man sofort, daß Paare, die sich in der dritten Koordinate unterscheiden, unabhängig voneinander sind. Wenn wir für einen Knoten z die Anzahl

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

der Kanten vom Typ $(V, V, \{z\})$ in H kennen, so können wir hieraus die Anzahl der daraus gebildeten Kanten im Produktgraphen bestimmen (vorausgesetzt, daß keine Schlinge gebildet werden würde). Dies führt uns zu der folgenden Definition von Zufallsvariablen. Es sei $X_z = X_z(a_1, b_2) = X_z(H, a_1, b_1)$ die Anzahl der Kanten vom Typ $(\{a_1\}, V, \{z\})$ in H . Analog definieren wir die Zufallsvariablen Y_z , R_z und S_z für die Anzahl der Kanten vom Typ $(\{b_1\}, V, \{z\})$, $(V, \{a_1\}, \{z\})$ bzw. $(V, \{b_1\}, \{z\})$. Um eine Produktgraphkante mit dem Knoten (a_1, b_1) zu bilden, benötigen wir für einen Knoten z eine von den in X_z gezählten Kanten und eine von den in Y_z gezählten Kanten – oder analog ein Paar, welches in R_z und S_z gezählt wurde.

Aus dieser Betrachtung sehen wir, daß man maximal $X_z \cdot Y_z + R_z \cdot S_z$ viele, für den Knoten (a_1, b_1) interessante Paare, finden kann. Es ist aber durchaus möglich, daß ein solches Paar eine Schlinge bilden würde bzw. daß Kanten in den Zufallsvariablen doppelt gezählt wurden. Daher gilt zunächst nur:

$$d(a_1, b_1) \leq \sum_{z \in V} (X_z \cdot Y_z + R_z \cdot S_z) . \quad (115)$$

Im weiteren werden wir wie folgt vorgehen. Zunächst berechnen wir den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen. Hieraus können wir den Erwartungswert für die obige Summe berechnen. Für den Erwartungswert dieser Summe zeigen wir mittels der Hoeffding-Schranken eine scharfe Konzentration. Hierzu wird es notwendig sein, weitere Zufallsvariablen zu definieren. Den Abschluß des Beweises bildet dann der Nachweis, daß sich mit hoher Wahrscheinlichkeit in allen Knoten der Grad und diese Summe um nicht mehr als einen hinreichend kleinen Betrag $k = o(d)$ unterscheiden können.

Wir beginnen mit der Berechnung des Erwartungswertes $E[X_z]$. In X_z wurden alle Kanten vom Typ $(\{a_1\}, V, \{z\})$ gezählt. Diese Kanten kommen in H unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p vor. Es ist somit X_z binomialverteilt mit den Parametern (n, p) . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} E[X_z] &= n \cdot p \\ &= n \cdot c \cdot \frac{n^\varepsilon}{n^2} \cdot (1 + o(1)) \\ &= c \cdot n^{\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned} \quad (116)$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Analog kann man Y_z , R_z und S_z betrachten und erhält:

$$\mathbb{E}[X_z] = \mathbb{E}[Y_z] = \mathbb{E}[R_z] = \mathbb{E}[S_z] = c \cdot n^{\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) . \quad (117)$$

Liegen zwei verschiedene Knoten a_1 und b_1 vor, gilt also $a_1 \neq b_1$, so sind die Kanten, die in X_z gezählt wurden, von denen verschieden, die in Y_z gezählt wurden. In diesem Fall sind X_z und Y_z unabhängige Zufallsvariablen. Damit können die Erwartungswerte multipliziert werden. Wir erhalten für die Zufallsvariable $(X_z \cdot Y_z)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_z \cdot Y_z] &= \mathbb{E}[X_z] \cdot \mathbb{E}[Y_z] \\ &= c^2 \cdot n^{2\varepsilon-2} \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned} \quad (118)$$

Die gleiche Betrachtung kann für R_z und S_z wiederholt werden, wir erhalten auch hier:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_z \cdot S_z] &= \mathbb{E}[R_z] \cdot \mathbb{E}[S_z] \\ &= c^2 \cdot n^{2\varepsilon-2} \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned} \quad (119)$$

Nun müssen wir den Fall $a_1 = b_1$ untersuchen. Offensichtlich gilt hier $X_z = Y_z$ und $R_z = S_z$. An dieser Stelle muß man sich wieder überlegen, wieviele Kanten maximal gebildet werden können. Die Abschätzung X_z^2 bzw. R_z^2 ist zu grob. Nach Definition 5.2 kann eine Kante aus H nicht mit sich selbst eine neue Kante im Produktmultigraphen erzeugen. Wir müssen also in diesem Fall $X_z \cdot (X_z - 1) = X_z^2 - X_z$ und $R_z \cdot (R_z - 1) = R_z^2 - R_z$ verwenden. O. B. d. A. reduziert sich unsere Untersuchung nun auf die Berechnung von $\mathbb{E}[X_z^2]$. Die Zufallsvariable X_z ist (n, p) -binomialverteilt. Damit beträgt die Varianz $D^2[X_z] = np(1-p) = \mathbb{E}[X_z^2] - (\mathbb{E}[X_z])^2$. So erhalten wir für $\mathbb{E}[X_z^2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_z^2] &= D^2[X_z] + (\mathbb{E}[X_z])^2 \\ &= np(1-p) + (np)^2 \\ &= \left(n^2 \cdot c^2 n^{2\varepsilon} / n^4 \right) \cdot (1 + o(1)) + \mathbb{E}[X_z] \cdot (1-p) \\ &= \left(c^2 n^{2\varepsilon} / n^2 \right) \cdot (1 + o(1)) + \mathbb{E}[X_z] \cdot (1-p) \\ \Rightarrow \mathbb{E}[X_z(X_z - 1)] &= \left(c^2 n^{2\varepsilon} / n^2 \right) \cdot (1 + o(1)) + \mathbb{E}[X_z] \cdot (1-p) - \mathbb{E}[X_z] \\ &= c^2 n^{2\varepsilon} / n^2 \cdot (1 + o(1)) - np^2 \\ &= \left(c^2 n^{2\varepsilon} / n^2 - n \cdot c^2 n^{2\varepsilon} / n^4 \right) \cdot (1 + o(1)) \\ &= \left(c^2 n^{2\varepsilon} / n^2 - c^2 n^{2\varepsilon} / n^3 \right) \cdot (1 + o(1)) \end{aligned}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_z(X_z - 1)] = c^2 n^{2\varepsilon-2} \cdot (1 + o(1)) . \quad (120)$$

Die gleichen Betrachtungen mit der Fallunterscheidung in $a_1 \neq b_1$ und $a_1 = b_1$ kann man ebenfalls wieder für die Zufallsvariablen Y_z , R_z und S_z durchführen. Das Ergebnis ist dasselbe.

Um den Grad eines Knotens möglichst genau abschätzen zu können, summieren wir nun über die Anzahl der geeigneten Paare bezüglich aller Knoten z . Hierbei ist es wichtig, daß wir wieder die Fälle $a_1 \neq b_1$ und $a_1 = b_1$ unterscheiden. Es sei also $X = X(a_1, b_1) = X(a_1, b_1, H)$ eine Zufallsvariable, die definiert ist durch:

$$X(a_1, b_1, H) = \begin{cases} \sum_{z \in V} X_z \cdot Y_z & \text{falls } a_1 \neq b_1 \\ \sum_{z \in V} X_z \cdot (X_z - 1) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (121)$$

Analog definieren wir die Zufallsvariable $R = R(a_1, b_1) = R(a_1, b_1, H)$:

$$R(a_1, b_1, H) = \begin{cases} \sum_{z \in V} R_z \cdot S_z & \text{falls } a_1 \neq b_1 \\ \sum_{z \in V} R_z \cdot (R_z - 1) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (122)$$

Nun können wir die Abschätzung für den Grad eines Knotens in 115 präzisieren. Es gilt:

$$d(a_1, b_1) \leq X + R . \quad (123)$$

Betrachtet man die Erwartungswerte (vgl. auch Gleichung 114), so sehen wir neben $\mathbb{E}[d(a_1, b_1)] < \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[R]$ auch $\mathbb{E}[d(a_1, b_1)] \sim \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[R]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \begin{cases} \sum_{z \in V} \mathbb{E}[X_z \cdot Y_z] & \text{falls } a_1 \neq b_1 \\ \sum_{z \in V} \mathbb{E}[X_z \cdot (X_z - 1)] & \text{sonst} \end{cases} \\ &= n \cdot c^2 n^{2\varepsilon} / n^2 \cdot (1 + o(1)) \\ &= c^2 \cdot n^{2\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (124)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[R] = c^2 \cdot n^{2\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) \quad (125)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[d(a_1, b_1)] = (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[R]) \cdot (1 - |o(1)|) . \quad (126)$$

Nun zeigen wir die scharfe Konzentration der Zufallsvariablen X und R . Hierzu werden wir die Hoeffding-Schranken verwenden. Für die Anwendung der Hoeffding-Schranken (siehe Theorem 10.2) ist es notwendig, daß die Zufallsvariablen beschränkt sind. Es gilt

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

$0 \leq X_z$ und die Zufallsvariable X_z kann maximal den Wert n annehmen. Mit einer oberen Schranke von n können in unserem Fall die Hoeffding-Schranken nicht mehr sinnvoll angewandt werden. Betrachten wir die Zufallsvariablen etwas näher, so stellen wir fest, daß z. B. in dem für uns interessanten Fall von $\varepsilon = 1$ für den Erwartungswert $E[X_z] \approx c^2$ gilt. Es ist damit sehr unwahrscheinlich, daß X_z sehr groß, hier beispielsweise $X_z > \ln n$ wird.

Um nun die scharfe Konzentration von X und R zu zeigen gehen wir wie folgt vor. Zunächst definieren wir neue, stärker beschränkte Zufallsvariablen X'_z, Y'_z, R'_z und S'_z . Nun können wir die Konzentration der Summe dieser Zufallsvariablen mittels der Hoeffding-Schranken nachweisen. Anschließend zeigen wir, daß in fast allen Hypergraphen $X_z = X'_z$ usw. für alle möglichen X_z, Y_z, \dots gilt.

Im Produktmultigraphen haben die Erwartungswerte $E[X_z], E[Y_z]$ usw. für alle Knoten $(a_1, b_1) \in V \times V$ sowie für alle Knoten $z \in V$ den gleichen Wert. In Abhängigkeit von diesem Betrag definieren wir nun:

$$l = \max(1, E[X_z]) \cdot \ln n . \quad (127)$$

Damit ist l nie kleiner als $\ln n$, kann aber für hinreichend große n den Wert n nicht übersteigen. Man beachte an dieser Stelle, daß $E[X_z] \geq 1$ äquivalent zu $cn^{\varepsilon-1}(1+o(1)) \geq 1$ ist und hieraus $\varepsilon \geq 1$ für hinreichend große n folgt. Für $\varepsilon = 1$ ist $c \geq 1$ für $E[X_z] \geq 1$ erforderlich.

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß X_z mindestens den Wert l erreicht. Die Zufallsvariable X_z ist (n, p) -binomialverteilt. Damit sie größer oder gleich l wird, genügt es eine Teilmenge von l der n möglichen, zu Grunde liegenden Kanten aus H zu finden, die alle vorhanden sein müssen. Weiterhin läßt sich hier die Wahrscheinlichkeit als $p = E[X_z]/n$ darstellen. Es ist also:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[X_z \geq l] &\leq \binom{n}{l} \cdot p^l \\ &= \binom{n}{l} \cdot \frac{(E[X_z])^l}{n^l} \\ &\leq \frac{n^l}{l!} \cdot \frac{(E[X_z])^l}{n^l} \\ &= \frac{(E[X_z])^l}{l!} . \end{aligned}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel schätzen wir $l!$ mit $l! \geq (l/e)^l$ ab und erhalten:

$$\text{Prob}[X_z \geq l] \leq \left(e \cdot \frac{\mathbb{E}[X_z]}{l} \right)^l .$$

Auf Grund der Definition von l gilt immer $\mathbb{E}[X_z]/l \leq 1/\ln n$. Dies führt zu:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[X_z \geq l] &\leq \left(\frac{e}{\ln n} \right)^l \\ &= \left(\frac{e}{e^{\ln \ln n}} \right)^{\ln n \cdot \max(1, \mathbb{E}[X_z])} \\ &= e^{(1 - \ln \ln n) \cdot \ln n \cdot \max(1, \mathbb{E}[X_z])} . \end{aligned} \tag{128}$$

Betrachtet man $n^i = e^{i \ln n}$, so gilt für alle Konstanten $i \in \mathbb{N}$:

$$\text{Prob}[X_z \geq l] = o(1/n^i) \tag{129}$$

bzw. mit $i = 3$

$$\text{Prob}[X_z \geq l] = o(1/n^3) . \tag{130}$$

Im Produktmultigraphen M_3 gibt es insgesamt n^2 Knoten. Zu jedem dieser Knoten gibt es n verschiedene Zufallsvariablen X_z . Dies sind also n^3 viele verschiedene Zufallsvariablen für M_3 . Damit beträgt aber die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens ein solches X_z größer als l ist, nach der Siebformel 209 maximal $n^3 \cdot o(1/n^3) = o(1)$. Analoge Aussagen erhält man ebenfalls für Y_z, R_z und S_z . Damit gilt: In fast allen Hypergraphen H mit der Kantenwahrscheinlichkeit p sind die Zufallsvariablen X_z, Y_z, R_z und S_z für alle Knoten $z \in V$ sowie alle Knoten $(a_1, b_1) \in V \times V$ des Produktmultigraphen $M_3(H)$ nicht größer als l .

Nun definieren wir Zufallsvariablen, die nicht größer als die gefundene obere Schranke werden können. Es sei $X'_z = X'_z(a_1, b_1) = X'_z(a_1, b_1, H)$ eine Zufallsvariable definiert durch:

$$X'_z = \begin{cases} X_z & \text{für } X_z < l \\ l & \text{sonst.} \end{cases} \tag{131}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Auf die gleiche Art und Weise definiert man die Zufallsvariablen Y'_z , R'_z und S'_z . Analog zur Definition von X und R kann man auch hier über alle $z \in V$ summieren, um den Grad des Knotens (a_1, b_1) abzuschätzen. Es sei also:

$$X'(a_1, b_1, H) = \begin{cases} \sum_{z \in V} X'_z \cdot Y'_z & \text{falls } a_1 \neq b_1 \\ \sum_{z \in V} X'_z \cdot (X'_z - 1) & \text{sonst} \end{cases} \quad (132)$$

und

$$R'(a_1, b_1, H) = \begin{cases} \sum_{z \in V} R'_z \cdot S'_z & \text{falls } a_1 \neq b_1 \\ \sum_{z \in V} R'_z \cdot (R'_z - 1) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (133)$$

Auf Grund der gefundenen Beschränkung der Zufallsvariablen in fast allen Hypergraphen H gilt ebenso $X_z = X'_z$, $Y_z = Y'_z$, $R_z = R'_z$, $S_z = S'_z$, $X = X'$ und $R = R'$ für alle Knoten $z \in V$ aus H und alle Knoten $(a_1, b_1) \in V \times V$ aus $M_3(H)$. Wenn es gelingt, $E[X_z] \sim E[X'_z]$ und $E[X_z^2] \sim E[(X'_z)^2]$ zu zeigen, dann gilt eine entsprechende Aussage ebenfalls für die Erwartungswerte dieser Zufallsvariablen. Der Erwartungswert $E[X'_z]$ berechnet sich aus:

$$\begin{aligned} E[X'_z] &= \sum_{i=0}^n i \cdot \text{Prob}[X'_z = i] \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} i \cdot \text{Prob}[X_z = i] + \sum_{i=l}^n l \cdot \text{Prob}[X_z = i] \\ &= \sum_{i=0}^n i \cdot \text{Prob}[X_z = i] - \sum_{i=l}^n i \cdot \text{Prob}[X_z = i] + \sum_{i=l}^n l \cdot \text{Prob}[X_z = i] \\ &= E[X_z] - \sum_{i=l}^n (i - l) \cdot \text{Prob}[X_z = i]. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $0 \leq (i - l) < n$ sowie $n - l < n$.

$$\Rightarrow 1. \quad E[X'_z] \leq E[X_z]$$

und

$$2. \quad E[X'_z] \geq E[X_z] - n^2 \cdot \text{Prob}[X_z \geq l].$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Mit Hilfe der Ungleichung 128 schätzen wir $\text{Prob}[X_z \geq l]$ ab und erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X'_z] &\geq \mathbb{E}[X_z] - e^{2 \ln n} \cdot e^{(1 - \ln \ln n) \cdot \ln n \cdot \max(1, \mathbb{E}[X_z])} \\ &= \mathbb{E}[X_z] \cdot (1 - o(1)) \\ \Rightarrow \mathbb{E}[X'_z] &\sim \mathbb{E}[X_z]. \end{aligned} \tag{134}$$

Analog kann man aus $\mathbb{E}[(X'_z)^2] = \sum_{i=0}^l i^2 \cdot \text{Prob}[X'_z = i]$

$$\mathbb{E}[(X'_z)^2] \sim \mathbb{E}[X_z^2] \tag{135}$$

folgern.

Nun weisen wir die scharfe Konzentration von X' und R' und damit auch für X und Y nach. Die n Zufallsvariablen $(X'_z \cdot Y'_z)$ bzw. $(X'_z \cdot (X'_z - 1))$ sind für einen konkreten Knoten $(a_1, b_1) \in V \times V$ bzw. $(a_1, a_1) \in V \times V$ voneinander unabhängig, da sich die gezählten Kantenpaare in H jeweils in der dritten Koordinate unterscheiden und alle Kanten in H voneinander unabhängig sind. Ferner gilt noch $0 \leq (X'_z \cdot Y'_z) \leq l^2$ und $0 \leq (R'_z \cdot S'_z) \leq l^2$. Die Konzentration der Summe X' weisen wir nun mittels der Hoeffding-Schranken aus Theorem 10.2 (speziell Ungleichung 228) nach. Es sei nun $\varepsilon \geq 1$. Ferner sei $r \geq 2$ eine Konstante. Für hinreichend große n und $c \geq 1$ folgt nun z.B. $\mathbb{E}[X_z] \geq 1$ und damit $l = \max(1, \mathbb{E}[X_z]) = \mathbb{E}[X_z]$. Für das Theorem 10.2 sei $\bar{X} = X'/n$ und $\mu = \mathbb{E}[X']/n$. Ferner verwenden wir $b = l^2$ und $t = l/(\ln n)^r$. Die Hoeffding-Schranke wenden wir zunächst für einen speziellen Knoten $(a_1, b_1) \in V \times V$ aus M_3 an, wobei $a_1 = b_2$ möglich ist:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[|X' - \mathbb{E}[X']| > n \cdot l/(\ln n)^r] &\leq 2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot n \cdot l^2/(\ln n)^{2r}}{l^4}} \\ &= 2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot n}{(\ln n)^{2r} \cdot l^2}} \\ &= 2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot n}{(\ln n)^{2r+2} \cdot (\mathbb{E}[X_z])^2}}. \end{aligned}$$

Es ist $\mathbb{E}[X_z] = cn^{\varepsilon-1}(1+o(1)) > 1$. Für $1 \leq \varepsilon < 3/2$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, z. B. $\delta = 3 - 2\varepsilon$, so daß $\delta > 0$ und somit $n^\delta \rightarrow \infty$ gilt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[|X' - \mathbb{E}[X']| > n \cdot l/(\ln n)^r] &\leq 2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot n}{(\ln n)^{2r+2} \cdot (\mathbb{E}[X_z])^2}} \\ &= 2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot n}{(\ln n)^{2r+2} \cdot c^2 \cdot n^{2\varepsilon-2} \cdot (1+o(1))}} \\ &= 2 \cdot e^{-\frac{2}{(\ln n)^{2r+2} \cdot c^2 \cdot n^{2\varepsilon-3} \cdot (1+o(1))}} \end{aligned}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot e^{-2 \cdot \frac{n^{3-2\varepsilon}}{(\ln n)^{2r+2} \cdot c^2} \cdot (1+o(1))} \\
 &= 2 \cdot e^{-2 \cdot \frac{n^\delta}{(\ln n)^{2r+2} \cdot c^2} \cdot (1+o(1))}
 \end{aligned}$$

Für eine Konstante $i > 0$ erhalten wir mit $n^i = e^{i \ln n}$:

$$\text{Prob} [|X' - \mathbb{E}[X']| > n \cdot l / (\ln n)^r] = o(1/n^i) . \quad (136)$$

Die gleiche Abschätzung kann für R' durchgeführt werden. Wir erhalten ebenfalls

$$\text{Prob} [|R' - \mathbb{E}[R']| > n \cdot l / (\ln n)^r] = o(1/n^i) . \quad (137)$$

Wenn wir nun die Wahrscheinlichkeit dafür betrachten, daß in den n^2 Knoten aus M_3 mindestens ein Knoten enthalten ist, für welchen X' oder R' nicht um den Erwartungswert konzentriert ist, so erhalten wir mit $i \geq 2$ hierfür $n^2 \cdot 2 \cdot o(1/n^i) = o(1)$. In fast allen Hypergraphen H gilt somit für alle Knoten des Produktmultigraphen M_3 :

$$\begin{aligned}
 |X' - \mathbb{E}[X']| + |R' - \mathbb{E}[R']| &\leq 2 \cdot n \cdot \frac{l}{(\ln n)^r} \\
 \Rightarrow |X' + R' - \mathbb{E}[X'] - \mathbb{E}[R']| &\leq 2n \cdot \frac{l}{(\ln n)^r} .
 \end{aligned}$$

Für fast alle Hypergraphen H gilt $X = X'$, $R = R'$, $\mathbb{E}[X] \sim \mathbb{E}[X']$ sowie $\mathbb{E}[R] \sim \mathbb{E}[R']$ für alle Knoten (a_1, b_1) . Mit $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[R] = c^2 n^{2\varepsilon-1} (1 + o(1))$ folgern wir:

$$\left| (X + R) - 2c^2 n^{2\varepsilon-1} (1 + o(1)) \right| \leq 2n \cdot \frac{\max(1, \mathbb{E}[X_z])}{(\ln n)^{r-1}} .$$

Wir analysieren nun das Verhältnis $(n \cdot l / (\ln n)^r) / \mathbb{E}[X]$ und erhalten mit $l = \mathbb{E}[X_z]$:

$$\begin{aligned}
 \frac{n \cdot l / (\ln n)^r}{\mathbb{E}[X]} &= \frac{n \cdot \mathbb{E}[X_z]}{\mathbb{E}[X] \cdot (\ln n)^{r-1}} \\
 &= \frac{c \cdot n^\varepsilon \cdot (1 + o(1))}{c^2 \cdot n^\varepsilon \cdot n^{\varepsilon-1} \cdot (\ln n)^{r-1}} \\
 &= O\left(1 / (\ln n)^{r-1}\right) \\
 &= o(1)
 \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (X + R) &= 2c^2 n^{2\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) \\
 \Rightarrow (X + R) &= d \cdot (1 + o(1)) .
 \end{aligned} \quad (139)$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Die Hoeffding-Schranken können ebenfalls für $E[X_z] < 1$ angewandt werden. Betrachtet man $3/4 < \varepsilon \leq 1$ sowie $E[X_z] < 1$, so folgt zunächst $l = \ln n$. Bei der Anwendung des Theorems 10.2 verwenden wir nun $\bar{X} = X'/n$, $\mu = E[X']/n$, $b = l^2$ und $t = n^{-1/2} \cdot \ln^3 n$. Man überprüft auch hier leicht die Konzentration $(X + R) \sim d$. Dieser Fall ist fast komplett durch den ersten Teil des Beweises abgedeckt. Lediglich $\varepsilon = 1$ und $0 < c < 1$ sind für die Vollständigkeit des Beweises erforderlich.

Um den Beweis abzuschließen müssen wir nun noch nachweisen, daß für alle Knoten $(a_1, b_1) \in V \times V$ aus M_3 im Prinzip kein Unterschied zwischen dem Grad $d(a_1, b_1)$ und der Summe $(X(a_1, b_1) + Y(a_1, b_1))$ besteht. Dies geschieht dadurch, indem gezeigt wird, daß der Grad und die Summe maximal um einen Wert $k = o(d)$ differieren. In den Variablen X und R wurden alle Möglichkeiten der Kantenbildung einschließlich der Schlingenbildung berücksichtigt. Dadurch gelangten wir zu der Ungleichung 123: $d(a_1, b_1) \leq X(a_1, b_1) + R(a_1, b_1)$.

Wir können nun zwei prinzipielle Fälle unterscheiden. Im ersten Fall liegt ein Kantenpaar in H vor, welches z. B. in einem $X_z \cdot Y_z$ gezählt wird, aber zu keiner Kante im Produktmultigraphen M_3 führt. Dies kann nur der Fall sein, wenn dieses Kantenpaar eine Schlinge bilden würde. Hier müssen wir wiederum zwei Fälle unterscheiden. Die erste Möglichkeit, eine Schlinge zu zählen, besteht darin, daß die beiden Kanten (a_1, a_1, z) und (b_1, b_1, z) in H vorhanden sind (es muß in diesem Fall $a_1 \neq b_1$ gelten). Beide Kanten werden korrekt in X_z und Y_z berücksichtigt. Allerdings würde die Kombination dieser beiden Kanten eine Schlinge bilden, so daß hier in $X_z \cdot Y_z$ für die Bestimmung des Grades eine Kante zuviel berechnet wird. Gilt $a_1 = b_1$, so zählen wir diese Variante nicht in $(X_z(X_z - 1))$.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß in H die Kante (a_1, b_1, z) existiert. Diese würde sowohl in X_z als auch in Y_z gezählt werden. Damit ist dann aber das Produkt $X_z \cdot Y_z$ um eins größer als die tatsächliche Anzahl an Kanten, die durch den Knoten z auf der dritten Koordinate an (a_1, b_1, z) in M_3 erzeugt wurden. (Eine Kante kann nicht mit sich selbst kombiniert werden.) Dies trifft nur für $a_1 \neq b_1$ zu. Für $a_1 = b_1$ zählen wir mit $X_z(X_z - 1)$ bereits richtig. Analog kann man natürlich die Kante (b_1, a_1, z) für das Produkt $R_z \cdot S_z$ betrachten.

Im zweiten Fall zählen wir ein Kantenpaar doppelt, z. B. in $X_z \cdot Y_z$ und in $R_z \cdot S_z$. Dieser Fall tritt nicht ein, da wir einen Multigraphen erzeugen. Jedes geeignete Kantenpaar in

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

H erzeugt somit immer zwei verschiedene Multikanten in M_3 .

Es sind also nur die Knoten (a_1, b_1) mit $a_1 \neq b_1$ interessant. Hier müssen wir k_1 und k_2 finden, so daß für alle Knoten (a_1, b_1) in M_3 gilt, daß es in H nicht mehr als k_1 Kanten der Form (a_1, b_1, z) sowie nicht mehr als k_2 Kantenpaare (a_1, a_1, z) und (b_1, b_1, z) gibt. Dann gibt es ein k' , so daß $X + R - k' \leq d(a_1, b_1) \leq X + R$ für alle Knoten gilt. Für jede der $(k_1 + k_2)$ viele Kanten wird in $(X_z \cdot Y_z)$ maximal um den Wert eins zuviel gezählt. Das gleiche trifft für $(R_z \cdot S_z)$. Damit gilt $k' \leq 2 \cdot (k_1 + k_2)$.

Schaut man sich diese Konstellation genauer an, so sieht man, daß es genügt zu zeigen, daß es ein k gibt, so daß in H nicht mehr als k Kanten der Form (a_1, b_1, z) existieren, wobei $a_1 = b_1$ zulässig ist. Wir wollen also zeigen, daß die Anzahl der Kanten vom Typ $(\{a_1\}, \{b_1\}, V)$ beschränkt ist. Dieses Problem haben wir aber schon gelöst. Wir zählen beispielsweise in X_z die Anzahl der Kanten vom Typ $(\{a_1\}, V, \{z\})$. Die Kanten im Hypergraphen treten unabhängig voneinander auf. Ob nun die erste und dritte oder die erste und zweite Koordinate fixiert werden, ist für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß es mehr als l geeignete Kante gibt, unerheblich.

Für $l = \max(1, E[X_z]) \cdot \ln n$ gilt somit folgende Aussage: In fast allen Hypergraphen H gibt es für alle Knotenpaare $(a_1, b_1) \in V \times V$ nicht mehr als l Kanten vom Typ $(\{a_1\}, \{b_1\}, V)$. Hieraus folgt aber, daß in fast allen Hypergraphen H in allen Knoten $(a_1, b_1) \in V \times V$ des Produktmultigraphen M_3 der Grad durch

$$X + R - 2 \cdot l \leq d(a_1, b_1) \leq X + R \quad (140)$$

beschränkt ist. Aus der Konzentration von $(X + R)$ folgt nun aber:

$$\begin{aligned} d(a_1, b_1) &\geq X + R - 2 \cdot l \\ &= 2c^2 n^{2\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) - 2 \cdot \max(1, E[X_z]) \cdot \ln n \\ &= 2c^2 n^{2\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) - 2 \cdot \max\left(1, cn^{\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1))\right) \cdot \ln n \\ &= 2c^2 n^{2\varepsilon-1} \left((1 + o(1)) - \max\left(\frac{1}{c^2 n^{2\varepsilon-1}}, \frac{cn^{\varepsilon-1}(1 + o(1))}{c^2 n^{2\varepsilon-1}}\right) \ln n \right) \\ &= 2c^2 n^{2\varepsilon-1} \left((1 + o(1)) - \max\left(\frac{\ln n}{c^2 n^{2\varepsilon-1}}, \frac{\ln n}{cn^\varepsilon} (1 + o(1))\right) \right). \end{aligned}$$

Es ist $1/2 < \varepsilon < 3/2$. Damit gilt natürlich auch $\varepsilon > 0$ und $2\varepsilon - 1 > 0$ bzw. $\ln n = o(n^\varepsilon)$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

und $\ln n = o(n^{2\varepsilon-1})$. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} d(a_1, b_1) &\geq 2c^2 n^{2\varepsilon-1} \cdot ((1 + o(1)) - o(1)) \\ \Rightarrow d(a_1, b_1) &= 2c^2 n^{2\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) \end{aligned} \tag{141}$$

$$\Rightarrow d(a_1, b_1) \sim 2c^2 n^{2\varepsilon-1} . \tag{142}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen, alle Produktmultigraphen sind also fast d -regulär. □

Bei der Anwendung der Hoeffding-Schranken (Ungleichung 228) spielt die Wahl des Parameters t eine große Rolle. Hier wurde $t = l/(\ln n)^r$ verwendet. Der Beweis gelingt aber auch für $t = l$. Die Wahl $t = l/(\ln n)^2$ erschließt sich aus der Gleichung 138. Für $t = l$ können wir auch $n \cdot l/E[X] = o(1)$ zeigen. Allerdings erhalten wir dann $n \cdot l/E[X] = o(n^\delta)$ für ein hinreichend kleines δ . Dies ist für die Entwicklung eines effizienten Algorithmus zur Ermittlung der Fast- d -Regularität ungünstig, da dieses Verfahren das δ beachten müßte. Jetzt haben wir aber $n \cdot l/(\ln n)^r < E[X]/(\ln n)^{r-1}$. Damit muß ein Algorithmus nur noch überprüfen, ob jeder Grad eines Knotens (a_1, b_1) für eine Konstante $s \geq 1$ um nicht mehr als $d/(\ln n)^s$ vom Erwartungswert $E[d(a_1, b_1)] = d$ abweicht. Der Algorithmus hat also

$$|d(a_1, b_1) - d| \leq d/(\ln n)^s \tag{143}$$

für alle Knoten $(a_1, b_2) \in V \times V$ zu überprüfen. Korrekterweise müßte in diese Betrachtung die Ungleichung 140 einfließen. Hier sehen wir, daß die Abweichung vom Mittelwert zusätzlich noch $2l$ betragen kann. Für das Verhältnis zu $E[X]$ sehen wir $2l/E[X] = \max(1, n^{\varepsilon-1}) \ln n/n^{2\varepsilon-1} \leq \ln n/n$. Nun ist aber auch $\ln n/n = o(1/\ln n)$. Damit bleibt es bei der Untersuchung auf eine Abweichung von maximal $d/(\ln n)^s$.

Im nächsten Abschnitt benötigen wir nochmals die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Knoten (a, b) des Produktgraphen zu stark vom Erwartungswert abweicht. Damit diese Abweichung vorliegen kann, muß wenigstens einer der folgenden Fälle erfüllt sein:

- Es gibt einen Knoten z , so daß $X_z > l$ oder $R_z > l$ gilt.
- $|X' - E[X']| > nl/(\ln n)^r$ oder $|R' - E[R']| > nl/(\ln n)^r$
- $|X + R - d(a, b)| > 2l$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Wie wir bereits gesehen haben, entspricht der letzte Fall dem ersten. Die Wahrscheinlichkeit bei gegebenen z beträgt nach der Gleichung 129 für jedes Konstante $i > 0$ höchstens $2 \cdot o(n^{-i})$ bzw. bei n möglichen Knoten z maximal $o(n^{1-i})$. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des zweiten Falles finden wir mit $2 \cdot o(n^{-i})$ in der Gleichung 136 bzw. 137. Damit gilt aber für jede Konstante $i > 1$:

$$\text{Prob}[d(a, b) \neq d \cdot (1 + o(1))] = o(1/n^i) . \quad (144)$$

5.6 Geringe Diskrepanz des Produktmultigraphen

Wir zeigen zunächst, daß in den Adjazenzmatrizen fast aller Produktmultigraphen eine Eigenwertseparierung vorliegt. Da bereits der Grad aller Knoten des Produktmultigraphen scharf konzentriert ist, wird daraus unmittelbar die geringe Diskrepanz des Produktmultigraphen folgen.

Theorem 5.13. *Es seien $c > 0$ und $1/2 < \varepsilon < 3/2$ Konstanten sowie $p = cn^{\varepsilon-2}(1 - |o(1)|)$ und $1 \leq i \leq 3$. Für fast alle Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ haben die Adjazenzmatrizen aller Produktmultigraphen $M_i(H)$ bzw. aller gewichteten Produktgraphen $G_i(H)$ Eigenwertseparierung.*

Beweis. O.B.d.A. fixieren wir wieder $i = 3$ für den Beweis, d. h. wir betrachten den Produktmultigraphen $M_3(H)$. Die folgenden Betrachtungen können analog für die Produktmultigraphen $M_1(H)$ und $M_2(H)$ durchgeführt werden. Da wir die gleiche Analyse für endlich viele Produktmultigraphen durchführen haben alle Produktmultigraphen Eigenwertseparierung für fast alle Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$, sobald ein einzelner Produktmultigraph mit der Wahrscheinlichkeit $o(1)$ diese nicht hat. Da nun der Produktmultigraph M_3 fixiert ist kann die Variable i wieder als Index, beispielsweise in Summen oder Produkten, verwendet werden.

Für den Beweis nutzen wir wieder die Spurmethode. Es seien wieder $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ die n reellen Eigenwerte der Adjazenzmatrix \mathbf{A} von H_3 . Aus dem Theorem 5.12 wissen wir, daß der Grad aller Knoten im Produktmultigraphen für fast alle Hypergraphen H konzentriert ist. Damit liegt aber auch eine Konzentrierung des größten Eigenwertes vor.

Vernachlässigt man für einen Augenblick, daß die Kanten des Produktmultigraphen nicht unabhängig voneinander sind, so kann leicht, beispielsweise ähnlich wie in Theorem 5.11, vorgegangen und damit die Eigenwertseparierung gezeigt werden. In unserem Produktgraphen müssen zwei Fakten beachtet werden: Zum einen können Kanten in einem

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

geschlossenen Weg mehrfach verwendet werden. Zum anderen sind die Kanten nicht notwendigerweise voneinander unabhängig. Um diese Abhängigkeiten zu behandeln, greifen wir eine Idee aus [FGK02] auf, worauf beispielsweise auch in [GJ02] verwiesen wird. Letztendlich besteht das Verfahren darin, diejenigen Kanten des Hypergraphen H zu finden bzw. zu beschreiben, welche zu einem bestimmten geschlossenen Weg geführt haben. Diese Kanten in H sind natürlich voneinander unabhängig und können hierdurch besser für die Berechnungen genutzt werden.

Im Einzelnen werden wir wie folgt vorgehen: Wir untersuchen geschlossene Wege der Länge $k = k(\varepsilon)$. Dabei ist k eine Konstante, also unabhängig von n . Aus der (bekannt) Konzentrierung des Grades erhalten wir den größten Eigenwert λ_1 . Hieraus können wir λ_1^k und $E[\lambda_1^k]$ berechnen. Im nächsten Schritt schätzen wir die erwartete Anzahl aller Wege der Länge k ab. Dies wird uns dadurch gelingen, indem wir die originalen Kanten aus H verfolgen, die einen solchen Weg erzeugen. Aus $E[\lambda_1^k]$ und der erwarteten Anzahl der Wege der Länge k berechnen wir eine obere Schranke für $E[\sum_{i>1} \lambda_i^k]$. Die Anwendung der Markoff-Ungleichung zeigt dann, daß damit auch $\sum_{i>1} \lambda_i^k$ für fast alle Hypergraphen H konzentriert ist. Die Eigenwertseparierung folgt unmittelbar aus dem Vergleich von $\sum_{i>1} \lambda_i^k$ und λ_1^k .

Nach Theorem 5.12 beträgt der Grad $d \cdot (1 + o(1))$ mit $d = 2c^2 \cdot n^{2\varepsilon-1}$ für alle Knoten im Produktmultigraphen für fast alle Hypergraphen H . Damit berechnet sich der größte Eigenwert λ_1 nach Lemma 2.10 bzw. Gleichung 33 aus:

$$\lambda_1 = 2c^2 \cdot n^{2\varepsilon-1} \cdot (1 + o(1)) \tag{145}$$

bzw. für ein konstantes k gilt:

$$\lambda_1^k = 2^k c^{2k} \cdot n^{2\varepsilon k - k} \cdot (1 + o(1)) . \tag{146}$$

Die scharfe Konzentration des Grades ermöglicht es ebenfalls, den Erwartungswert $E[\lambda_1^k]$ abzuschätzen. Wir haben $\lambda_1^k \sim d^k$ im Produktmultigraphen für fast alle Hypergraphen H . Gilt dies nicht, so könnte dies den Erwartungswert $E[\lambda_1^k]$ beeinflussen. Wir wissen, daß der größte Eigenwert der Adjazenzmatrix zwischen dem größten und dem kleinsten Grad des Multigraphen liegt. Es gibt n^2 viele Knoten. Zwischen zwei Knoten können auf Grund der Konstruktion maximal $2n$ viele Multikanten verlaufen. In unserem Fall könnte also der Grad eines Knotens und somit der größte Eigenwert zwischen 0 und $2n^3$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

liegen. Ausgehend von der Definition des Erwartungswertes finden wir sofort nachfolgende Abschätzungen. Es sei $s \geq 1$ eine Konstante und $\delta(n) = 1/\ln^s n$. Es bezeichne \mathcal{A} das Ereignis, daß $|\lambda_1 - d|/d \leq \delta(n)$ gilt (vgl. auch Gleichung 143). Dies ist äquivalent zu $(1 - \delta(n))^k d^k \leq \lambda_1^k \leq (1 + \delta(n))^k d^k$. $\bar{\mathcal{A}}$ bezeichne das entsprechende Komplementärereignis. Nun erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\lambda_1^k \right] &\geq (1 - \delta(n))^k d^k \cdot \text{Prob} [\mathcal{A}] + 0 \cdot \text{Prob} [\bar{\mathcal{A}}] \\
 &= (1 - \delta(n))^k d^k \cdot \text{Prob} [\mathcal{A}] \\
 &= (1 - \delta(n))^k d^k - (1 - \delta(n))^k d^k \cdot \text{Prob} [\bar{\mathcal{A}}] \\
 &= d^k (1 + o(1)) - 2^k c^{2k} n^{2\varepsilon-1} (1 + o(1)) \cdot \text{Prob} [\bar{\mathcal{A}}]
 \end{aligned} \tag{147}$$

und

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\lambda_1^k \right] &\leq (1 + \delta(n))^k d^k \cdot \text{Prob} [\mathcal{A}] + 2n^3 \cdot \text{Prob} [\bar{\mathcal{A}}] \\
 &= d^k (1 + o(1)) + \left(n^3 - 2^k c^{2k} n^{2\varepsilon-1} (1 + o(1)) \right) \cdot \text{Prob} [\bar{\mathcal{A}}].
 \end{aligned} \tag{148}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Knoten (a,b) den Grad $d(a,b)$ mit $|d(a,b) - d|/d > \delta(n)$ hat, haben wir bereits im Beweis des Theorems 5.12 mit $o(1/n^i)$ (für alle konstanten $i > 0$) berechnet (vgl. auch Ungleichung 144). Damit $|\lambda_1^k - d^k|/d^k > \delta^k(n)$ gilt, muß wenigstens für einen Knoten (a,b) der n^2 Knoten $|d(a,b) - d|/d > \delta(n)$ gelten. Es ist also $\text{Prob} [\bar{\mathcal{A}}] = n^2 \cdot o(1/n^i) = o(n^{2-i})$. Nun wählen wir i so, daß $i - 2 > 2$ sowie $i - 2 > 2\varepsilon - 1$ gilt und erhalten:

$$\mathbb{E} \left[\lambda_1^k \right] = d^k (1 + o(1)). \tag{149}$$

Für die Abschätzung von λ^k benötigen wir den Erwartungswert $\mathbb{E} [\text{Spur } \mathbf{A}^k]$. Wir wissen, daß die Summe der Eigenwerte von \mathbf{A}^k gleich der Anzahl der geschlossenen Wege der Länge k ist. Es sei $X = X(H)$ die Zufallsvariable, die diese Anzahl zählt. Offensichtlich gilt $\mathbb{E} [\text{Spur } \mathbf{A}^k] = \mathbb{E} [X]$. Ein geschlossener Weg der Länge k durchläuft die k Knoten $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$. Er läßt sich also als

$$(a_1, b_1) - (a_2, b_2) - \dots - (a_k, b_k) - (a_{k+1} = a_1, b_{k+1} = b_1)$$

darstellen. Es müssen nicht alle Knoten voneinander verschieden sein und es gilt natürlich $a_1 = a_{k+1}$ und $b_1 = b_{k+1}$. Die i -te Kante im Weg hat also die Form $(a_i, b_i) - (a_{i+1}, b_{i+1})$. Zu dieser Kante korrespondieren genau zwei Kanten, z. B. (a_i, a_{i+1}, z_i) und (b_i, b_{i+1}, z_i)

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

oder (a_{i+1}, a_i, z_i) und (b_{i+1}, b_i, z_i) des Hypergraphen H , die die Kante im Produktgraphen generiert haben. Jeder geschlossene Weg der Länge k ist also das Produkt der Kantengenerierung von k Kantenpaaren aus H . Dies könnte z. B. so aussehen:

$$\begin{array}{ccccccc} (a_1, a_2, z_1) & (a_2, a_3, z_2) & \cdots & (a_{k-1}, a_k, z_{k-1}) & (a_k, a_{k+1} = a_1, z_k) \\ (b_1, b_2, z_1) & (b_2, b_3, z_2) & \cdots & (b_{k-1}, b_k, z_{k-1}) & (b_k, b_{k+1} = b_1, z_k) \end{array} .$$

Die Kanten des Hypergraphen in dieser Folge von Paaren müssen nicht voneinander verschieden sein. Der geschlossene Weg muß mindestens eine Kante beinhalten, d. h. in der Folge von Paaren gibt es mindestens zwei verschiedene Kanten. Im geschlossenen Weg treten maximal k Kanten auf. Dies hat zur Folge, daß für die Bildung der Paare maximal $2k$ viele verschiedene Kanten verwendet wurden. Beachten wir bei der Bildung der Kanten im Produktgraphen die Reihenfolge der Kanten in einem Paar, so entspricht ein geschlossener Weg genau einer Folge von Kantenpaaren im Hypergraphen H . Diese genaue Zuordnung ist durch die Multikanten des Produktgraphen gegeben. Wir unterscheiden also die verschiedenen Kanten zwischen den selben Knoten an Hand der ursprünglichen Kantenpaare, die diese generiert haben. Hierdurch ist es uns jetzt möglich, den Erwartungswert $E[X]$ abzuschätzen.

Auch hier ist wieder eine Fallunterscheidung sinnvoll. Es muß beachtet werden, ob eine Kante des Hypergraphen einmal oder mehrmals in der Folge von Paaren Verwendung findet. Hier ist es nicht sinnvoll zu versuchen, alle Fälle einzeln zu untersuchen, da wir an dieser Stelle noch nicht die Größe der Konstanten k festgelegt haben. Es genügt, drei prinzipielle Varianten zu unterscheiden. Zuerst untersuchen wir den Fall, daß alle Kanten des Hypergraphen in der Folge von Paaren verschieden sind. Die Anzahl solcher Folgen zählen wir in der Zufallsvariable $X_1 = X_1(H)$. Anschließend betrachten wir die Variante, daß mindestens eine Kante zweimal in den Paaren Verwendung findet und mindestens eine Kante des Hypergraphen genau einmal erscheint. Die Anzahl dieser Folgen registrieren wir in $X_2 = X_2(H)$. Den Abschluß bildet der Fall, daß alle Kanten mehrmals in der Folge von Paaren verwendet werden. Die Anzahl dieser Folgen bestimmt den Wert der Zufallsvariablen $X_3 = X_3(H)$.

Mit dieser Fallunterscheidung ergibt sich $X = X_1 + X_2 + X_3$ bzw. folgern wir sofort für den Erwartungswert $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3]$. Bevor wir mit dem Berechnen der einzelnen Erwartungswerte beginnen untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer konkreten Folge von Kantenpaaren in H . Jede dieser Folge besteht aus mindestens zwei und maximal $2k$ verschiedenen Kanten. Es gibt also in der Folge genau

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

l Kanten mit $2 \leq l \leq 2k$. Diese l Kanten treten alle unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p auf. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer konkreten Folge von Kantenpaaren

$$\begin{aligned} p^l &= c^l n^{l(\varepsilon-2)} (1 - |o(1)|) \\ &\leq c^l n^{l(\varepsilon-2)}. \end{aligned} \tag{150}$$

Für die Berechnung der drei Erwartungswerte müssen wir nun in jedem Fall nur noch untersuchen, wieviele verschiedene geschlossene Wege es geben kann:

Fall 1: alle Kanten verschieden ($l = 2k$).

Ein geschlossener Weg beginnt mit dem Knoten (a_1, b_1) . Für die Wahl dieses Knotens gibt es n^2 Möglichkeiten. Nun kann in den ersten $k - 1$ Kantenpaaren $\begin{smallmatrix} (a_i, a_{i+1}, z_i) \\ (b_i, b_{i+1}, z_i) \end{smallmatrix}$ der Zielknoten (a_{i+1}, b_{i+1}) gewählt werden. Hierfür gibt es $n^{2(k-1)}$ viele Möglichkeiten. Im letzten Kantenpaar $\begin{smallmatrix} (a_k, a_{k+1}, z_k) \\ (b_k, b_{k+1}, z_k) \end{smallmatrix}$ ist der Knoten (a_{k+1}, b_{k+1}) identisch mit dem Startknoten und kann nicht variiert werden. Dies ergibt zunächst $n^2 \cdot n^{2(k-1)} = n^{2k}$ viele Möglichkeiten. In jedem Kantenpaar gibt es zusätzlich n Möglichkeiten, den gemeinsamen Knoten z_i zu wählen. Dies sind n^k viele Möglichkeiten.

Aus einem Kantenpaar $\begin{smallmatrix} (a_i, a_{i+1}, z_i) \\ (b_i, b_{i+1}, z_i) \end{smallmatrix}$ entstehen die zwei Kanten $(a_i, b_i) - (a_{i+1}, b_{i+1})$ und $(b_i, a_i) - (b_{i+1}, a_{i+1})$ im Produktgraphen. Diese beiden Varianten müssen wir hier jedoch nicht zählen, da wir bei der Folge von Kantenpaaren die Reihenfolge der Kanten im Paar beachtet haben. Für den betrachteten geschlossenen Weg kommt nur die Kante $(a_i, b_i) - (a_{i+1}, b_{i+1})$ in Frage. Kommt die Kante $(b_i, a_i) - (b_{i+1}, a_{i+1})$ in einem geschlossenem Weg vor, so beachten wir hier beispielsweise das Paar $\begin{smallmatrix} (b_i, b_{i+1}, z_i) \\ (a_i, a_{i+1}, z_i) \end{smallmatrix}$.

An dieser Stelle muß man beachten, daß es die beiden Kantenpaare $\begin{smallmatrix} (a_i, a_{i+1}, z_i) \\ (b_i, b_{i+1}, z_i) \end{smallmatrix}$ und $\begin{smallmatrix} (a_{i+1}, a_i, z_i) \\ (b_{i+1}, b_i, z_i) \end{smallmatrix}$ gibt, die eine Kante $(a_i, b_i) - (a_{i+1}, b_{i+1})$ im Produktgraphen generieren können. Diese beiden Paare unterscheiden sich in der Reihenfolge der a_i und a_{i+1} bzw. b_i und b_{i+1} . Dies ergibt pro Kantenpaar nochmals zwei Wahlmöglichkeiten. Bei k Kantenpaaren sind dies 2^k Varianten.

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Es gibt somit höchstens $2^k \cdot n^{3k}$ viele Möglichkeiten, in diesem Fall einen geschlossenen Weg der Länge k zu wählen. (In jedem Kantenpaar $\binom{(a_i, a_{i+1}, z_i)}{(b_i, b_{i+1}, z_i)}$ gibt es jeweils n Möglichkeiten a_i, b_i und z_i zu wählen und zwei Möglichkeiten, a_i, a_{i+1}, b_i und b_{i+1} zu ordnen.)

Damit berechnet sich der erste Erwartungswert aus:

$$\begin{aligned} E[X_1] &\leq 2^k \cdot n^{3k} \cdot p^{2k} \\ &= 2^k \cdot n^{3k} \cdot c^{2k} n^{2k(\varepsilon-2)} \cdot (1 - |o(1)|) \\ &\leq (2c^2)^k \cdot n^{3k+2k\varepsilon-4k} \\ &= (2c^2)^k \cdot (n^{2\varepsilon-1})^k \end{aligned} \tag{151}$$

$$= d^k . \tag{152}$$

Fall 2: eine Kante einfach, eine mehrfach genutzt ($2 \leq l \leq 2k - 1$).

Wenn eine Kante in der Folge von Paaren doppelt vorkommt, so gibt es maximal $2k - 1$ verschiedene Kanten in der Folge. Für die nächsten Überlegungen fixieren wir diese Anzahl l . Im Anschluß muß für die Berechnung des Erwartungswertes $E[X_2]$ über alle möglichen verschiedenen l summiert werden.

O. B. d. A. wird die einfach genutzte Kante bei der Bildung der letzten Kante im geschlossenen Weg verwendet. Dies sei z. B. die Kante (b_k, b_{k+1}, z_k) .

Es gibt wieder n^2 viele Möglichkeiten, den ersten Knoten (a_1, b_1) des geschlossenen Weges zu wählen. Wir betrachten nun das erste Vorkommen einer der ersten, zum Teil mehrfach verwendeten $l - 2$ verschiedenen Kanten. Wir betrachten nicht das Kantenpaar, welches die letzte Kanten $(a_{k-1}, b_{k-1}) - (a_1, b_1)$ des geschlossenen Weges erzeugt. Dies sei z. B. die Kante (a_i, a_{i+1}, z_i) . Der Knoten a_i ist bereits durch die vorherige Kante $(a_{i-1}, b_{i-1}) - (a_i, b_i)$ bzw. durch den Startknoten (a_1, b_1) vorgegeben. Für den Knoten a_{i+1} bestehen jedoch n Wahlmöglichkeiten. Bei $l - 2$ verschiedenen Kanten sind dies insgesamt n^{l-2} viele Varianten.

Die letzte Kante des geschlossenen Weges wird genau einmal verwendet. Diese Kante muß aber vom Knoten (a_{k-1}, b_{k-1}) zum Knoten (a_1, b_1) führen. Damit gibt es in diesem Kantenpaar keine Wahlmöglichkeiten für die verschiedenen a_i bzw.

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

b_i . Es kann lediglich deren Reihenfolge bzw. der gemeinsame Knoten z_i variiert werden. Dies werden wir gleich untersuchen.

Aus den l verschiedenen Kanten können maximal $l/2$ viele Paare $\binom{a_i, a_{i+1}, z_i}{b_i, b_{i+1}, z_i}$ gebildet werden, die sich im letzten Knoten z_i unterscheiden. Es gibt also für alle Kantenpaare, die aus den l unabhängigen Kanten gebildet werden, maximal $l/2$ verschiedene z_i . Für jedes z_i bestehen wiederum n Wahlmöglichkeiten. Dies ergibt $n^{l/2}$ viele Varianten.

Die Kante $(a_i, b_i) - (a_{i+1}, b_{i+1})$ kann sowohl aus dem Paar $\binom{a_i, a_{i+1}, z_i}{b_i, b_{i+1}, z_i}$ als auch aus dem Paar $\binom{a_{i+1}, a_i, z_i}{b_{i+1}, b_i, z_i}$ generiert werden. Für die Anordnung der a_i und a_{i+1} bzw. b_i und b_{i+1} gibt es wieder pro Kantenpaar, die verschiedene Kanten aus H beinhalten, zwei Möglichkeiten. Da sich maximal $l/2$ Paare bilden lassen, die sich in allen Kanten unterscheiden, gibt es hierfür $2^{l/2}$ viele Möglichkeiten.

Zu Beginn wurde die Position einer einfach vorkommenden Kante fixiert. Nun müssen noch alle möglichen Permutationen der Kantenanordnungen beachtet werden. Als obere Schranke findet man hier leicht $(2k)^l$, wenn man beachtet, daß es für jede der l Kanten in den Kantenpaaren maximal $2k$ Möglichkeiten gibt.

Bei einer fest vorgegeben Anzahl von l unterschiedlichen Kanten in der Folge von Kanten gibt es also maximal

$$n^2 \cdot n^{l-2} \cdot n^{l/2} \cdot 2^{l/2} \cdot (2k)^l = n^{3l/2} \cdot 2^{l/2} \cdot (2k)^l$$

viele verschiedene geschlossene Wege. Somit finden wir für den zweiten Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E[X_2] &\leq \sum_{l=2}^{2k-1} n^{3l/2} \cdot 2^{l/2} \cdot (2k)^l \cdot p^l \\ &\leq \sum_{l=2}^{2k-1} n^{3l/2} \cdot 2^k \cdot (2k)^{2k-1} \cdot c^l n^{l(\varepsilon-2)} \\ &\leq 2^k \cdot (2k)^{2k-1} \cdot \sum_{l=2}^{2k-1} n^{3l/2+l\varepsilon-2l} c^{2k-1} \end{aligned}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

$$\begin{aligned}
 &= 2^k \cdot (2ck)^{2k-1} \cdot \sum_{l=2}^{2k-1} n^{l\varepsilon-l/2} \\
 &\leq (4ck)^{2k-1} \cdot \sum_{l=2}^{2k-1} \left(n^{\varepsilon-1/2}\right)^l.
 \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon > 1/2$ ist $n^{(\varepsilon-1/2)(2k-1)}$ der größte Summand. Damit gilt:

$$E[X_2] \leq (4ck)^{2k-1} \cdot (2k-2) \cdot n^{1/2-\varepsilon} \cdot \left(n^{2\varepsilon-1}\right)^k \cdot (1+o(1)). \quad (153)$$

Es ist $\varepsilon > 1/2$. Damit liegt $n^{1/2-\varepsilon} \rightarrow 0$ vor. Dies führt uns zu:

$$E[X_2] = o\left(\left(n^{2\varepsilon-1}\right)^k\right) \quad (154)$$

$$= o(\lambda_1^k). \quad (155)$$

Ausgehend von (153) und (155) kann man schlußfolgern, daß eine Konstante ε' mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ existiert, so daß

$$E[X_2] < n^{(2\varepsilon'-1)k} \quad (156)$$

gilt.

Fall 3: alle Kanten werden mehrfach genutzt ($2 \leq l \leq k$).

In diesem Fall werden alle Kanten in der Folge von Paaren mehrfach genutzt. Damit kann es maximal k verschiedene Kanten in der Folge von Paaren geben.

Es gibt wieder n^2 viele Möglichkeiten, den ersten Knoten (a_1, b_1) des geschlossenen Weges zu wählen. Wir betrachten nun das erste Vorkommen einer der l verschiedenen Kanten. Dies sei z. B. die Kante (a_i, a_{i+1}, z_i) . Der Knoten a_i ist bereits durch die vorherige Kante $(a_{i-1}, b_{i-1}) - (a_i, b_i)$ bzw. durch den Startknoten (a_1, b_1) vorgegeben. Für den Knoten a_{i+1} bestehen jedoch n Wahlmöglichkeiten. Bei l verschiedenen Kanten sind dies insgesamt n^l viele Varianten.

Im Gegensatz zum vorhergehenden Fall gibt es bezüglich der Auswahl der a_i und b_i keine weiteren Einschränkungen in der Abschätzung. Dies resultiert aus der doppelten Nutzung der Kanten bei der Paarbildung. Das folgende Beispiel soll dies

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

illustrieren. Wir betrachten einen geschlossenen Weg der Länge k , wo am Anfang $k/2$ verschiedene Kanten vorkommen. Die zweite Hälfte des Weges besteht in der Umkehrung des ersten Wegstückes. Die Wahlmöglichkeiten hängen hier nur von der ersten Wegehälfte ab. Für den Startknoten gibt es n^2 Möglichkeiten und mit jeder neuen Kante gibt es wieder maximal n^2 viele Zielknoten. Damit gibt es hier maximal $n^{2+2k/2} = n^{2+k}$ viele Möglichkeiten. Für $k/2$ verschiedene Kanten werden maximal $l = 2k/2 = k$ viele Kanten aus H bei der Paarbildung benötigt.

Aus den l verschiedenen Kanten können maximal $l/2$ viele Paare $\begin{pmatrix} a_i, a_{i+1}, z_i \\ b_i, b_{i+1}, z_i \end{pmatrix}$ gebildet werden, die sich im letzten Knoten z_i unterscheiden. Es gibt also für alle Kantenpaare, die aus den l unabhängigen Kanten gebildet werden, maximal $l/2$ verschiedene z_i . Für jedes z_i bestehen wiederum n Wahlmöglichkeiten. Dies ergibt $n^{l/2}$ viele Varianten.

Die Kante $(a_i, b_i) - (a_{i+1}, b_{i+1})$ kann sowohl aus dem Paar $\begin{pmatrix} a_i, a_{i+1}, z_i \\ b_i, b_{i+1}, z_i \end{pmatrix}$ als auch aus dem Paar $\begin{pmatrix} a_{i+1}, a_i, z_i \\ b_{i+1}, b_i, z_i \end{pmatrix}$ generiert werden. Für die Anordnung der a_i und a_{i+1} bzw. b_i und b_{i+1} gibt es wieder pro Kantenpaar, die verschiedene Kanten aus H beinhalten, zwei Möglichkeiten. Da sich maximal $l/2$ Paare bilden lassen, die sich in allen Kanten unterscheiden, gibt es hierfür $2^{l/2}$ viele Möglichkeiten.

Manche Kanten kommen mehrfach, manche nur einfach vor. Hierfür gibt es ebenfalls verschiedene Möglichkeiten. Als obere Schranke findet man hier ebenfalls wieder $(2k)^l$, wenn man beachtet, daß es für jede der l Kanten in den Kantenpaaren maximal $2k$ Möglichkeiten gibt.

Bei einer fest vorgegeben Anzahl von l unterschiedlichen Kanten in der Folge von Kanten gibt es also maximal

$$n^2 \cdot n^l \cdot 2^{l/2} \cdot (2k)^l = n^{2+3l/2} \cdot 2^{l/2} \cdot (2k)^l$$

viele verschiedene geschlossene Wege. Somit finden wir für den dritten Erwartungswert:

$$E[X_3] \leq \sum_{l=2}^k n^{2+3l/2} \cdot 2^{l/2} \cdot (2k)^l \cdot p^l$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=2}^k n^{2+3l/2} \cdot 2^{k/2} \cdot (2k)^k \cdot c^l n^{l(\varepsilon-2)} (1 - |o(1)|) \\
&\leq 2^{k/2} \cdot (2k)^k \sum_{l=2}^k n^{2+3l/2} \cdot c^k n^{l(\varepsilon-2)} \\
&\leq (4ck)^k \cdot \sum_{l=2}^k n^{2+3l/2+l\varepsilon-2l} \\
&\leq (4ck)^k \cdot \sum_{l=2}^k n^{2-l/2+l\varepsilon} \\
&= (4ck)^k \cdot n^2 \cdot \sum_{l=2}^k n^{l\varepsilon-l/2} \\
&= (4ck)^k \cdot n^2 \cdot \sum_{l=2}^k \left(n^{\varepsilon-1/2}\right)^l .
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon > 1/2$ ist $n^{(\varepsilon-1/2)k}$ der größte Summand. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_3] &\leq (4ck)^k \cdot (k-1) \cdot n^2 \cdot n^{(\varepsilon-1/2)k} \\
&= (4ck)^k \cdot (k-1) \cdot n^{2+k\varepsilon-k/2} .
\end{aligned} \tag{157}$$

Für ein konstantes $k > \frac{2}{\varepsilon-1/2}$ gilt $2 + k\varepsilon - k/2 < 2\varepsilon k - k$. Hieraus berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_3] &= o\left(n^{2\varepsilon k-k}\right) \\
\mathbb{E}[X_3] &= o\left(\left(n^{2\varepsilon-1}\right)^k\right)
\end{aligned} \tag{158}$$

$$= o(\lambda_1^k) . \tag{159}$$

In den später betrachteten 4-SAT-Formeln ist der Fall $\varepsilon = 1$ interessant. Hierfür genügt es bereits, geschlossene Wege der Länge $k = 6$ zu betrachten.

Aus (157) und (158) folgt hier ebenfalls, daß eine Konstante ε'' mit $0 < \varepsilon'' < \varepsilon$ existiert, so daß

$$\mathbb{E}[X_3] < n^{(2\varepsilon''-1)k} \tag{160}$$

gilt.

Für einen Eigenwert λ_i von \mathbf{A} ist ebenfalls λ_i^k ein Eigenwert der Matrix \mathbf{A}^k . Ferner wissen

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

wir noch, daß die Spur einer Matrix gleich der Summe der Eigenwerte ist. Hieraus fanden wir bereits für den Erwartungswert $E[\lambda]$ sowie ein gerades k :

$$E \left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^k \right] = E \left[\text{Spur } \mathbf{A}^k \right] - E \left[\lambda_1^k \right].$$

Setzen wir die Ungleichungen 149, 151, 155 und 159 ein, so erhalten wir sofort

$$E \left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^k \right] = o \left(\lambda_1^k \right). \quad (161)$$

Nun gehen wir wieder wie im Beweis zu Theorem 5.11 vor. Für $\delta(n) = o(1)$ und $\delta > 0$ gilt $1 - (1 - \delta(n))^k \leq k \cdot \delta(n)$ für hinreichend große n . Hier ist z. B. $\delta(n) = 1/\ln^{2s} n$ für eine Konstante $s \geq 1$ geeignet. Aus (147) und $\text{Prob} \left[\overline{\mathcal{A}} \right] = o(n^{2-i})$ für jede Konstante $i > 2$ leiten wir $E \left[\lambda_1^k \right] \geq d^k - k \cdot \delta(n) \cdot d^k + o(1/n)$ ab. Mit (152), (156) und (160) finden wir

$$E \left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^k \right] \leq n^{(2\varepsilon'-1)k} + n^{(2\varepsilon''-1)k} + k \cdot \delta(n) \cdot d^k + o(1/n).$$

Nun wenden wir die Markoff-Ungleichung an:

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^k \geq \left(1/\delta^{1/3}(n) \right) \cdot E \left[\sum_{i=2}^n \lambda_i^k \right] \right] &\leq \delta^{1/3}(n) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Es gilt also mit hoher Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i^k}{\lambda_1^k} &\leq \frac{\delta^{-1/3}(n) \cdot \left(n^{(2\varepsilon'-1)k} + n^{(2\varepsilon''-1)k} + k \cdot \delta(n) \cdot d^k + o(1/n) \right)}{d^k(1 + o(1))} \\ &= \frac{n^{(2\varepsilon'-1)k} + n^{(2\varepsilon''-1)k} + o(1/n)}{\delta^{-1/3}(n) \cdot 2^k c^{2k} \cdot n^{(2\varepsilon-1)k}} + \frac{k \cdot \delta^{2/3}(n) \cdot 2^k c^{2k} \cdot n^{(2\varepsilon-1)k}}{2^k c^{2k} \cdot n^{(2\varepsilon-1)k}}. \end{aligned} \quad (162)$$

Mit $\delta(n) = 1/\ln^{2s} n$, $s \geq 1$ und konstant sowie $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ und $0 < \varepsilon'' < \varepsilon$ folgt sofort

$$\frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i^k}{\lambda_1^k} = o(1). \quad (163)$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Für den algorithmischen Nachweis der Eigenwertseparierung kann man die Ungleichung

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

162 näher betrachten. Analog zu den Betrachtungen zu Theorem 5.11 folgert man mit $\delta^{1/2}(n) = 1/\ln^s n$ auch hier, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\sum_{i=2}^n \lambda_i^k}{\lambda_1^k} \leq 1/\ln^s n \quad (164)$$

gilt.

Nun haben wir sowohl die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix als auch die Fast- d -Regularität der Produktgraphen nachgewiesen. Aus dem Satz 2.16 folgt nun die geringe Diskrepanz:

Korollar 5.14. *Es seien $c > 0$ und $1/2 < \varepsilon < 3/2$ Konstanten sowie $p = cn^{\varepsilon-2}(1+o(1))$ und $1 \leq i \leq 3$. Für fast alle Hypergraphen H aus $\mathcal{H}_{n,3,p}$ zeigen alle Produktmultigraphen $M_i(H)$ bzw. alle gewichteten Produktgraphen $G_i(H)$ eine geringe Diskrepanz.*

Aus dem Korollar 5.10 sowie aus dem Theorem 5.12 wissen wir, daß für fast alle betrachteten zufälligen Hypergraphen die Projektions- und Produktmultigraphen fast regulär sind. Aus den Gleichungen 97 und 143 wissen wir weiter, daß diese Multigraphen diese Fast-Regularität bezüglich der Funktion $1/\ln^{2r} n$ aufweisen, wobei $r \geq 1$ eine Konstante ist. Dies kann effizient durch den Algorithmus 2.17 *Eigenwertseparierung* zertifiziert werden.

Aus den Theoremen 5.11 und 5.13 folgt die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrizen aller Projektions- und Produktmultigraphen bezüglich der Funktion $1/\ln^r n$ für fast alle betrachteten zufälligen Hypergraphen. Dies kann effizient durch den Algorithmus 2.17 *Eigenwertseparierung* zertifiziert werden. Bei einer Kantenwahrscheinlichkeit von $p \sim c/n$ im Hypergraphen genügt in beiden Fällen die Untersuchung der geschlossenen Wege der Länge $k = 6$.

Die Nachweise der Fast-Regularität sowie der Eigenwertseparierung entsprechen nach Theorem 2.16 dem Nachweis der geringen Diskrepanz. Dieser Nachweis kann nach Lemma 2.20 durch den Algorithmus 2.19 *Geringe_Diskrepanz_G* erfolgen. Analog zu Korollar sieht man, daß in den Analysen Funktionen der Art $\Theta(1/\ln^r n)$ geeignet sind. Dies führt zu

Korollar 5.15. *Für fast alle zufälligen 3-uniformen gerichteten Hypergraphen H mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim c/n$ zertifiziert der Algorithmus 2.19 *Geringe_Diskrepanz_G* effizient die geringe Diskrepanz aller Projektions- und Produktgraphen unter*

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Verwendung von $g_1(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^{2r}$, $g_2(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^r$, $k = 6$ und $r \geq 1$.

5.7 Effizienter Nachweis der geringen Diskrepanz

Im Falle von einfachen Graphen haben wir bereits gesehen, daß aus der geringen Diskrepanz der Projektions- sowie der Produktgraphen die geringe Diskrepanz des Hypergraphen folgt. Diesen Satz übertragen wir jetzt auf Multigraphen:

Theorem 5.16. *Es sei $H = (V, E)$ ein 3-uniformer gerichteter Hypergraph mit $|V| = n$, $0 \leq \alpha(n) \leq 1$ sowie $d = d(n) \rightarrow \infty$. H zeigt eine geringe α -Diskrepanz, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind:*

1. H ist fast d -regulär.
2. Für alle Knoten $x \in V$ gilt $D'_x(H) = o(d)$.
3. Alle Projektionsmultigraph $M_{i,j}(H)$, $1 \leq i < j \leq 3$ zeigen geringe α -Diskrepanz.
4. Alle Produktmultigraphen $M_k(H)$, $1 \leq k \leq 3$ zeigen geringe α^2 -Diskrepanz und geringe $(1 - \alpha)^2$ -Diskrepanz.

Beweis. Zuerst kommen wir nochmals auf das Lemma 5.8 bzw. dessen Beweis zurück. Aus der Konzentrierung aller Grade sowie aller D'_x folgte, daß in H $o(m)$ Kanten existieren, die bei der Konstruktion eines Projektionsmultigraphen $H_{i,j}$ eine Schlinge erzeugen würden. Bei der Generierung des Produktmultigraphen gab es $o(m^2/n)$ viele Kantenpaare in H , die eine Schlinge generiert hätten.

Mit $d \rightarrow \infty$ gilt $m \rightarrow \infty$. Für $\alpha = \alpha(n)$ gelte auch wieder $\alpha \neq o(1)$ und $1 - \alpha \neq o(1)$, da ansonsten auf Grund der Definition der geringen α -Diskrepanz H mit $m \rightarrow \infty$ immer geringe α -Diskrepanz zeigt. Es gibt somit eine Konstante ε' mit $0 < \varepsilon' < \alpha$, $1 - \alpha < 1 - \varepsilon'$.

Der Beweis greift die Idee des Beweises des Theorems 4.8 auf. Es sei wieder $m_{(A,B,\dots)}(M)$ die Anzahl der Kanten vom Typ (A, B, \dots) des Multigraphen (bzw. Hypergraphen) M . Der Hypergraph H , die Projektionsgraphen $M_{i,j}$ sowie die Produktgraphen M_k haben wieder die geforderten Eigenschaften. Wir konstruieren einen Widerspruch für den Fall, daß H nicht die Definition der geringen α -Diskrepanz erfüllt.

Es sei $V = X \cup Y$ eine Partition der Knoten von H mit $|X| = (\alpha + o(1)) \cdot n$. Wir beginnen wieder mit den Kanten vom Typ (X, X) im Projektionsmultigraphen $M_{1,2}$.

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Dieser zeigt geringe α -Diskrepanz, es gilt also

$$m_{(X,X)}(M_{1,2}) \sim \alpha^2 m(M_{1,2}) .$$

Diese Kanten werden nur von Kanten (X, X, V) aus H generiert. Mit Hilfe des Lemma 5.8 verwenden wir $m(M_{1,2}) \sim m$. Durch die Beschränkung von α können auch die $o(m)$ vielen Kanten, die eine Schlinge bilden würden, vernachlässigt werden. Wir erhalten also:

$$m_{(X,X,V)} \sim \alpha^2 \cdot m .$$

Die Kanten des Typs (X, X, V) in H lassen sich in Kanten der Typen (X, X, X) und (X, X, Y) unterteilen. Offensichtlich gilt wieder $m_{(X,X,V)}(M_{1,2}) = m_{(X,X,X)}(M_{1,2}) + m_{(X,X,Y)}(M_{1,2})$. In der Gegenannahme wählen wir die Anzahl der Kanten vom Typ (X, X, X) so, daß sie nicht mehr der Definition entsprechen. Es sei also

$$m_{(X,X,X)} = (\alpha + \varepsilon) \cdot m$$

mit $\varepsilon = \varepsilon(n) \neq o(1)$. Wir berechnen hieraus

$$m_{(X,X,Y)} \sim (\alpha^2(1 - \alpha) - \varepsilon) \cdot m .$$

Die Anzahl an Kanten der Typen (X, X, X) und (X, X, Y) können auch anders dargestellt werden. Analog zum Grad sei $g(x)$ die Anzahl an Kanten vom Typ $(X, X, \{x\})$. Summieren wir über alle Knoten aus X , so erhalten wir die entsprechend vorhandene Anzahl an Kanten:

$$m_{(X,X,X)}(H) = \sum_{x \in X} g(x) \quad m_{(X,X,Y)}(H) = \sum_{x \in Y} g(x) \quad m_{(X,X,V)}(H) = \sum_{x \in V} g(x) .$$

Bei der Generierung des Produktmultigraphen M_3 sind die Kanten vom Typ (X, X, V) aus H verantwortlich für die Erzeugung der Kanten $(X \times X, X \times X)$ in M_3 . Ein Knoten x kann maximal $2 \cdot \binom{g(x)}{2} \approx g^2(x)$ viele Kanten vom Typ $(X \times X, X \times X)$ im Produktmultigraphen erzeugen. Aus der Konzentrierung von $D'(x)$ folgt unmittelbar, daß nur $o(d^2)$ viele Kantenpaare eine Schlinge erzeugen würden. Der Knoten x erzeugt also $\approx g^2(x) - o(d)$ viele Kanten vom Typ $(X \times X, X \times X)$ in M_3 . Damit kann die Anzahl

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

an Kanten vom Typ $(X \times X, X \times X)$ in M_3 abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) &\geq \sum_{x \in V} \left(2 \cdot \binom{g(x)}{2} - o(d) \right) \\ &= \sum_{x \in X} g^2(x) + \sum_{x \in V} g^2(x) - \sum_{x \in V} g(x) - o(dn) . \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summen können durch die Jensensche Ungleichung (230) abgeschätzt werden. Die dritte Summe ergibt alle Kanten vom Typ (X, X, V) . Auf Grund der Beschränkung von α ist dies $m_{(X, X, V)}(H) = \Theta(m) = \Theta(dn)$, so daß der Term $o(dn)$ vernachlässigbar klein ist. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) &\geq \left(\frac{(\sum_{x \in X} g(x))^2}{\alpha n} + \frac{(\sum_{x \in Y} g(x))^2}{(1-\alpha)n} - m_{(X, X, V)}(H) \right) \cdot (1 + o(1)) \\ &= \left(\frac{m_{(X, X, X)}^2(H)}{\alpha n} + \frac{m_{(X, X, Y)}^2(H)}{(1-\alpha)n} - m_{(X, X, V)}(H) \right) \cdot (1 + o(1)) \\ &= \left(\frac{(\alpha^3 + \varepsilon)^2 m^2}{\alpha n} + \frac{\alpha^2(1-\alpha) - \varepsilon)^2 m^2}{(1-\alpha)n} - \alpha^2 m \right) \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned}$$

Mit $m(H_3) \sim m^2/n$ (vgl. Lemma 5.8) ergibt die Umformung hier ebenfalls wieder:

$$m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) \geq \left(\alpha^4 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha(1-\alpha)} \right) \cdot m(M_3) \cdot (1 + o(1)) . \quad (165)$$

Der Projektionsmultigraph M_3 soll ebenfalls geringe α^2 -Diskrepanz zeigen. Daraus folgt aber sofort für die Anzahl an Kanten vom Typ $((X \times X, X \times X))$:

$$m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) \sim \alpha^4 \cdot m(M_3) . \quad (166)$$

Die Ungleichung 165 stellt in Verbindung mit der Gleichung 166 für hinreichend großes n und $\varepsilon \neq o(1)$ einen Widerspruch dar. Damit gilt $m_{(X, X, X)}(H) \sim \alpha^3 m$. Hieraus folgt sofort $m_{(X, X, Y)} \sim \alpha^2(1-\alpha)m$. Vertauscht man o. B. d. A. im Beweis X und Y und entsprechend α und $1-\alpha$, so erhält man $m_{(Y, Y, Y)}(H) \sim (1-\alpha)^3 m$ und $m_{(Y, Y, X)} = (1-\alpha^2)\alpha m$. Alle weiteren Kantenzahlen aus der Definition der geringen α -Diskrepanz erhält man bei der Betrachtung der anderen Projektions- und Produktmultigraphen. \square

Wir können nun die geringe Diskrepanz eines Hypergraphen aus der geringen Diskrepanz seiner Projektions- und Produktmultigraphen ableiten:

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Korollar 5.17. *Es sei $H = (V, E)$ ein fast d -regulärer 3-uniformer gerichteter Hypergraph mit $|V| = n$ und $d = d(n) \rightarrow \infty$. Ferner gelte $D'_x(H) = o(d)$ für alle Knoten $x \in V$. H zeigt eine geringe Diskrepanz, wenn alle Projektions- sowie alle Produktmultigraphen eine geringe Diskrepanz zeigen.*

Das Korollar ist eine wichtige Grundlage für die Entwicklung eines effizienten Algorithmus zum Nachweis der geringen Diskrepanz. Für die konkrete Formulierung des Algorithmus ist jedoch die genaue Analyse der $o(1)$ -Terme notwendig. Wir kommen also noch einmal zurück zum Beweis des Theorems 5.16. Wir betrachten eine Partition $V = X \cup Y$ mit $|X| = \alpha n$ und $|Y| = (1 - \alpha)n$ mit $0 < \alpha < n$. Es sei $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 < f_1(n) < 1/2$ die Funktion, die die Fast- d -Regularität des Hypergraphen sowie die Konzentrierung aller $D'(x)$ beschreibt. Es gilt also für alle Knoten $x \in V$ und alle Koordinaten $1 \leq i \leq 3$:

$$(1 - f_1(n)) \cdot d \leq d_i(x)(1 + f_1(n)) \cdot d \quad \text{und} \quad (167)$$

$$D'(x) \leq f_1(n) \cdot d. \quad (168)$$

Die geringe Diskrepanz der Projektions- und Produktmultigraphen sei durch die Funktion $f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 < f_2(n) < 1$ gegeben. In einem Projektionsmultigraphen $M_{i,j}$ gilt somit:

$$\left| m_{(X,X)}(M_{i,j}) - \alpha^2 \cdot m(M_{i,j}) \right| \leq f_2(n) \cdot m(M_{i,j}) \quad (169)$$

$$\left| m_{(Y,Y)}(M_{i,j}) - (1 - \alpha)^2 \cdot m(M_{i,j}) \right| \leq f_2(n) \cdot m(M_{i,j}) \quad (170)$$

$$\left| m_{(X,Y)}(M_{i,j}) - 2\alpha(1 - \alpha) \cdot m(M_{i,j}) \right| \leq f_2(n) \cdot m(M_{i,j}) \quad (171)$$

Im Produktmultigraphen M_k sind folgende beiden Ungleichungen wichtig:

$$\left| m_{(X \times X, X \times X)}(M_k) - \alpha^4 \cdot m(M_{i,j}) \right| \leq f_2(n) \cdot m(M_k) \quad (172)$$

$$\left| m_{(Y \times Y, Y \times Y)}(M_k) - (1 - \alpha)^4 \cdot m(M_{i,j}) \right| \leq f_2(n) \cdot m(M_k) \quad (173)$$

Nun konzentrieren wir uns wieder auf die Kanten der Typen (X, X, X) und (X, X, Y) in H und betrachten speziell den Projektionsmultigraph $M_{1,2}$ und den Produktgraph M_3 . Alle weiteren Fälle folgen dann analog. Es sei wieder $m_{(X,X,X)}(H) = (\alpha^3 + \varepsilon) \cdot m(H)$, mit $0 \leq \alpha \leq 1$ folgt zunächst $|\varepsilon| \leq 1$. Dieses $\varepsilon = \varepsilon(n)$ werden wir nun abschätzen. Um die folgenden Formeln etwas übersichtlicher zu gestalten werden wir $m = m(H)$, $m_{1,2} = m(M_{1,2})$, $m_3 = m(M_3)$, $m_{(X,X,\cdot)} = m_{(X,X,\cdot)}(H)$, $f_1 = f_1(n)$ sowie $f_2 = f_2(n)$ verwenden. Wir analysieren zuerst, in welchem Verhältnis die Kantenzahlen der einzelnen

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Graphen stehen. Der Projektionsmultigraph $M_{1,2}$ kann maximal so viele Kanten wie der Hypergraph H enthalten. Pro Knoten $x \in H$ sind $D'(x)$ Schlingen möglich. Zusammen mit der Ungleichung 168 ergibt dies:

$$m - f_1 \cdot d \cdot n \leq m_{1,2} \leq m . \quad (174)$$

Auf Grund der Fast- d -Regularität des Hypergraphen H gilt ebenfalls

$$(1 - f_1) \cdot d \cdot n \leq m \leq (1 + f_1) \cdot d \cdot n . \quad (175)$$

Wir kennen die Anzahl der Kanten vom Typ (X, X) in $M_{1,2}$. Jeder dieser Kanten entspricht einer Kante vom Typ (X, X, V) in H . Zusätzlich können in H noch weitere Kanten vom Typ (X, X, V) sein, die im Projektionsmultigraphen eine Schlinge erzeugen würden. Die entsprechenden Kanten finden wir in den Ungleichungen 168 und 169. Dies führt zu

$$(\alpha^2 - f_2) \cdot m_{1,2} \leq m_{(X,X,V)} \leq (\alpha^2 + f_2) \cdot m_{1,2} + f_1 \cdot d \cdot n . \quad (176)$$

Mit der Ungleichung 174 folgern wir weiter

$$m_{(X,X,V)} \leq (\alpha^2 + f_2) \cdot m + f_1 \cdot d \cdot n . \quad (177)$$

Die Kanten vom Typ (X, X, V) in H lassen sich in Kanten vom Typ (X, X, X) sowie in Kanten vom Typ X, X, Y unterteilen. Mit $m_{(X,X,X)} = (\alpha^3 + \varepsilon)m$ folgt sofort eine Abschätzung für die Anzahl der Kanten vom Typ (X, X, Y) :

$$(\alpha^2(1 - \alpha) - \varepsilon - f_2) \cdot m_{1,2} \leq m_{(X,X,Y)} \leq (\alpha^2(1 - \alpha) - \varepsilon + f_2) \cdot m_{1,2} + f_1 \cdot d \cdot n . \quad (178)$$

Die Anzahl Kanten $m_{1,2}$ in $M_{1,2}$ ist durch die Ungleichung 174 beschränkt. Mit $f_1 < 1$ folgern wir:

$$\begin{aligned} m_{(X,X,Y)} &\geq (\alpha^2(1 - \alpha) - f_2 - \varepsilon)m - f_1 dn \\ &= m \left(\alpha^2(1 - \alpha) - f_2 - \varepsilon - \frac{f_1 dn}{m} \right) \\ &= m \left(\alpha^2(1 - \alpha) - f_2 - \varepsilon - \frac{f_1 dn}{d(1 - f_1)n} \right) \\ &= m \left(\alpha^2(1 - \alpha) - f_2 - \varepsilon - \frac{f_1}{1 - f_1} \right) \\ &= m \left(\alpha^2(1 - \alpha) - \varepsilon - \frac{f_2 - f_1 f_2 + f_1}{1 - f_1} \right) \end{aligned}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

$$\geq m \left(\alpha^2(1 - \alpha) - \varepsilon - \frac{f_1 + f_2}{1 - f_1} \right). \quad (179)$$

Analog können wir den Produktmultigraph M_3 betrachten. Ein Knoten x in H hat auf der Koordinate 3 maximal den Grad $d_3(x) \leq d \cdot (1 + f_1)d$. Damit erzeugt er maximal $2 \cdot \binom{d(1+f_1)}{2}$ viele Kanten im Produktmultigraph. Ein Knoten x kommt auf der dritten Koordinate von H mindestens $d(1 - f_1)$ mal vor. Davon sind maximal $D'(x) \leq f_1 \cdot d$ viele Kanten uninteressant bei der Generierung der Kanten im Produktmultigraph. Bezüglich des Knoten x werden also mindestens $2 \cdot \binom{d(1-2 \cdot f_1)}{2}$ viele Kanten im Produktmultigraph erzeugt. O.B.d.A. gelte $f_1(n) < 1/2$. Ferner verwenden wir ebenfalls o.B.d.A. reelle Binomialkoeffizienten. Wir erhalten also:

$$2 \cdot \binom{d(1 - 2f_1)}{2} \cdot n \leq m_3 \leq 2 \cdot \binom{d(1 + f_1)}{2} \cdot n. \quad (180)$$

Nun wenden wir uns den Kanten vom Typ $(X \times X, X \times X)$ im Produktmultigraphen M_3 zu. Wie im Beweis des Theorems 5.16 verwenden wir $g(x)$ als Anzahl der Kanten vom Typ $(X, X, \{x\})$. Pro Knoten x sind maximal wieder maximal $D'(x)$ Kanten ungeeignet bei der Generierung von Kanten im Produktmultigraph. Analog zum Beweis des Theorems 5.16 sowie analog zur Herleitung der Ungleichung 180 finden wir nun unter Anwendung der Jensenschen Ungleichung (230):

$$\begin{aligned} m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) &\geq \sum_{x \in X} \left(2 \cdot \binom{g(x)}{2} - D'(x) \right) + \sum_{x \in Y} \left(2 \cdot \binom{g(x)}{2} - D'(x) \right) \\ &\geq \sum_{x \in X} g^2(x) + \sum_{x \in Y} g^2(x) - \sum_{x \in V} \left(g(x) - 2 \binom{D'(x)}{2} \right) \\ &\geq \frac{m_{X,X,X}^2}{\alpha n} + \frac{m_{X,X,Y}^2}{(1 - \alpha)n} - m_{(X,X,V)} - 2 \binom{f_1 d}{2} n. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Kanten des Typs (X, X, X) in H ist bekannt. Die Ungleichungen 177 und 179 liefern eine Abschätzung für die Kanten der Typen (X, X, V) und (X, X, Y) in H :

$$\begin{aligned} m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) &\geq \frac{(\alpha^3 + \varepsilon)^2 m^2}{\alpha n} + \frac{\left(\alpha^2(1 - \alpha) - \varepsilon - \frac{f_1 + f_2}{1 - f_1} \right)^2 m^2}{(1 - \alpha)n} \\ &\quad - (\alpha^2 + f_2)m - f_1 dn - 2 \binom{f_1 d}{2} n \end{aligned}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

$$\geq \left(\alpha^4 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{2\varepsilon}{1-\alpha} \cdot \frac{f_1+f_2}{1-f_1} - 2\alpha^2 \frac{f_1+f_2}{1-f_1} + \frac{(f_1+f_2)^2}{(1-f_1)^2} \right) \frac{m^2}{n} - (\alpha^2 + f_2)m - f_1^2 d^2 n .$$

Im nächsten Schritt bringen wir ε auf eine Seite der Ungleichung:

$$\frac{\varepsilon^2}{\alpha(1-\alpha)} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \cdot \frac{f_1+f_2}{1-f_1} \leq \left(m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) + (\alpha^2 + f_2)m + f_1^2 d^2 n \right) \frac{n}{m^2} - \alpha^4 - 2\alpha^2 \frac{f_1+f_2}{1-f_1} - \frac{(f_1+f_2)^2}{(1-f_1)^2} .$$

Mit $-1 < \varepsilon < 1$ folgern wir:

$$\frac{\varepsilon^2}{\alpha(1-\alpha)} \leq \left(m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) + (\alpha^2 + f_2)m + f_1^2 d^2 n \right) \frac{n}{m^2} - \alpha^4 + 2 \cdot \frac{f_1+f_2}{(1-f_1) \cdot (1-\alpha)}$$

Aus $0 < \alpha < 1$ folgt $0 < 1 - \alpha < 1$ und $0 < \alpha(1 - \alpha) < 1$, hieraus folgt:

$$\varepsilon^2 \leq \left(m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) + (\alpha^2 + f_2)m + f_1^2 d^2 n \right) \frac{n}{m^2} - \alpha^4 + 2 \cdot \frac{f_1+f_2}{(1-f_1)} . \quad (181)$$

Wir analysieren nun einzeln die Terme auf der rechten Seite der Ungleichung 181. O.B.d.A. sei $f_1(n) < 1/2$. Somit haben wir $x/(1-f_1) < 2x$ für alle $x > 0$. Wir erhalten sofort

$$2 \cdot \frac{f_1+f_2}{1-f_1} < 2(f_1+f_2) \quad (182)$$

Aus der geringen Diskrepanz von M_3 folgt nach der Ungleichung 172 eine Abschätzung der Anzahl der Kanten $m_{(X \times X, X \times X)}(M_3)$. Die Anzahl m_3 an Kanten in M_3 ist durch die Ungleichung 180 beschränkt. Die Kantenzahl m des Hypergraphen H ist durch die Konzentrierung des Grades nach der Ungleichung 175 beschränkt. Zusammen ergeben diese Ungleichungen:

$$\begin{aligned} m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) \cdot \frac{n}{m^2} - \alpha^4 &\leq \frac{(\alpha^4 + f_2)m_3 n}{m^2} - \alpha^4 \\ &\leq \frac{(\alpha^4 + f_2)d^2(1+f_1)^2 n^2}{d^2(1-f_1)^2 n^2} - \alpha^4 \\ &= (\alpha^4 + f_2) \cdot \left(1 + \frac{4f_1}{(1-f_1)^2} \right) - \alpha^4 \\ &= f_2 + \frac{(\alpha^4 + f_2)4f_1}{(1-f_1)^2} . \end{aligned}$$

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

Mit $0 < \alpha, f_2 < 1$ und $0 < f_1 < 1/2$ folgt nun:

$$m_{(X \times X, X \times X)}(M_3) \cdot \frac{n}{m^2} - \alpha^4 \leq 32f_1 + f_2. \quad (183)$$

Der nächste Term der Ungleichung 181 kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + f_2)m \cdot \frac{n}{m^2} &\leq \frac{(\alpha^2 + f_2)n}{d(1 - f_1)n} \\ &= \frac{\alpha^2 + f_2}{d(1 - f_1)} \\ &\leq \frac{4}{d}. \end{aligned} \quad (184)$$

Die Analyse des noch fehlenden Terms ergibt:

$$\begin{aligned} f_1 d^2 n \cdot \frac{n}{m^2} &\leq \frac{f_1^2 d^2 n^2}{d^2 (1 - f_1)^2 n^2} \\ &= \left(\frac{f_1}{1 - f_1} \right)^2 \\ &\leq 4f_1^2. \end{aligned} \quad (185)$$

Mit $f_1 < 1/2$ gilt $f_1^2 < f_1/2$. Nun setzen wir die Ungleichungen 182 bis 185 in 181 ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &\leq 32f_1 + f_2 + \frac{4}{d} + 4f_1^2 + 2(f_1 + f_2) \\ &\leq 36f_1 + 3f_2 + \frac{4}{d} \\ &\leq 36f_1 + 4f_2 + \frac{4}{d} + 24\sqrt{f_1 f_2} + 24\sqrt{f_1/d} + 8\sqrt{f_2/2} \\ &= \left(6\sqrt{f_1} + 2\sqrt{f_2} + 2\sqrt{1/d} \right)^2 \\ \Rightarrow |\varepsilon| &\leq 6\sqrt{f_1} + 2\sqrt{f_2} + 2\sqrt{1/d}. \end{aligned} \quad (186)$$

Die Abschätzung von $\varepsilon(n)$ kann genauer durchgeführt werden. Die Ungleichung 186 ist aber ausreichend, um daraus im Zusammenhang mit dem Korollar 5.10 den Algorithmus 5.18 *Geringe_Diskrepanz_H* zum Nachweis der geringen Diskrepanz von H zu entwickeln.

Lemma 5.19. *Es sei H ein 3-uniformer gerichteter Hypergraph, auf den der Algorithmus 5.18 *Geringe_Diskrepanz_H* angewandt wird. Dabei seien g_1, g_2 und g_3 in polynomieller Zeit berechenbar und es gelte $0 < g_1(n) < 1/2$, $0 < g_2(n) \ll g_3(n)$ und*

Algorithmus 5.18 (Geringe_Diskrepanz_H($H, g_1(), g_2(), k$)).

Eingabe: · $H = (V, E)$ - 3-uniformer gerichteter Hypergraph
 mit $|V| = n$
 · $g_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g_1(n) = o(g_2(n)), 0 \leq g_1(n) < 1/2, g_1(n) \ll g_2(n)$
 · $g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g_2(n) = o(1), 0 \leq g_2(n) < 1$
 · $k \in \mathbb{N}$

Ausgabe: H hat geringe Diskrepanz, g / FAIL

1. IF NOT Fast_Regulär_H($H, g_1(n)$) THEN FAIL
 // Algorithmus 3.8
 // gleichzeitig Berechnung von d
2. IF NOT Test_D'($H, g_1()$) THEN FAIL
 // Algorithmus 5.4
3. FOR EACH $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ DO {
4. Berechnung des Projektionsmultigraphen $M_{i,j}(H)$
 // entsprechend Definition 5.1
5. Berechnung der Adjazenzmatrix $\mathbf{A}(M_{i,j})$
 // entsprechend Gleichung 13
6. Berechnung des Produktmultigraphen $M_k(H)$
 // entsprechend Definition 5.2
7. Berechnung der Adjazenzmatrix $\mathbf{A}(M_k)$
 // entsprechend Gleichung 13
8. IF NOT Geringe_Diskrepanz_G($\mathbf{A}(M_{i,j}), g_1(), g_2(), k$) OR
 NOT Geringe_Diskrepanz_G($\mathbf{A}(M_k), g_1(), g_2(), k$)
 // Algorithmus 2.19 }
 THEN RETURN FAIL
9. RETURN H hat geringe Diskrepanz,
 $g = (6\sqrt{g_1(n)} + 2\sqrt{g_2(n)} + 2\sqrt{1/d})$

$0 < g_3(n) < 1$. Dann gilt:

1. Der Algorithmus hat polynomielle Laufzeit.
2. Gibt der Algorithmus geringe Diskrepanz aus, dann berechnet er auch ein d , so daß H bezüglich g_1 fast d -regulär ist.

5 Diskrepanz von Hypergraphen und Multigraphen

3. Wenn der Algorithmus geringe Diskrepanz ausgibt, dann zeigt H bezüglich $(6\sqrt{g_1(n)} + 2\sqrt{g_3(n)} + 2\sqrt{1/d})$ geringe Diskrepanz.

Beweis. Die Korrektheit der Ausgabe des Algorithmus folgt sofort aus dem Korollar 5.10 sowie den Lemmata 3.9, 5.5 und 2.20, die die Korrektheit der verwendeten Algorithmen beweisen. Diese Lemmata ergeben ebenfalls eine polynomielle Laufzeit für diese Algorithmen sowie den Nachweis der Fast- d -Regularität bezüglich g_1 . Die geringe Diskrepanz bezüglich $(6\sqrt{g_1(n)} + 2\sqrt{g_3(n)} + 2\sqrt{1/d})$ ergibt sich aus der Ungleichung 186.

Für den Nachweis der polynomiellen Laufzeit sind nun lediglich die Konstruktion der Projektions- und Produktmultigraphen sowie die Generierung der entsprechenden Adjazenzmatrizen von belang.

Bei der Konstruktion des Projektionsmultigraphen entsprechend Definition 5.1 muß für jede Kante aus H eine neue Kante erzeugt werden. Dies sollte mit einer Laufzeit $O(|V| + |E|)$ realisiert werden können. Bei der Generierung des Produktmultigraphen mit n^2 Knoten entsprechend Definition 5.2 kann man im einfachsten Fall für jedes der $\binom{|E|}{2}$ Kantenpaare aus H überprüfen, ob zwei neue Kanten generiert werden müssen. Dies kann in einer Laufzeit $O(|V|^2 + |E|^2)$ realisiert werden. Die Adjazenzmatrix eines Graphen mit n' Knoten erhält man in der Zeit $O(n'^2)$, indem zuerst alle Matrixelemente mit null initialisiert werden. Anschließend erhöht man für jede Kante des Graphen die beiden zugehörigen Einträge um eins. □

Der Algorithmus 5.18 *Geringe_Diskrepanz_H* bietet noch Möglichkeiten der Verbesserung. Wenn der Nachweis der Konzentrierung aller D'_x erfolgt ist, so kann die Konzentrierung der Grade im Projektions- sowie im Produktmultigraphen darauf zurückgeführt werden und muß nicht neu berechnet werden. Bei der Berechnung der Funktion für die geringe Diskrepanz von H werden nur die Funktionen g_1 und g_2 verwendet, auf die getestet wurde. Im Algorithmus bietet sich aber die Möglichkeit, diese Werte genauer zu bestimmen, z. B. durch den Vergleich des kleinsten und größten Grades mit d bzw. durch die Übergabe der Eigenwerte beim Diskrepanztest der Multigraphen.

Wir interessieren uns hauptsächlich für 3-uniforme Hypergraphen mit einer Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim c/n$. Aus dem Lemma 3.10 folgt die Konzentrierung des Grades aller Knoten bezüglich $1/\ln^{2r} n$. Der Algorithmus 3.9 weist diese effizient nach Korollar 3.11 für fast alle Hypergraphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit p nach. Ebenso folgt aus Lemma 5.5 die Konzentrierung von D'_x und aus Korollar 5.6 der effiziente Nach-

6 Der maximale Schnitt (MAXCUT) in zufälligen Graphen

weis in fast allen betrachteten Hypergraphen unter Verwendung des Algorithmus 5.4 *Test-D'*. Die geringe Diskrepanz der Projektions- und Produktmultigraphen in fast allen 3-uniformen Hypergraphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim c/n$ folgt aus den Theoremen 5.11 und 5.13. Dabei sind diese Multigraphen mit hoher Wahrscheinlichkeit bezüglich $1/\ln^{2r} n$ fast d -regulär und weisen bezüglich $1/\ln^r n$ geringe Diskrepanz auf. Nach Korollar 5.15 können wir diese effizient fast immer durch den Algorithmus 2.19 *Geringe-Diskrepanz-G* nachweisen. Dabei war es ausreichend, geschlossene Wege der Länge $k = 6$ zu betrachten. Wie in Korollar 3.11 sind für die Betrachtungen Funktionen der Art $\Theta(1/\ln^{2r})$ geeignet. Damit folgt aber

Korollar 5.20. *Es sei $r \in \mathbb{N}$ eine Konstante mit $r \geq 1$ sowie $g_1(n) = 1/1/\lceil \log_2 n \rceil^{2r}$, $g_2(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^r$, $k = 6$ und n hinreichend groß. Dann zertifiziert der Algorithmus 5.18 *Geringe-Diskrepanz-H* effizient die geringe Diskrepanz bezüglich $g(n) = 6\sqrt{g_1(n)} + 2\sqrt{g_2(n)} + 2\sqrt{1/cn}$ für fast alle zufälligen 3-uniformen gerichteten Hypergraphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim c/n$.*

6 Der maximale Schnitt (MAXCUT) in zufälligen Graphen

Wir betrachten dünne zufällige Graphen mit einer Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim c/n$. Es wird gezeigt, daß für jede Konstante $0 < \varepsilon < 1$ ein $c(\varepsilon) = (12 \ln 2)/\varepsilon^2 \approx 8,32/\varepsilon^2$ existiert, so daß der maximale Schnitt (MAXCUT) in fast allen diesen zufälligen Graphen mit $c > c(\varepsilon)$ nicht größer als $\frac{1}{2}(1 + \varepsilon)cn/2$ ist. Für kleine ε ist damit ein maximaler Schnitt kaum größer als die Hälfte der erwarteten Kantenanzahl des Graphen.

$\mathcal{G}_{n,p}$ sei die Familie der zufälligen einfachen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ Knoten und der Kantenwahrscheinlichkeit $p = p(n)$. Im Graphen gibt es $N = \binom{n}{2}$ mögliche Kanten. Die Anzahl Kanten $|E| = m$ eines solchen Graphen ist (n, p) -binomialverteilt. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß ein solcher Graph genau k Kanten enthält

$$\begin{aligned} \text{Prob}[m = k] &= b(k; N, p) \\ &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} . \end{aligned}$$

Soll die Anzahl der Kanten jedoch mindestens k betragen, so berechnet sich die Wahrscheinlichkeit hierfür aus

$$\text{Prob}[m \geq k] = \text{Bin}(k; N, p)$$

6 Der maximale Schnitt (MAXCUT) in zufälligen Graphen

$$= \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} .$$

Sind die Parameter k und p fest, so ist die Binomialverteilung $\text{Bin}(k; n, p)$ für wachsendes n monoton wachsend. Es ist also

$$\text{Bin}(k; n_1, p) \leq \text{Bin}(k; n_2, p)$$

für $n_1 \leq n_2$. Dies kann leicht begründet werden. Die (n, p) -Binomialverteilung kann man sich so vorstellen, daß n -mal nacheinander und unabhängig voneinander das gleiche Zufallsexperiment durchgeführt wird. Jedes dieser Experimente ist mit der Wahrscheinlichkeit p erfolgreich. Wir interessieren uns hier nur dafür, daß mindestens k -mal ein positiver Ausgang vorlag. Für die ersten n_1 Experimente von $\text{Bin}(k; n_2, p)$ ergibt sich ebenfalls die Wahrscheinlichkeit $\text{Bin}(k; n_1, p)$, daß k -mal das Experiment gelang. Werden nun weitere $(n_2 - n_1)$ Experimente durchgeführt kann die Wahrscheinlichkeit für k -maliges Gelingen nur noch steigen. Diese Monotonie gilt ebenfalls für reelle n und deren Binomialkoeffizienten bzw. einer analog definierten Binomialverteilung.

Eine Partition $V = V_1 \cup V_2$ der Knoten erzeugt einen Schnitt des Graphen $G = (V, E)$. Es handelt sich hierbei um die Kantenmenge $E' \subseteq E$, die die beiden Knotenmengen verbindet. Eine Kante $e = \{u, v\}$ gehört somit zum Schnitt genau dann, wenn $u \in V_1$ und $v \in V_2$ gilt. Die Anzahl Kanten $|E'|$ wird als Größe des Schnitts bezeichnet.

Beim Problem MAXCUT (maximaler Schnitt) wird eine solche Partition der Knoten gesucht, so daß die Größe des Schnitts maximal ist.

Lemma 6.1. *Es seien $c > 0$ und $0 \leq \delta \leq 1$ Konstanten. Ferner seien $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\gamma = o(\varepsilon)$ und $\gamma^2 = \omega(1/n^{1+\delta})$. Für fast alle zufälligen Graphen $G = (V, E) \in \mathcal{G}_{n,p}$ mit $p = c \cdot \frac{n^\delta}{n} \cdot (1 + o(1))$, $m = |E|$ sowie*

- $\delta = 0$, $c > \frac{12 \ln 2}{\varepsilon^2} \approx \frac{8.32}{\varepsilon^2}$ und ε ist eine Konstante bzw.
- $\varepsilon = o(1)$ und $\varepsilon^2 = \omega(1/n^\delta)$, z. B. $\varepsilon = 1/\ln n$ und $\gamma = 1/\ln^2 n$,

gilt:

1. $|m - p \binom{n}{2}| \leq \gamma \cdot p \binom{n}{2}$

6 Der maximale Schnitt (MAXCUT) in zufälligen Graphen

2. Ein maximaler Schnitt hat eine Größe von höchstens

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon) \cdot m .$$

Beweis. 1. Die Anzahl m an Kanten des Graphen G ist binomialverteilt mit den Parametern p und $\binom{n}{2}$. Damit berechnet sich die erwartete Anzahl an Kanten aus $E[m] = p \cdot \binom{n}{2}$. Durch die Anwendung der Chernoff-Schranken (Ungleichung 223) erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[|m - E[m]| > \gamma \cdot E[m]] &\leq 2e^{-\gamma^2 \cdot E[m]/3} \\ &= 2e^{-\gamma^2 \cdot O(n^{1+\delta})} \\ &= o(1) . \end{aligned}$$

2. Es sei $X = X(G)$ die Größe eines maximalen Schnitts des zufälligen Graphen G aus $\mathcal{G}_{n,p}$. Es sei weiter $\varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon\gamma + \gamma$ bzw. es ist $1 + \varepsilon = (1 + \varepsilon) \cdot (1 + \gamma)$. Wir zeigen in diesem Teil des Beweises, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit die Größe eines maximalen Schnitts höchstens

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon') \cdot p \cdot \binom{n}{2}$$

beträgt. Aus dem ersten Teil des Lemmas wissen wir, daß mit hoher Wahrscheinlichkeit

$$m \leq (1 + \gamma) \cdot p \cdot \binom{n}{2}$$

gilt. Damit folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Es sei $S \subseteq V$ mit $0 \leq |S| = s \leq n$ eine Teilmenge der Knoten von G . Durch S ist die Partition $V = S \cup (V \setminus S)$ der Knoten und somit ein Schnitt gegeben. Es sei nun $X_S = X_S(G)$ die Zufallsvariable, die die Größe des durch S erzeugten Schnitts von G enthält. Offensichtlich ist $X = \max_{S \subseteq V} X_S$.

Betrachten wir zunächst einen durch die Knotenmenge S fest vorgegebenen Schnitt. Zwischen den beiden Knotenmengen können $s(n - s)$ Kanten verlaufen. Jede Kante tritt mit der Wahrscheinlichkeit p auf. Die Anzahl der Kanten X_S des Schnitts ist somit $(s(n - s), p)$ -binomialverteilt. Die Wahrscheinlichkeit, daß genau k Kanten im Schnitt sind beträgt $b(k; s(n - s), p)$. Die zu erwartende Anzahl Kanten $E[X_S]$ berechnet sich folglich aus $E[X_S] = s(n - s)p$.

6 Der maximale Schnitt (MAXCUT) in zufälligen Graphen

Das Produkt $s(n-s)$ wird dann maximal, wenn in S etwa die Hälfte der Knoten enthalten ist, also $s = \lfloor n/2 \rfloor$ gilt. Dadurch berechnet sich für jede Teilmenge $S \subseteq V$ der Erwartungswert von X_S aus $E[X_S] \leq \lfloor n/2 \rfloor \cdot \lfloor n/2 \rfloor \cdot p \leq pn^2/4$. Der Wert $pn^2/4$ ist jedoch der Erwartungswert der $(n^2/4, p)$ -Binomialverteilung.

An dieser Stelle erscheint es logisch, daß der Erwartungswert $E[X]$ für den maximalen Schnitt ebenfalls höchstens $pn^2/4$ beträgt. Es ist jedoch möglich, daß einige Schnitte unter und einige über ihrem Erwartungswert liegen und damit doch größer als $pn^2/4$ sein können. Da wir beim Problem MAXCUT den größten Schnitt suchen könnte es durchaus sein, daß $E[X]$ etwas größer als $pn^2/4$ ist. Die genaue Abschätzung von $E[X]$ aus den einzelnen Erwartungswerten $E[X_S]$ erweist sich hier als schwierig. Die genaue Abschätzung für $E[X]$ wird aber an dieser Stelle nicht benötigt. Wir werden vielmehr untersuchen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der maximale Schnitt über dem Wert von $pn^2/4$ liegen kann. Konkret werden wir berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß der maximale Schnitt größer als die gefundene Schranke ist. Mit $0 < \varepsilon < 1$ und $\gamma = o(\varepsilon)$ gilt für hinreichend große n ebenfalls $0 < \varepsilon' < 1$. Hierfür wird $\text{Prob}[X \geq (1 + \varepsilon')pn^2/4]$ berechnet. Damit der maximale Schnitt mindestens die Größe $(1 + \varepsilon')pn^2/4$ hat muß es also wenigstens einen Schnitt geben, der diese Grenze überschreitet. Es ist also

$$\text{Prob}\left[X \geq (1 + \varepsilon')\frac{n^2}{4}p\right] = \text{Prob}\left[\bigcup_{S \subseteq V} \left(X_S \geq (1 + \varepsilon')\frac{n^2}{4}p\right)\right].$$

Leider sind die einzelnen Schnitte nicht unabhängig voneinander, da der einmal gezogene zufällige Graph G konstant bleibt - egal welcher Schnitt betrachtet wird. Trotzdem können die Einzelwahrscheinlichkeiten addiert werden, um eine obere Schranke zu erhalten. Es gilt somit:

$$\text{Prob}\left[X \geq (1 + \varepsilon')\frac{n^2}{4}p\right] \leq \sum_{S \subseteq V} \text{Prob}\left[X_S \geq (1 + \varepsilon')\frac{n^2}{4}p\right].$$

An dieser Stelle betrachten wir wieder einen konkreten, durch die Knotenmenge S mit $|S| = s$ generierten Schnitt. Aus der Monotonie der (n, p) -Binomialverteilung $\text{Bin}(k; n, p)$ für wachsendes n und festes k sowie festes p folgt eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $\text{Prob}[X_S \geq (1 + \varepsilon')pn^2/4]$ durch die Verteilung $\text{Bin}((1 + \varepsilon')pn^2/4; n^2/4, p)$. Da diese genau den Erwartungswert $pn^2/4$ hat und $0 < \varepsilon' < 1$ gilt kann diese Wahrscheinlichkeit mittels der Chernoff-Schranken, vergl. z. B. [ASE92] oder [HR90] bzw. Ungleichung

(221), abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
 \text{Prob} \left[X_S \geq (1 + \varepsilon') \frac{n^2}{4} p \right] &= \text{Bin} \left((1 + \varepsilon') \frac{n^2}{4} p; s(n - s), p \right) \\
 &\leq \text{Bin} \left((1 + \varepsilon') \frac{n^2}{4} p; \frac{n^2}{4}, p \right) \\
 &\leq e^{-\frac{\varepsilon'^2}{3} \cdot \frac{n^2}{4} p} \\
 &= e^{-\frac{\varepsilon'^2}{12} n^2 p} .
 \end{aligned}$$

Kommen wir nun zurück zu der Wahrscheinlichkeit, daß der maximale Schnitt größer als $(1 + \varepsilon')pn^2/4$ wird. Für jeden der 2^n möglichen Schnitte können wir nun die gerade berechnete Abschätzung verwenden:

$$\begin{aligned}
 \text{Prob} \left[X \geq (1 + \varepsilon') \frac{n^2}{4} p \right] &\leq \sum_{S \subseteq V} \text{Prob} \left[X_S \geq (1 + \varepsilon') \frac{n^2}{4} p \right] \\
 &\leq 2^n \cdot e^{-\frac{\varepsilon'^2}{12} n^2 p} \\
 &\leq \left(e^{\ln 2} \right)^n \cdot e^{-\frac{\varepsilon'^2}{12} n^2 p} \tag{187} \\
 &\leq \left(e^{\ln 2} \right)^n \cdot e^{-\frac{\varepsilon'^2}{12} n^2 \frac{cn^\delta}{n} \cdot (1+o(1))} \\
 &= e^{n \left(\ln 2 - \frac{c\varepsilon'^2}{12} \cdot n^\delta \cdot (1+o(1)) \right)} .
 \end{aligned}$$

Aus $c > \frac{12 \ln 2}{\varepsilon^2}$ folgt $c > \frac{12 \ln 2}{\varepsilon'^2}$ und aus $\varepsilon^2 = \omega(1/n^\delta)$ folgt $\varepsilon'^2 = \omega(1/n^\delta)$. Für $\delta = 0$ und $c > \frac{12 \ln 2}{\varepsilon^2}$ bzw. für $\delta > 0$ und $\varepsilon^2 = \omega(1/n^\delta)$ ist $\ln 2 - \frac{c\varepsilon'^2}{12} n^\delta (1 + o(1)) < 0$ für hinreichend große n , daraus folgt

$$\text{Prob} \left[X \geq \frac{1}{2} (1 + \varepsilon') p \binom{n}{2} \right] = o(1) . \quad \square$$

7 Effizientes Verifizieren nichterfüllbarer 4-SAT-Formeln

7.1 Einleitung

In diesem Abschnitt betrachten wir zufällige aussagenlogische Formeln $F = (V, C)$ in konjunktiver Normalform (KNF). Eine Formel F besteht aus der Variablenmenge V mit $|V| = n$ sowie der Klauselmengemenge C mit $|C| = |F| = m$. Die Klauseln der Formel sind

konjunktiv miteinander verknüpft. Eine Klausel selbst enthält disjunktiv verknüpfte Literale, also Variablen (positive Literale) bzw. negierte Variablen (negative Literale). Eine Belegung a der Variablen ist eine Abbildung $a: V \rightarrow \{0, 1\}$ (bzw. falsch oder wahr). Im Weiteren sind wir vor allem an k -KNF-Formeln interessiert. Bei diesen Formeln besteht jede Klausel aus genau k Literalen. Mit folgenden Problemen für eine Formel F in k -KNF-Form werden wir uns näher beschäftigen:

SAT / k -SAT: Gibt es eine Belegung der Variablen, so daß die Formel / Formel in k -KNF-Form F erfüllbar (also $F = 1$) wird?

NAESAT / k -NAESAT: Gibt es eine Belegung der Variablen, so daß die Formel / Formel in k -KNF-Form F erfüllbar wird und jede Klausel mindestens ein wahres und ein falsches Literal enthält?

Die Probleme sind für $k \geq 3$ \mathcal{NP} -vollständig, vgl. z. B. [Sch78], [GJ79] oder [Pap94].

Bei den weiteren Betrachtungen soll die Formel F zufällig gebildet werden. Üblicherweise wird eine zufällige Formel so gebildet, daß entweder jede mögliche Kante mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auftritt oder daß die Formel eine bestimmte Anzahl von zufällig gezogenen Klauseln enthalten soll. Das hier verwendete Modell unterscheidet sich etwas von diesen beiden Standardmodellen, ist diesen jedoch sehr ähnlich.

In der Formel werden Klauseln zugelassen, die eine Variable bzw. ein Literal mehrmals enthalten. So ist z. B. die Konstruktion einer Klausel $(l \vee l \vee \bar{l} \vee \bar{l})$ möglich. In einer aussagenlogischen Formel spielt es bei den Erfüllbarkeitsproblemen keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Literale aufgeführt werden. Wir werden jedoch die Reihenfolge der Literale in einer Klausel während der zufälligen Generierung einer Formel beachten. Es wird also zwischen den Klauseln $(x \vee y)$ und $(y \vee x)$ unterschieden. An jeder der k Positionen einer Klausel kann eines der insgesamt $2n$ Literale stehen. Mit diesen Vereinbarungen können nun $(2n)^k$ verschiedene Klauseln gebildet werden. Hieraus gewinnt man den Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{F}_{n,k,p}$ für zufällige k -KNF-Formeln, indem jede Klausel unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit p gezogen wird. Die Anzahl Klauseln $m = m(F)$ einer so erzeugten zufälligen Formel F ist $((2n)^k; p)$ -binomialverteilt.

Für die nachfolgenden Betrachtungen werden wir die Formeln noch weiter einschränken. Wir konzentrieren uns auf 4-KNF-Formeln mit einer Klauselwahrscheinlichkeit $p = c/n^2$.

Dabei sei $c > 0$ eine Konstante. Die erwartete Anzahl an Klauseln beträgt $E[m] = (2n)^4 \cdot c/n^2 = 16cn^2$. Eine solche Formel enthält relativ viele Klauseln. Hier kann leicht, z. B. mittels der Erste-Momente-Methode, gezeigt werden, daß fast alle Formeln aus $\mathcal{F}_{n,4,c/n^2}$ nicht erfüllbar sind (vergl. z. B. [KKKS98]).

Probabilistisch gesehen wissen wir, daß fast jede Formel aus unserem Modell nicht erfüllbar ist. Dies genügt jedoch nicht, um die Unerfüllbarkeit einer konkreten Formel effizient zu beweisen. In den nächsten Abschnitten werden wir den effizienten Diskrepanztest für 3-uniforme gerichtete Hypergraphen mit einem Approximationsalgorithmus für das Problem MAXCUT verbinden, um daraus einen effizienten Algorithmus, d. h. ein deterministisches Polynomialzeitverfahren zu erarbeiten, welches die Unerfüllbarkeit fast aller unerfüllbaren Formeln aus unserem Modell nachweist.

7.2 Klauseltypen

In diesem Abschnitt betrachten wir zufällige Formeln F aus $\mathcal{F}_{n,4,p}$ für das 4-SAT-Problem. Unsere Klauseln sind also geordnet. Eine Klausel tritt mit der Wahrscheinlichkeit p auf. Uns interessieren die Formeln mit einer Klauselwahrscheinlichkeit von $p = cn^\varepsilon/n^{5/2}$. Dabei seien $c > 0$ und $0 < \varepsilon < 5/2$ Konstanten. Wir nutzen die bereits vorgestellten Eigenschaften von zufälligen Hypergraphen, um ein effizientes Verfahren zu entwickeln, womit die Unerfüllbarkeit einer Formel F nachgewiesen werden kann.

Wenn wir in einer 4-KNF-Formel in jeder Klausel ein bestimmtes Literal löschen, so entsteht eine 3-KNF-Formel. Die Klauseln dieser Formel sind ebenfalls geordnet. Diese Formel kann man aber auch als gerichteten 3-uniformen Hypergraphen auffassen. Analog zu unseren bisherigen Begriffen werden wir einen so konstruierten Hypergraphen als Projektionshypergraphen der Formel bezeichnen.

Eine Klausel der Formel kann positive oder negative Literale enthalten. Es macht durchaus Sinn, auch hier zwischen verschiedenen Klauseltypen zu unterscheiden. Die Menge V der Variablen bzw. die Menge der positiven Literale der Formel ist $V = L^+ = \{v_1, \dots, v_n\}$. Die Menge der negativen Literale ist $L^- = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$. Die Menge der Literale L ergibt somit aus $L = L^+ \cup L^-$.

Definition 7.1 (Klauseltyp). *Es seien $A_1, \dots, A_k \subseteq L$ Mengen von Literalen. Eine Klausel $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$ ist vom Typ (A_1, \dots) genau dann, wenn für alle Literale a_i der Klausel $a_i \in A_i$ gilt.*

Die Klauseln vom Typ (L^+, L^+, \dots) bzw. (L^-, L^-, \dots) heißen positive bzw. negative Klauseln.

7.3 Projektionshypergraph einer SAT-Formel

Bei der Untersuchung der Eigenschaften einer k -SAT-Formel werden wir ähnlich wie bei der Hypergraphen verfahren. Eine Klausel einer Formel könnte man sich fast als Kante eines Hypergraphen vorstellen. Um aus einer Formel einen Hypergraphen zu generieren werden wir Literale auf bestimmten Positionen auswählen und daraus eine Kante in einem Hypergraphen erzeugen. In dieser Kante verwenden wir dann jedoch nicht das Literal sondern die entsprechende Variable. Während der Analyse der 4-Formeln werden wir 3-uniforme Hypergraphen benötigen. Diese können erzeugt werden, indem einfach in jeder Klausel das Literal auf einer bestimmten Position gelöscht wird.

Definition 7.2 (Projektionshypergraph einer Formel). *Es sei $F = (V, C)$ eine Formel in k -KNF-Form mit geordneten Klauseln. Ferner sei $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ eine Indexmenge. Es bezeichne weiter c_i das i -te Literal einer Klausel c bzw. e_i den i -ten Knoten einer geordneten Kante eines Hypergraphen. Der gerichtete r -uniforme Hypergraph $H_{i_1, \dots, i_r} = H_{i_1, \dots, i_r}(F) = (V, E)$ heißt Projektionshypergraph bezüglich der Koordinaten i_1, \dots, i_r , wenn*

$$E = \left\{ e = (e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) : \exists c = (c_1 \vee \dots \vee c_k) \in C \text{ mit } e_{i_j} = c_j \text{ oder } e_{i_j} = \bar{c}_j, j = 1, \dots, r \right\}$$

gilt.

Die Projektionshypergraphen werden wir jetzt nicht von der gesamten Formel F bilden sondern uns auf eine Teilformel beschränken. Die weiteren Aussagen folgen daraus, daß wir uns auf die positiven Klauseln bzw. auf die negativen Klauseln beschränken. Analog kann man Klauseln vom Typ (A_1, \dots, A_k) mit $A_1, \dots, A_k \in \{L^+, L^-\}$ betrachten und zu adäquaten Aussagen gelangen. Es seien also

$$F^+ = F^+(F) \quad \text{und} \quad F^- = F^-(F) \tag{188}$$

die Formeln, die nur die positiven Klauseln bzw. nur die negativen Klauseln von F enthalten. Stammt die Formel F aus dem Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{F}_{n,4,p}$, so treten ebenfalls alle möglichen Klauseln der Formeln F^+ und F^- unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit p auf und es ergeben sich analoge Wahrscheinlichkeitsräume. Von diesen Formeln F^+

und F^- bilden wir die Projektionshypergraphen. Zunächst zeigen wir, daß diese Hypergraphen aus dem bisher betrachteten Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{H}_{n,3,p}$ stammen und damit alle dort geltenden Lemmas anwendbar sind. Anschließend zeigen wir, daß die Anzahl der Klauseln in F^+ bzw. in F^- mit der Anzahl an Kanten im Hypergraphen korreliert. Nach dieser Vorbereitung können wir sofort zu dem Satz überleiten, welcher uns eine Grundlage für den effizienten Nachweis der Nichterfüllbarkeit liefert.

Lemma 7.3. *Es seien $c > 0$ und $0 \leq \varepsilon < 2$ Konstanten. Ferner sei F eine 4-KNF-Formel aus $\mathcal{F}_{n,4,p}$ mit $p = cn^\varepsilon/n^3$. Es seien weiter $F^+ = F^+(F)$ und $F^- = F^-(F)$ die Teilformeln von F , welche alle positiven Klauseln bzw. alle negativen Klauseln enthalten. Für alle möglichen Koordinaten $\{i, j, k\} \subseteq \{1, \dots, 4\}$ sind die Projektionshypergraphen $H_{i,j,k}(F^+)$ und $H_{i,j,k}(F^-)$ aus $\mathcal{H}_{n,3,p'}$ mit $p' = cn^\varepsilon/n^2(1 - |o(1)|)$.*

Beweis. Wir betrachten o. B. d. A. $i = 1, j = 2$ und $k = 3$ sowie F^+ . Der Projektionshypergraph bezieht sich auf die ersten drei Koordinaten. Eine Kante dieses Hypergraphen kann nur aus n verschiedenen Klauseln der Formel F^+ erzeugt werden. Diese n Klauseln unterscheiden sich nur in der letzten Koordinate. Sie werden ebenfalls unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p gezogen. Für $0 \leq \varepsilon < 2$ gilt $np = ncn^\varepsilon/n^3 = o(1)$. Die Wahrscheinlichkeit p' für das Auftreten dieser Kante im Hypergraphen berechnet sich damit gemäß der Siebformel (Gleichung 217) aus $p' = np(1 - |o(1)|) = cn^\varepsilon/n^2(1 - |o(1)|)$. Diese Berechnung kann für alle möglichen Kanten des Hypergraphen durchgeführt werden. Keine Klausel aus F^+ kann zwei verschiedene Kanten im Hypergraphen generieren. Damit haben alle Kanten des Hypergraphen die gleiche Wahrscheinlichkeit p' und wurden unabhängig voneinander gezogen. Es stammt somit H aus $\mathcal{H}_{n,3,p'}$. \square

Die Klauselwahrscheinlichkeit in der zufälligen Formel ist klein genug, so daß relativ selten mehrere Klauseln die gleiche Kante im Projektionshypergraphen erzeugen. Die Anzahl der Kanten im Projektionshypergraphen korreliert somit stark mit der Anzahl an Klauseln in einer Teilformeln F^+ bzw. F^- . Dies führt uns zum nächsten Lemma. Hier verwenden wir $|F| = |C|$ für die Anzahl an Klauseln einer Formel $F = (V, C)$ bzw. $|H| = |E|$ für die Anzahl Kanten eines Hypergraphen $H = (V, E)$.

Lemma 7.4. *Es werden wieder die zufälligen Formeln $F, F^+(F), F^-(F)$ sowie deren Projektionen $H_{i,j,k}(F^+)$ und $H_{i,j,k}(F^-)$ mit $1 \leq i < j < k \leq 4$ wie in Lemma 7.3 betrachtet. Es sei ε eine durch $0 < \varepsilon < 2$ beschränkte Konstante. Dann gilt für fast alle F aus $\mathcal{F}_{n,4,p}$ mit $p = cn^\varepsilon/n^3$ sowie für alle möglichen $H = H_{i,j,k}(F^\pm)$:*

1. $||F^\pm| - |F|/16| = o(|F|)$

$$2. |F^\pm| - |H_{i,j,k}| = o(|F^\pm|).$$

Beweis. O.B.d.A. beschränken wir uns im Beweis auf die Teilformeln F^+ und den Projektionshypergraphen $H_{1,2,3}(F^+)$. Der Projektionshypergraphen $H_{1,2,3}(F^+)$ stammt nach 7.3 aus $\mathcal{H}_{n,3,p'}$ mit $p' = cn^\varepsilon/n^2(1 - |o(1)|)$, damit ist die Anzahl der Kanten binomialverteilt. Die erwartete Anzahl an Kanten beträgt hier $cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1))$. Die Chernoff-Schranken zeigen eine starke Konzentration der Anzahl an Kanten um ihren Erwartungswert (vgl. auch den Beweis von Lemma 3.6). Damit gilt mit hoher Wahrscheinlichkeit

$$\left| |H_{1,2,3}(F^+)| - cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1)) \right| = o\left(cn^{1+\varepsilon} \right).$$

Die Anzahl an Klauseln in F^+ sowie in F ist ebenfalls binomialverteilt. Die erwartete Anzahl an Klauseln beträgt hier $E[|F^+|] = cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1))$ bzw. $E[|F|] = 16cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1))$. Die Konzentration um den Erwartungswert kann ebenfalls durch die Chernoff-Schranken gezeigt werden. Wir erhalten also:

$$\left| |F^+| - cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1)) \right| = o\left(cn^{1+\varepsilon} \right)$$

und

$$\left| |F| - 16cn^{1+\varepsilon}(1 + o(1)) \right| = o\left(16cn^{1+\varepsilon} \right).$$

Beachtet man noch, daß der Projektionshypergraph $H_{1,2,3}(F^+)$ maximal so viele Kanten enthalten kann, wie Klauseln in F^+ zu finden sind, so folgt unmittelbar das Lemma. \square

Die Anwendung der Chernoff-Schranken liefert ebenfalls eine exakte Funktion für Konzentration. Im Beweis von Lemma 3.6 war $\delta = 1/\ln^r n$ ausreichend, wobei $r > 0$ eine Konstante ist. Dies kann auch hier angewendet werden und wir erhalten mit hoher Wahrscheinlichkeit:

$$\left| |F| - 16cn^{1+\varepsilon} \right| \leq 16cn^{1+\varepsilon}/\ln^r n, \quad (189)$$

$$\left| |F^\pm| - |F|/16 \right| \leq |F|/(16 \cdot \ln^r n) \text{ und} \quad (190)$$

$$\left| |H_{i,j,k}(F^\pm)| - |F|/16 \right| \leq |F|/(16 \cdot \ln^r n). \quad (191)$$

7.4 Die Paritätseigenschaft

Die Projektionshypergraphen fast aller betrachteten k -KNF-Formeln zeigen eine geringe Diskrepanz. Wenn es eine erfüllende Belegung für eine solche Formel gibt, so können

wir die Menge der Variablen entsprechend der Belegung in zwei disjunkte Teilmengen aufspalten. Als erste Folgerung aus der geringen Diskrepanz wird sich ergeben, daß die Anzahl der mit wahr belegten Variablen etwa so groß ist wie die Anzahl der mit falsch belegten Variablen. Aus der geringen Diskrepanz können aber auch die Anzahl an Klauseln spezieller Typen näher bestimmt werden. Dies wird im folgenden Theorem beschrieben. Dieser Satz entspricht weitestgehend dem Theorem 2 in [GJ02]. Dieses Theorem in [GJ02] kann nur auf Formeln aus $\mathcal{F}_{n,4,p}$ mit $p = cn^\varepsilon/n^{5/2}$ und $0 < \varepsilon < 1/2$ angewandt werden. Unsere Betrachtungen zur Rückführung der geringen Diskrepanz von Hypergraphen auf die geringe Diskrepanz von Multigraphen ermöglicht nun ebenfalls die Betrachtung des interessanten Falles $\varepsilon = 1/2$. Die Untersuchung von Paritätseigenschaften in SAT-Formeln selbst geht beispielsweise auf [Fei02] zurück. Wir definieren zunächst näher, was wir unter der Paritätseigenschaft verstehen:

Definition 7.5 (Paritätseigenschaft). *Es sei $F = (V, C)$ eine 4-KNF-Formel und $a: V \rightarrow \{0, 1\}$ eine Belegung der n Variablen der Formel F mit wahr (1) oder falsch (0). F^+ bzw. F^- bezeichnen wieder die Teilformeln von F , die nur die positiven Klauseln bzw. nur die negativen Klauseln enthalten. Die Menge der mit wahr belegten Variablen sei T_a , die Menge der mit falsch belegten F_a . Es sei $W, X, Y, Z \in \{T_a, F_a\}$. Die Belegung a der Variablen von F hat Parität genau dann, wenn die folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $|T_a| = \frac{n}{2} \cdot (1 + o(1))$ und $|F_a| = \frac{n}{2} \cdot (1 + o(1))$
2. *Es gibt 16 verschiedene Klauseltypen (W, X, Y, Z) . Für die Anzahl der Klauseln eines Typs in F^+ bzw. F^- mit ungerader Anzahl an Variablen aus T_a , beispielsweise (T_a, T_a, F_a, T_a) oder (F_a, T_a, F_a, F_a) , gilt*

$$m_{(W,X,Y,Z)}(F^\pm) = \frac{1}{8} \cdot |F^\pm| \cdot (1 + o(1)) .$$

Für die Typen mit gerader Anzahl an Variablen aus T_a , z. B. (F_a, F_a, F_a, F_a) oder (F_a, T_a, F_a, T_a) , gilt:

$$m_{(W,X,Y,Z)}(F^\pm) = o(|F^\pm|) .$$

Nun können wir das Theorem formulieren:

Theorem 7.6. *Es sei F eine 4-KNF-Formel. F^+ bzw. F^- bezeichnen wieder die Teilformeln von F , die nur die positiven Klauseln bzw. nur die negativen Klauseln enthalten. Ferner gelte für die Anzahl an Klauseln in den Formeln $|F| \geq n$ und $|F^\pm| \sim |F|/16$. Die Anzahl an Kanten in allen Projektionshypergraphen $H_{i,j,k}(F^\pm)$ mit $1 \leq i < j < k \leq 4$*

7 Effizientes Verifizieren nichterfüllbarer 4-SAT-Formeln

betrage ebenfalls $|H_{i,j,k}(F^\pm)| \sim |F^\pm|$. Wenn alle Projektionshypergraphen $H_{i,j,k}(F^\pm)$ geringe Diskrepanz aufweisen, dann zeigt jede erfüllende Belegung a der Variablen von F bezüglich F Parität.

Beweis. Für den Beweis des ersten Teils der Paritätseigenschaft nehmen wir an, daß $|T_a| \neq n/2(1 + o(1))$ gilt und konstruieren hieraus einen Widerspruch. Der zweite Teil wird unmittelbar daraus folgen. Eine der beiden Mengen T_a oder F_a muß hierfür größer als $n/2$ sein. O. B. d. A. sei dies F_a . Die Menge F_a der auf falsch gesetzten Variablen sei so groß, daß eine Konstante $\delta > 0$ existiert, für die $|F_a| \geq (1/2 + \delta)n$ gilt. Für die Anzahl der auf wahr gesetzten Variablen gilt folglich $|T_a| \leq (1/2 - \delta)n$. Der Projektionshypergraph $H_{1,2,3}(F^+)$ zeigt geringe $(1/2 + \delta)$ -Diskrepanz. Damit gibt es in diesem Hypergraphen $(1/2 + \delta)^3 \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1))$ viele Kanten vom Typ (F_a, F_a, F_a) . Damit gibt es aber $(1/2 + \delta)^3 \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1))$ Klauseln vom Typ (F_a, F_a, F_a, V) in F^+ , es gilt

$$m_{(F_a, F_a, F_a, V)}(F^+) = (1/2 + \delta)^3 \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) .$$

Die Belegung a soll die Formel F und somit auch die Teilformel F^+ erfüllen. Damit kann es in F^+ keine Klauseln vom Typ (F_a, F_a, F_a, F_a) geben. Es gilt also

$$m_{(F_a, F_a, F_a, F_a)}(F^+) = 0 .$$

Damit muß

$$m_{(F_a, F_a, F_a, V)}(F^+) = m_{(F_a, F_a, F_a, T_a)}(F^+) .$$

gelten. Hieraus folgt

$$m_{(F_a, F_a, F_a, T_a)} \geq (1/2 + \delta)^2 \cdot (1/2 + \delta) \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) . \quad (192)$$

Betrachten wir dagegen in gleicher Weise die Kanten vom Typ (F_a, F_a, T_a) in $H_{2,3,4}(F^+)$, so erhalten wir, daß es $(1/2 + \delta)^2(1/2 - \delta) \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1))$ viele Klauseln vom Typ (V, F_a, F_a, T_a) in F^+ gibt:

$$m_{(V, F_a, F_a, T_a)} = (1/2 + \delta)^2 \cdot (1/2 - \delta) \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) .$$

Die Klauseln dieses Typs können in die beiden Typen (F_a, F_a, F_a, T_a) und (T_a, F_a, F_a, T_a) aufgespaltet werden:

$$m_{(V, F_a, F_a, T_a)} = m_{(T_a, F_a, F_a, T_a)} + m_{(F_a, F_a, F_a, T_a)} .$$

7 Effizientes Verifizieren nichterfüllbarer 4-SAT-Formeln

Damit gilt aber

$$m_{(F_a, F_a, F_a, T_a)} \leq (1/2 + \delta)^2 \cdot (1/2 - \delta) \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) . \quad (193)$$

Die beiden Ungleichungen 192 und 193 stellen für $\delta > 0$, $\delta \neq o(1)$ und $|F^+| \geq n/16(1 + o(1))$ einen Widerspruch dar. Für $|F^+| = o(1)$ erhält man keinen Widerspruch, es müssen also hinreichend viele positive Klauseln in F vorhanden sein. Die gleichen Folgerungen kann man nun analog für $|F_a| \leq (1/2 - \delta)n$ wiederholen. Hierbei wird $|T_a| \geq (1/2 + \delta)n$ sowie F^- für die Erzeugung des Widerspruchs betrachtet. Damit gilt also $|T_a| = \frac{n}{2} \cdot (1 + o(1))$ und $|F_a| = \frac{n}{2} \cdot (1 + o(1))$.

Wir betrachten nun nocheinmal die positiven Klauseln F^+ . Kommen wir zurück zu den Ungleichungen 192 und 193. Diese sind natürlich für $\delta = 0$ bzw. $\delta = o(1)$ gültig. Adäquate Ungleichungen können wir ebenfalls für alle Typen mit genau einer Menge T_a aufstellen. Mit $|T_a| \sim n/2$ und $|F_a| \sim n/2$ ergibt sich aus diesen Ungleichungen, daß die Anzahl Klauseln eines solchen Typs $|F^+|/8 \cdot (1 + o(1))$ beträgt:

$$\begin{aligned} m_{(T_a, F_a, F_a, F_a)} &= \frac{1}{8} \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) & m_{(F_a, F_a, T_a, F_a)} &= \frac{1}{8} \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) \\ m_{(F_a, T_a, F_a, F_a)} &= \frac{1}{8} \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) & m_{(F_a, F_a, F_a, T_a)} &= \frac{1}{8} \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned}$$

Bei der Betrachtung von $H_{2,3,4}$ wurde gezeigt, daß es $m(F^+)/8(1 + o(1))$ viele Klauseln vom Typ (V, F_a, F_a, T_a) gibt. Da es aber bereits $|F^+|/8(1 + o(1))$ viele Klauseln vom Typ (F_a, F_a, F_a, T_a) gibt, kann die Anzahl der Klauseln vom Typ (T_a, F_a, F_a, T_a) nur noch $o(|F^+|)$ betragen. Auch diese Schlußfolgerung kann für alle Varianten mit genau zwei T_a im Typ wiederholt werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} m_{(T_a, T_a, F_a, F_a)} &= o(|F^+|) & m_{(F_a, T_a, T_a, F_a)} &= o(|F^+|) \\ m_{(T_a, F_a, T_a, F_a)} &= o(|F^+|) & m_{(F_a, T_a, F_a, T_a)} &= o(|F^+|) \\ m_{(T_a, F_a, F_a, T_a)} &= o(|F^+|) & m_{(F_a, F_a, T_a, T_a)} &= o(|F^+|) . \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Kanten vom Typ (T_a, T_a, F_a) in $H_{1,2,3}(F^+)$. Hieraus folgern wir, daß es $|F^+|/8(1 + o(1))$ viele Klauseln vom Typ (T_a, T_a, F_a, V) geben muß. Wir wissen bereits, daß die Anzahl an Klauseln vom Typ (T_a, T_a, F_a, F_a) asymptotisch klein und damit vernachlässigbar ist. Es gibt somit $|F^+|/8(1 + o(1))$ Klauseln vom Typ (T_a, T_a, F_a, T_a) . Dies kann analog für die anderen Klauseltypen mit drei T_a und einmal F_a wiederholt

7 Effizientes Verifizieren nichterfüllbarer 4-SAT-Formeln

werden:

$$\begin{aligned} m_{(F_a, T_a, T_a, T_a)} &= \frac{1}{8} \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) & m_{(T_a, T_a, F_a, T_a)} &= \frac{1}{8} \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) \\ m_{(T_a, F_a, T_a, T_a)} &= \frac{1}{8} \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) & m_{(T_a, T_a, T_a, F_a)} &= \frac{1}{8} \cdot |F^+| \cdot (1 + o(1)) . \end{aligned}$$

Addieren wir die Zahlen aller bisher gefundenen Kantentypen, so sehen wir, daß bis auf eine vernachlässigbare Anzahl von $o(|F^+|)$ keine Kanten mehr für den Typ (T_a, T_a, T_a, T_a) übrig bleiben. Wir erhalten:

$$m_{(F_a, F_a, F_a, F_a)} = o(|F^+|) .$$

Eine analoge Betrachtung kann ebenfalls für die Klauseltypen von F^- durchgeführt werden. □

Neben den Teilformeln F^+ und F^- von F können entsprechend 14 weitere Teilformeln an Hand der Klauseltypen generiert werden. Für diese Teilformeln kann das Theorem entsprechend geändert werden. Es ergibt sich immer in fast allen solchen Formeln F , daß in fast allen Klauseln eine ungerade Anzahl an Literalen auf wahr gesetzt ist, wenn die entsprechenden Projektionshypergraphen geringe Diskrepanz aufweisen.

Das eben bewiesene Theorem ebnet den Weg zum effizienten Nachweis der Unerfüllbarkeit einer Formel. Es steht ein Test zur Verfügung, der effizient die geringe Diskrepanz eines Hypergraphen nachweisen kann. Ist dieser Test für alle Projektionshypergraphen der Teilformeln F^+ und F^- erfolgreich, so haben wir damit alle Belegungen, die keine Parität zeigen, als erfüllende Belegungen ausgeschlossen. Um die Unerfüllbarkeit einer Formel endgültig zu zeigen müssen ebenfalls alle Belegungen, die die Paritätseigenschaft zeigen, als erfüllende Belegungen ausgeschlossen werden. Hierfür werden wir genaue Abschätzungen der Anzahl Klauseln der einzelnen Typen benötigen, so daß nun die Analyse der im Theorem vorkommenden $o(1)$ -Termen folgt.

Die Projektionshypergraphen $H_{i,j,k}(F^\pm)$ zeigen geringe Diskrepanz. Es sei $g_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 < g_1(n) < 1$ und $g_1(n) = o(1)$ die Funktion, die diese geringe Diskrepanz beschreibt. Der Unterschied zwischen der tatsächlich vorhandenen Anzahl an Kanten und der erwarteten Anzahl Kanten eines bestimmten Typs (der Definition) ist somit nicht größer als $g_1(n) \cdot |H_{i,j,k}(F^\pm)|$. O. B. d. A. sei $|F^-| \leq |F^+|$, anderenfalls kann in den folgenden Schritten $|F^+|$ und $|F^-|$ vertauscht werden. Damit folgt zunächst $|H_{i,j,k}(F^\pm)| \leq |F^+|$ für alle Projektionshypergraphen $H_{i,j,k}(F^\pm)$. Es sei nun $g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 < g_2(n) <$

7 Effizientes Verifizieren nichterfüllbarer 4-SAT-Formeln

1 und $g_2(n) = o(1)$ die Funktion, die $|F^+| \sim |F^-|$ und $|F^+| \sim |H_{i,j,k}(F^\pm)|$ beschreibt. Es gilt also

$$(1 - g_2(n)) \cdot |F^+| \leq |F^-|, |H_{i,j,k}(F^\pm)| \leq |F^+| .$$

Entsprechend des Beweises setzen wir nun $|F_a| = (1/2 + \delta)n$ mit $0 \leq \delta \leq 1/2$. Unser Ziel ist es nun, eine sinnvolle obere Schranke für δ aus $g_1 = g_1(n)$ und $g_2 = g_2(n)$ zu berechnen. Dazu werden wir die Teilformel F^+ und deren Projektionshypergraphen verwenden. Für den Fall $|F_a| = (1/2 - \delta)n$ ergibt sich die gleiche Abschätzung aus der Betrachtung von $|F^-|$.

Die Formel F^+ soll für die Belegung a erfüllbar sein. Damit gibt es hier keine Klauseln vom Typ (F_a, F_a, F_a, F_a) . Damit liefert die Betrachtung der Kanten vom Typ (F_a, F_a, F_a) im Projektionshypergraphen $M_{1,2,3} = M_{1,2,3}(F^+) = (V, E_{1,2,3})$ eine untere Schranke für die Anzahl an Klauseln vom Typ (F_a, F_a, F_a, T_a) in (F^+) :

$$\begin{aligned} & \left((1/2 + \delta)^3 - g_1 \right) \cdot |E_{1,2,3}| \leq m_{F_a, F_a, F_a}(M_{1,2,3}) \\ \Rightarrow & \left((1/2 + \delta)^3 - g_1 \right) \cdot (1 - g_2) \cdot |F^+| \leq m_{F_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) . \end{aligned} \quad (194)$$

Nun betrachten wir wieder die Kanten vom Typ (F_a, F_a, T_a) im Projektionshypergraphen $M_{2,3,4} = M_{2,3,4}(F^+) = (V, E_{2,3,4})$:

$$\begin{aligned} & m_{F_a, F_a, T_a}(M_{2,3,4}) \leq \left((1/2 + \delta)^2 \cdot (1/2 - \delta) + g_1 \right) \cdot |E_{2,3,4}| \\ \Rightarrow & m_{V, F_a, F_a, T_a}(F^+) \leq \left((1/2 + \delta)^2 \cdot (1/2 - \delta) + g_1 \right) \cdot |F^+| \end{aligned} \quad (195)$$

$$\Rightarrow m_{F_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) \leq \left((1/2 + \delta)^2 \cdot (1/2 - \delta) + g_1 \right) \cdot |F^+| . \quad (196)$$

Es gilt $\delta \leq 1/2$. Aus den beiden Ungleichungen 194 und 196 folgern wir:

$$\begin{aligned} & \left((1/2 + \delta)^3 - g_1 \right) \cdot (1 - g_2) \leq (1/2 + \delta)^2 \cdot (1/2 - \delta) + g_1 \\ & (1/2 + \delta)^3 - g_2 \cdot (1/2 + \delta)^3 - g_1 + g_1 g_2 \leq (1/2 + \delta)^2 \cdot (1/2 - \delta) + g_1 . \end{aligned}$$

Mit $1/8 \leq (1/2 + \delta)^3 \leq 1$ und $g_1 g_2 > 0$ folgt hieraus:

$$(1/2 + \delta)^2 \cdot (1/2 + \delta - 1/2 + \delta) \leq 2g_1 + g_2 .$$

Es ist $1/4 \leq (1/2 + \delta)^2$. Dies führt zu:

$$\delta \leq 4g_1 + 2g_2 . \quad (197)$$

7 Effizientes Verifizieren nichterfüllbarer 4-SAT-Formeln

Mit $\delta \geq 0$ erhalten wir als untere Schranke für die Klauseln vom Typ (F_a, F_a, F_a, T_a) (vgl. Gleichung 194):

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - g_1\right) \cdot (1 - g_2) \cdot |F^+| &\leq m_{F_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) \\ (1/8 - g_2/8 - g_1 + g_1 g_2) \cdot |F^+| &\leq m_{F_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) \\ (1/8 - g_2/8 - g_1) \cdot |F^+| &\leq m_{F_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) . \end{aligned} \quad (198)$$

Dasselbe Ergebnis erhalten wir für alle anderen Klauseltypen, die genau ein positives und drei negative Literale enthalten.

Es gilt $m_{V, F_a, F_a, T_a}(F^+) = m_{F_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) + m_{T_a, F_a, F_a, T_a}(F^+)$. Aus den Ungleichungen 195, 198, 197 sowie $\delta \geq 0$ folgt nun eine untere Schranke für die Anzahl der Klauseln vom Typ (T_a, F_a, F_a, T_a) in F^+ :

$$\begin{aligned} m_{T_a, F_a, F_a, T_a} &= m_{V, F_a, F_a, T_a} - m_{F_a, F_a, F_a, T_a} \\ &\leq \left(\left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + g_1\right) \cdot |F^+| - (1/8 - g_1 - g_2/8) \cdot |F^+| \\ &= \left(\frac{1}{8} + \delta/2 + \delta^2/2 + g_1 - 1/8 + g_1 + g_2/8\right) \cdot |F^+| . \end{aligned}$$

Aus $\delta \leq 1/2$ folgt $\delta^2 < \delta$ bzw. $\delta/2 + \delta^2/2 \leq \delta$. Dies führt zu:

$$m_{T_a, F_a, F_a, T_a} \leq (6g_1 + 17g_2/8) \cdot |F^+| . \quad (199)$$

Dasselbe Ergebnis erhält man für alle anderen Klauseltypen in F^+ , die genau zwei positive und zwei negative Literale enthalten.

Betrachtet man die Konstruktion des Projektionshypergraphen $M_{1,3,4} = M_{1,3,4}(F^+)$, so kann sofort $m_{T_a, V, F_a, T_a}(F^+) \geq m_{T_a, F_a, T_a}(M_{1,3,4})$ gefolgert werden. Es gilt ebenfalls $m_{T_a, V, F_a, T_a} = m_{T_a, F_a, F_a, T_a} + m_{T_a, T_a, F_a, T_a}$. Aus der geringen Diskrepanz von $M_{1,3,4}$ sowie der Ungleichung 199 folgt eine untere Schranke für die Anzahl an Klauseln vom Typ (T_a, T_a, F_a, T_a) in F^+ :

$$\begin{aligned} m_{T_a, T_a, F_a, T_a}(F^+) &= m_{T_a, V, F_a, T_a}(F^+) - m_{T_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) \\ &\geq m_{T_a, F_a, T_a}(M_{1,3,4}) - m_{T_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) \\ &\geq \left(\left(\frac{1}{2} - \delta\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \delta\right) - g_1\right) \cdot m(M_{1,3,4}) - m_{T_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) \\ &\geq \left(\frac{1}{8} - \delta/2 + \delta^2/2 - g_1\right) \cdot m(M_{1,3,4}) - m_{T_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) \end{aligned}$$

7 Effizientes Verifizieren nichterfüllbarer 4-SAT-Formeln

$$\begin{aligned}
&\geq (1/8 - \delta/2 - g_1) \cdot (1 - g_2) \cdot |F^+| - (6g_1 + 17g_2/8) \cdot |F^+| \\
&= (1/8 - \delta/2 - g_1 - g_2/8 + \delta g_2/2 + g_1 g_2 - 6g_1 - 17g_2/8) \cdot |F^+| \\
&\geq (1/8 - \delta/2 - 7g_1 - 9g_2/4) \cdot |F^+| \\
&\geq (1/8 - 9g_1 - 13g_2/4) \cdot |F^+|. \tag{200}
\end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man ebenfalls für alle weiteren Klauseltypen in F^+ , die ein negatives und drei positive Literale enthalten.

Die untere Schranke in der Ungleichung 200 für Klauseltypen mit drei positiven Literalen ist etwas kleiner als die untere Schranke in der Ungleichung 198 für Klauseltypen mit einem positiven Literal. Im Fall $|F_a| = (1/2 - \delta)n$ würde sich die Analyse entsprechend umkehren, so daß aber trotzdem in beiden Fällen

$$m_{F_a, F_a, F_a, T_a}(F^+) \geq (1/8 - 9g_1 - 13g_2/4) \cdot |F^+| \tag{201}$$

gilt.

Nun können wir den Algorithmus 7.7 *Test_Parität_4-SAT* formulieren, der eine Formel F testet, ob nur Belegungen mit der Paritätseigenschaft diese Formel erfüllen können und somit die Formel für alle anderen Belegungen nicht erfüllbar ist.

Lemma 7.8. *Es sei $F = (V, C)$ eine 4-SAT-Formel. Es seien weiter $g_1, g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ in polynomieller Zeit berechenbare Funktionen mit $0 < g_1(n) \ll g_2(n) < 1$, $g_1(n) = o(g_2(n))$ und $g_2(n) = o(1)$. Für die Anwendung des Algorithmus 7.7 *Test_Parität_4-SAT* auf die Formel F mit g_1, g_2 und einer Konstanten $k > 1$ gilt:*

1. *Der Algorithmus hat polynomielle Laufzeit*
2. *Wenn der Algorithmus TRUE ausgibt, dann erfüllen alle Belegungen a von F , die keine Parität bezüglich F zeigen, nicht die Formel. Jede Teilformel F^+ und jede Teilformel F^- enthält bezüglich jeder erfüllenden Belegung a von F maximal g_4 viele Klauseln, die eine gerade Anzahl Literalen, die auf wahr (1) gesetzt sind.*
3. *Wenn die Teilformeln F^+ und F^- mindestens n Klauseln enthalten, alle Projektionshypergraphen $H_{i,j,k}F^\pm$ hinreichend groß sind und geringe Diskrepanz aufweisen und wenn diese geringen Diskrepanzen bezüglich einer Funktion $g(n)$ durch den Algorithmus 5.18 *Geringe_Diskrepanz_H* unter Verwendung von g_1, g_2 und k verifiziert werden, dann gibt der Algorithmus TRUE zurück.*

Algorithmus 7.7 (Test_Parität_4-SAT($F, g_1(), g_2(), k$)).

Eingabe: · $F = (V, C)$ - 4-SAT-Formel mit geordneten Klauseln
 und $|V| = n$
 · $g_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g_1(n) = o(g_2(n)), 0 < g_1(n) \ll g_2(n)$
 · $g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g_2(n) = o(1), 0 < g_2(n) < 1$
 · $k \in \mathbb{N}$

Ausgabe: TRUE, g_4 / FAIL

1. Berechnung von $F^+(F) = (V, C^+)$
 // (F^+ enthält nur die positiven Klauseln aus F)
2. Berechnung von $F^-(F) = (V, C^-)$
 // (F^- enthält nur die negativen Klauseln aus F)
3. $g_3 := 0$
4. IF $|F| < n$ OR $||F^+| - |F|| > g_1(n) \cdot |F|$ OR $||F^+| - |F|| > g_1(n) \cdot |F|$
 THEN RETURN FAIL
5. FOR EACH $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}, i < j < k$ DO {
6. Berechnung des Projektionshypergraphen $H_{i,j,k}(F^+)$
 // entsprechend Definition 7.2
7. IF NOT Geringe_Diskrepanz_H($H_{i,j,k}(F^+)$), $g_1(), g_2(), k$
 // Algorithmus 5.18, berechnet g
 OR $||F^+| - |H_{i,j,k}(F^+)|| \leq g_1(n) \cdot |F^+|$
8. THEN RETURN FAIL
9. $g_3 := \max\{g_3, g\}$
10. Berechnung des Projektionshypergraphen $H_{i,j,k}(F^-)$
 // entsprechend Definition 7.2
11. IF NOT Geringe_Diskrepanz_H($H_{i,j,k}(F^-)$), $g_1(), g_2(), k$
 // Algorithmus 5.18, berechnet g
 OR $||F^-| - |H_{i,j,k}(F^-)|| \leq g_1(n) \cdot |F^-|$
12. THEN RETURN FAIL
13. $g_3 := \max\{g_3, g\}$
14. RETURN TRUE, $g_4 = (72 \cdot g_3 + 26 \cdot g_1) \cdot |F^+|$

Beweis. Wir zeigen nacheinander die drei Aussagen des Lemmas:

1. Die Formel F kann offensichtlich in Linearzeit durchmustert werden. Hierbei können

die positiven und die negativen Klauseln herausgesucht werden. Gleichzeitig können ebenfalls die acht Projektionshypergraphen $H_{i,j,k}(F^\pm)$ gebildet werden. Die im Algorithmus verwendeten elementaren Rechenoperationen und die Vergleiche benötigen nur konstanten Aufwand. Die polynomielle Laufzeit des Algorithmus folgt nun aus der polynomiellen Laufzeit des Algorithmus 5.18 *Geringe_Diskrepanz_H*, welche in Lemma 5.19 nachgewiesen wurde. Der Algorithmus 5.18 *Geringe_Diskrepanz_H* selbst wird maximal acht mal in der Schleife aufgerufen.

2. Wenn der Algorithmus TRUE zurück gibt, dann folgt dieser Teil des Lemmas aus dem Theorem 7.6. Die Ermittlung einer Funktion zur Beschreibung der geringen Diskrepanz eines Projektionshypergraphen hing ebenfalls von der Konzentrierung des Grades dies Hypergraphen ab. Im Algorithmus wird nun der größte Wert g ermittelt, so daß alle Projektionshypergraphen bezüglich g geringe Diskrepanz zeigen. Die Abschätzung der Klauselzahlen folgt unmittelbar aus den Ungleichungen 200 und 201.
3. Wenn der Algorithmus 5.18 *Geringe_Diskrepanz_H* die geringe Diskrepanz aller Projektionshypergraphen zeigt und die Teilformeln sowie die Projektionshypergraphen hinreichend groß sind, dann schlägt kein Test im Algorithmus fehl – es wird TRUE ausgegeben.

□

Wir sind vor allem an der Untersuchung von zufälligen 4-SAT-Formeln mit geordneten Klauseln und der Klauselwahrscheinlichkeit $p \sim c/n^2$ interessiert. Aus Lemma 7.4 folgt für diese Formeln mit hoher Wahrscheinlichkeit $|F^+| \sim |F^-|$. Diese Teilformeln umfassen nach diesem Lemma fast sicher $\Omega(n^2)$ viele Klauseln. Alle Projektionshypergraphen von F^+ und F^- sind nach Lemma 7.3 zufällige Hypergraphen mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p' \sim c/n$. Nach Lemma 3.6 haben diese Projektionshypergraphen fast sicher geringe Diskrepanz und nach Lemma 7.4 umfassen sie $|F^+| \cdot (1 + o(1))$ viele Kanten. Es sei $r \geq 1$ eine Konstante. Aus Korollar 5.20 wissen wir, daß unter Verwendung von $g_1(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^{2r}$, $g_2(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^r$ und $k = 6$ der Algorithmus 5.18 *Geringe_Diskrepanz_H* für fast alle diese Hypergraphen die geringe Diskrepanz zertifiziert. Fassen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir

Korollar 7.9. *Der Algorithmus 7.7 Test_Parität_4-SAT zertifiziert effizient für fast alle zufälligen 4-SAT-Formeln mit geordneten Klauseln und einer Klauselwahrscheinlichkeit $p \sim c/n^2$, daß jede Belegung a der Variablen von F , die bezüglich F keine Parität*

aufweist, die Formel F nicht erfüllt. Im Algorithmus 7.7 Test_Parität_4-SAT ist hierzu $g_1(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^{2r}$, $g_2(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^r$ und $k = 6$ mit $r \in \mathbb{N}$ sowie $r \geq 1$ zu verwenden.

7.5 Produktgraph einer SAT-Formel

Nun bilden wir einen neuen Graphen – den Produktgraphen – aus einer Formel F , indem wir einfach alle positiven Klauseln quasi in der Mitte in zwei Knotenpaare aufspalten und diese durch eine Kante verbinden:

Definition 7.10 (Produktgraph einer 4-KNF-Formel). *Es sei $F = (V, C)$ eine 4-KNF-Formel mit geordneten Kanten sowie $F^+ = F^+(F) = (V, C^+)$ die Teilformel, welche nur die positiven Klauseln enthält. Der Graph $P = P(F^+) = (V \times V, E)$ heißt Produktgraph der Formel F^+ , wenn für seine Kantenmenge*

$$E = \{(w, x), (y, z)\} : (w, x, y, z) \in C^+\}$$

gilt.

Im Produktgraphen werden als Knoten wieder die geordneten Knotenpaare verwendet. Wir haben damit insgesamt $N = n^2$ Knoten im Produktgraphen. Es können genau zwei verschiedene Klauseln – (w, x, y, z) oder (y, z, w, x) – die Kanten $((w, x), (y, z))$ des Produktgraphen bilden. Es sei nun p' die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer solchen Kante im Produktgraphen. Unser Produktgraph enthält gemäß der Definition keine Schlingen. Damit kann der Fall $(a, b) = (c, d)$ nicht auftreten und es gibt folglich immer genau zwei Klauseln, die eine Kante des Produktgraphen generieren können. Die Klauseln der Formel wurden unabhängig voneinander gezogen. Damit berechnet sich die Kantenwahrscheinlichkeit p' nach (214) aus:

$$p' = 2p - p^2 = 2p(1 - p/2) = 2p(1 + o(1)) . \quad (202)$$

Eine Klausel kann nur eine Kante im Produktgraphen generieren. Alle Klauseln werden unabhängig voneinander gezogen. Damit sind aber auch die Kanten im Produktgraphen voneinander unabhängig und treten alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf. Damit ist der Produktgraph P ein Graph aus $\mathcal{G}_{N=n^2, p'=2p(1+o(1))}$ und es kann das Lemma 6.1 angewandt werden.

7.6 Ein effizienter Algorithmus zum Nachweis der Unerfüllbarkeit

Wir haben bereits einen Test, der effizient alle Belegungen a einer Formel F als erfüllende Belegungen ausschließen kann, wenn diese bezüglich F keine Parität zeigen. Nun nehmen wir an, daß es erfüllende Belegung a der Variablen von F gibt und daß a bezüglich F Parität aufweist. Nun untersuchen wir hierfür den Produktgraphen von F^+ . Es seien wieder T_a bzw. F_a die Mengen der mit wahr (1) bzw. falsch (0) belegten Variablen.

Auf Grund der Parität wissen wir, daß fast alle Klauseln in F^+ eine ungerade Anzahl an Variablen enthalten, die auf wahr gesetzt sind. Es liegen also in F^+ fast ausschließlich die Klauseltypen (T_a, F_a, F_a, F_a) , (F_a, T_a, F_a, F_a) , (F_a, F_a, T_a, F_a) , (F_a, F_a, T_a, F_a) , (T_a, T_a, T_a, F_a) , (T_a, T_a, F_a, T_a) , (T_a, F_a, T_a, F_a) und (F_a, T_a, T_a, T_a) vor. Nun betrachten wir die Kanten im Produktgraphen, die durch diese Klauseln gebildet werden. Es sind ausschließlich Kanten der Form $((T_a \times T_a) \cup (F_a \times F_a)) - ((F_a \times T_a) \cup (T_a \times F_a))$. Die Endpunkte dieser Kanten bilden aber die Partition $V \times V = ((T_a \times T_a) \cup (F_a \times F_a)) \cup ((F_a \times T_a) \cup (T_a \times F_a))$ der Produktgraphknoten. Die eben betrachteten Klauseln umfassen fast alle Klauseln aus F^+ . Wenn wir voraussetzen, daß sich die Anzahl an Kanten im Produktgraphen kaum von der Anzahl an Klauseln in F^+ unterscheidet, also fast jede Klausel in F^+ genau eine Produktgraphkante generiert, dann muß ein Schnitt vorliegen, der fast alle Kanten enthält. Daraus folgt aber sofort, daß der maximale Schnitt (vgl. Abschnitt 10.10) im Produktgraphen $|F^+| \cdot (1 - |o(1)|)$ viele Kanten umfaßt.

Wenn jedoch der Produktgraph keinen solchen Schnitt enthält, dann gibt es auch keine Belegung a von F mit Parität. Die betrachtete Formel ist nicht erfüllbar. Somit haben wir das folgende Theorem bewiesen:

Theorem 7.11. *Es sei F eine 4-SAT-Formel mit $|F^+| \neq o(n)$, zu der keine erfüllende Belegung a der Variablen existiert, die keine Parität zeigt. Es sei weiter $P = P(F^+) = (V \times V, E)$ der Produktgraph von F^+ . Wenn $|E| \sim |F^+|$ gilt und der maximale Schnitt von P weniger als $(1 - |o(1)|) \cdot |E|$ Kanten umfaßt, dann ist F nicht erfüllbar.*

Um dieses Theorem zur Entwicklung eines effizienten Tests auf Unerfüllbarkeit nutzen zu können muß in polynomieller Zeit der maximale Schnitt hinreichend genau abgeschätzt werden. Der Algorithmus in [GW95] (vgl. auch Lemma 10.11) liefert einen Schnitt, der mindestens das 0,87856-fache des maximalen Schnitts beträgt. Der Produktgraph P hat nach (202) eine Kantenwahrscheinlichkeit $p' \sim C/N$ mit $C = 2c$ und $N = n^2$. Es sei $0 < \varepsilon < 1$ eine Konstante. Aus Lemma 6.1 wissen wir, daß für $C > 12 \ln 2 / \varepsilon^2$ der Produktgraph P mit hoher Wahrscheinlichkeit einen maximalen Schnitt hat, der nicht

7 Effizientes Verifizieren nichterfüllbarer 4-SAT-Formeln

größer als $1/2(1 + \varepsilon) \cdot |E|$ ist. Aus dem Lemma 10.11 folgt nun sofort

Lemma 7.12. *Es seien ε und c Konstanten mit $0 < \varepsilon < 1$ und $2c > 12 \ln 2/\varepsilon^2$ Konstanten. Die Maxcut-Approximation nach Goemans und Williamson [GW95] zertifiziert effizient für fast alle $F \in \mathcal{F}_{n,4,p}$ mit $p = c/n^2$, daß der Produktgraph $P(F) = (V^2, E)$ keinen Schnitt hat, der mehr als*

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon) \cdot |E|/0,87856$$

viele Kanten enthält.

Wählen wir ε so, daß

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon)/0,87856 < 1$$

gilt, dann gilt für hinreichend große n immer

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + \varepsilon) \cdot |E|/0,87856 < |E| \cdot (1 - |o(1)|) .$$

Damit kann im Produktgraphen P effizient ein maximaler Schnitt ausgeschlossen werden, der fast alle Kanten enthält. Aus den Bedingungen $0 < \varepsilon < 1/2$ und $1/2(1+\varepsilon)/0,87856 < 1$ folgern wir zuerst $0 < \varepsilon < 2 \cdot 0,87856 - 1 = 0,75712$. Aus $C > 12 \ln 2/\varepsilon^2$ erhält man nun $C > 14,51$. Aus $C = 2c$ ergibt sich

$$c > 7,26 .$$

Mit diesen Überlegungen können wir den Algorithmus 7.13 *Nichterfüllbar-4-SAT* formulieren, der die Nichterfüllbarkeit einer 4-SAT-Formel zeigen kann.

Lemma 7.14. *Es seien $F = (V, C)$ eine 4-SAT-Formel mit geordneten Klauseln, $k > 1$ eine Konstante sowie $g_1, g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ in polynomieller Zeit berechenbare Funktionen mit $0 < g_1(n) \ll g_2(n) < 1$, $g_1 = o(g_2(n))$ und $g_2(n) = o(1)$. Auf F wird der Algorithmus 7.13 *Nichterfüllbar-4-SAT* ausgeführt. Dann gilt:*

1. *Der Algorithmus hat polynomielle Laufzeit.*
2. *Wenn der Algorithmus „unerfüllbar“ ausgibt, dann ist die Formel nicht erfüllbar.*

Beweis. Aus den Lemmata 7.8 und 10.11 folgt sofort die polynomielle Laufzeit der im Algorithmus verwendeten Funktionen. Im Beweis zum Lemma 7.8 wurde bereits erläutert, daß die Teilformel F^+ in polynomieller Zeit generierbar ist. Hieraus kann ebenfalls in

Algorithmus 7.13 (Nichterfüllbar_4-SAT($F, g_1(), g_2(), k$)).

Eingabe: · $F = (V, C)$ - 4-SAT-Formel mit geordneten Klauseln
 und $|V| = n$
 · $g_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g_1(n) = o(g_2(n)), 0 < g_1(n) \ll g_2(n)$
 · $g_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ // $g_2(n) = o(1), 0 < g_2(n) < 1$
 · $k \in \mathbb{N}$

Ausgabe: F ist nicht erfüllbar / FAIL

1. IF NOT Test_Parität_4-SAT($F, g_1(), g_2(), k$) THEN RETURN FAIL
 // Algorithmus 7.7, Berechnung von g_4
2. Berechnung von $F^+(F) = (V, C^+)$ entsprechend Gleichung 188
 // (F^+ enthält nur die positivem Klauseln aus F)
3. Berechnung des Produktgraphen $P(F^+) = (V \times V, E)$
 // entsprechend Definition 7.10
4. MAXCUT := Approximation des maximalen Schnitts von G /0.87856
 // nach [GW95] mit einer Güte > 0.87856
5. IF $|E| - \text{MAXCUT} > g_4$
6. THEN RETURN F ist unerfüllbar
7. ELSE RETURN FAIL

polynomieller Zeit der Produktgraph $P(F^+)$ erzeugt werden. Es werden einfach die Klauseln in F^+ durchmustert und die entsprechenden Kanten im Produktgraphen generiert.

Der Algorithmus 7.7 *Test_Parität_4-SAT* gibt den Wert g_4 zurück. Falls eine erfüllende Belegung a der Variablen existiert, so gibt es nach Lemma 7.8 maximal g_4 viele Klauseln in F^+ , die eine gerade Anzahl an Variablen enthalten, die auf wahr gesetzt sind. Damit muß aber der maximale Schnitt im Produktgraphen mehr als $|E| - g_4$ viele Kanten enthalten (vgl. Theorem 7.11 und dessen Beweis). Wenn dies nicht der Fall ist, muß F unerfüllbar sein. Dies wird vom Algorithmus in der Zeile 5 getestet und entsprechend ausgewertet. Der maximale Schnitt selbst wird nicht berechnet. Es genügt die in Zeile 4 verwendete Approximation. \square

Aus dem Korollar 7.9 wissen wir, daß wir für fast alle zufälligen 4-SAT-Formeln mit

einer Kantenwahrscheinlichkeit $p = c/n^2$ effizient alle Belegungen a , die keine Parität bezüglich F zeigen, als erfüllende Belegungen ausschließen können. Der Produktgraph $P(F^+)$ ist ein zufälliger Graph. Die Kanten werden hier unabhängig voneinander gezogen. Die Kantenwahrscheinlichkeit (siehe Gleichung 202) ist ausreichend, so daß aus den Lemmata 6.1 und 10.11 folgt, daß für $c > 7,26$ und $\varepsilon > 0$ eine Konstante $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ existiert, so daß die Abschätzung des maximalen Schnitts im Produktgraphen $P(F^+)$ unter Verwendung des Algorithmus nach Goemans und Williamson [GW95] eine Größe von höchstens $(1 - \varepsilon') \cdot |E|$ liefert. Dies genügt für den Nachweis der Unerfüllbarkeit.

An Stelle der 4-SAT-Erfüllbarkeit kann man für die gleiche Eingabe F die 4-NAESAT-Erfüllbarkeit untersuchen. Eine Formel ist hier erfüllt, wenn jede Klausel wahr ist und jede Klausel ein wahres und ein falsches Literal enthält. Offensichtlich ist eine 4-NAESAT-erfüllbare Formel F ebenfalls 4-SAT-erfüllbar bzw. eine 4-SAT-unerfüllbare Formel F ebenfalls nicht 4-NAESAT-erfüllbar. Wir können also den Algorithmus 7.13 *Nichterfüllbar-4-SAT* ebenfalls für den effizienten Nachweis der Unerfüllbarkeit bei 4-NAESAT verwenden. Diese Überlegungen führen uns zu

Korollar 7.15. *Für fast alle 4-KNF-Formeln F mit einer Klauselwahrscheinlichkeit $p = c/n^2$ und $c > 7,26$ zertifiziert der Algorithmus 7.13 *Nichterfüllbar-4-SAT* effizient die Nichterfüllbarkeit von 4-SAT und 4-NAESAT. Hierfür sind $g_1(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^{2r}$, $g_2(n) = 1/\lceil \log_2 n \rceil^r$, $k = 6$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $r > 0$ zu verwenden.*

Andere Wahrscheinlichkeitsmodelle

Es wurden bisher nur zufällige Formeln F betrachtet, in denen jede Klausel mit der Wahrscheinlichkeit $p = c/n^2$ auftritt. Die Literale in der Klausel sind geordnet und müssen nicht verschieden sein. Der effiziente Nachweis der Unerfüllbarkeit wird aber auch in anderen Modellen möglich sein:

Alle Literale in einer Klausel sind voneinander verschieden, x und \bar{x} kommen nicht gemeinsam in einer Klausel vor: Im ursprünglichen Modell gibt es mit hoher Wahrscheinlichkeit nur $o(|F|)$ viele solcher Klauseln, die vernachlässigt werden konnten. An verschiedenen Stellen der bisherigen Analysen war es zum Teil störend, wenn eine Variable mehrmals in einer Klausel bzw. in einer Multikante vorkam. Es ist möglich, alle Analysen für Formeln mit der Klauselwahrscheinlichkeit p zu wiederholen, in denen die Klauseln geordnet sind, aber kein Literal doppelt bzw. negiert und nicht negiert vorkommt. Hier gibt es $2n(2n-2)(2n-4)(2n-6) \sim 16n^4$ viele mögliche Klauseln.

An Stelle von Formeln mit der Klauselwahrscheinlichkeit p kann man auch Formeln mit m geordneten Kanten betrachten. Diese Kanten seien uniform verteilt. Im ursprünglichen Modell gilt $c/n^2 \cdot (1 - c/n^2) \cdot 16n^4 \rightarrow \infty$. Das Theorem 2 in [Bol85] auf Seite 34 liefert hier den Hinweis darauf, daß in Modellen mit m Kanten der effiziente Nachweis der Unerfüllbarkeit ebenfalls möglich ist.

Als letzter Punkt kann die Ordnung der Klauseln diskutiert werden. Im praktischen Einsatz wird man eher mit Klauseln konfrontiert werden, deren Literale in einer Klausel nicht geordnet sind und dadurch auch keine Klauseln doppelt vorkommen. Diese ungeordneten Klauseln sollen mit der Wahrscheinlichkeit p' vorkommen, es entsteht die Formel F' . Einer ungeordneten Klausel (mit verschiedenen Literalen) entsprechen $4! = 24$ geordnete Klauseln. In einem zweiten Zufallsexperiment wird für jede ungeordnete Klausel jede zugehörige geordnete Klausel unabhängig von allen anderen mit der Wahrscheinlichkeit $p'' = 1/24$ ausgewählt. Es entsteht die Formel F mit der Klauselwahrscheinlichkeit $p = p' \cdot p''$, in der alle (geordneten) Kanten unabhängig voneinander gezogen wurden. Offensichtlich ist die gegebene Formel F' nicht erfüllbar, wenn die Formel F nicht erfüllbar ist. Dies kann aber für fast alle Formeln F effizient verifiziert werden. Aus dieser Betrachtung ergibt sich sofort ein Algorithmus, mit dem 4-SAT-Formeln mit ungeordneten Klauseln umgeformt werden können, so daß der effiziente Nachweis der Unerfüllbarkeit möglich ist. Analog kann man auch mit Formeln verfahren, bei denen uniform m ungeordnete Klauseln ausgewählt wurden.

Für die Diskussion der verschiedenen Modelle kann neben dem Theorem 2 in [Bol85] auf Seite 34 ebenfalls der Abschnitt 8 in [FS96] herangezogen werden.

2k-SAT

Die geringe Diskrepanz von Projektionshypergraphen der betrachteten zufälligen 4-SAT-Formeln kann effizient verifiziert werden. Hier kann man untersuchen, ob sich diese Methode auf k -SAT mit $k > 4$ und $c \cdot n^{k/2}$ vielen Klauseln verallgemeinern läßt. Aus der geringen Diskrepanz geeignet definierter $(k-1)$ -uniformer gerichteter Projektionshypergraphen sollten Eigenschaften einer erfüllenden Belegung folgen. Hier ist zu vermuten, daß wieder Parität vorliegt, also etwa gleich viele Variablen auf wahr und auf falsch gesetzt sind und in fast allen Klauseln eine ungerade Anzahl an wahren Literalen vorkommt. Im Fall von geraden k kann wieder ein Produktgraph $P = (V^{k/2}, E)$ betrachtet

werden. Dieser ergibt sich, wenn aus jeder positiven Klauseln $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k)$ die Kante $(x_1, \dots, x_{k/2}) - (x_{k/2+1}, \dots, x_k)$ erzeugt wird. Die Größe eines maximalen Schnitts ist hier ebenfalls konzentriert. Die Belegungen mit Parität erzeugen ebenfalls wieder einen Schnitt, in dem fast alle Kanten vorkommen müssen. Dieser Widerspruch kann nun zum Nachweis der Unerfüllbarkeit genutzt werden. Für den Nachweis der geringen Diskrepanz der $(k - 1)$ -uniformen gerichteten Projektionshypergraphen muß dann untersucht werden, ob hier Produkt- und Projektionshypergraphen definiert werden können, aus deren geringer Diskrepanz die geringe Diskrepanz der $(k - 1)$ -uniformen Projektionshypergraphen folgt. Das Ziel sind dann letztendlich wieder fast d -reguläre Multigraphen, deren Eigenwerte der Adjazenzmatrix mit hoher Wahrscheinlichkeit geeignet sind, die geringe Diskrepanz effizient nachzuweisen.

3-SAT

Für den Nachweis der Unerfüllbarkeit von zufälligen 3-SAT-Formeln kann ebenfalls die hier vorgestellte Methode verwendet werden. Bei der Analyse der Parität genügt die Betrachtung von Projektionsgraphen (vgl. [GJ02]). Zum endgültigen Nachweis der Unerfüllbarkeit muß auch hier der maximale Schnitt eines Produktgraphen $P = (V^2, E)$ untersucht werden. Bei 3-SAT konstruiert man hierfür aus zwei Klauseln $(x_1 \vee x_2 \vee z)$ und $(y_1 \vee y_2 \vee \bar{z})$ die Produktgraphkanten $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$ und $(y_1, x_1) - (y_2, x_2)$. Es kommt also die gleiche Konstruktion wie in den Abschnitten 4.1 und 5.1 zum Einsatz. Interessant ist dies für 3-SAT-Formeln mit $C \cdot n^{3/2}$ vielen Klauseln, da hier noch kein effizienter Algorithmus existiert, der die Nichterfüllbarkeit zertifiziert. Die Klauselwahrscheinlichkeit beträgt hier $p = c \cdot n^{-3/2}$. Im Produktgraphen gibt es $N = n^2$ viele Knoten und eine Kante kommt mit einer Wahrscheinlichkeit $p' \approx 2n \cdot p^2 = 2c^2/N$ vor. Damit sind in diesem Produktgraphen wieder linear viele Kanten zu erwarten. In den Abschnitten 4.1 und 5.1 haben wir gesehen, daß die Kanten auf Grund ihrer Konstruktion nicht unabhängig voneinander sind. Es gilt also nicht $\text{Prob}[e_1 \in E \text{ und } e_2 \in E] = \text{Prob}[e_1 \in E] \cdot \text{Prob}[e_2 \in E]$. Damit entfällt die Nutzung der Chernoff-Schranken wie in Kapitel 6 zum Nachweis der Konzentrierung des maximalen Schnitts. Es bleibt hier als offenes Problem, ob der maximale Schnitt in diesen Produktgraphen ebenfalls konzentriert ist.

8 Nicht k -färbbare r -uniforme Hypergraphen

8.1 Einführung

Ein (einfacher ungeordneter) Hypergraph $H = (V, E)$ besteht aus einer Menge von Knoten $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und einer Menge $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ von Kanten. Die Kantenmenge E ist somit eine Menge von Teilmengen von V . Ein Hypergraph ist genau dann r -uniform, wenn jede Kante $e \in E$ aus r (verschiedenen) Knoten besteht. Unter dem Grad d eines Knotens v versteht man die Anzahl der Kanten, in welchen sich dieser Knoten v befindet.

Im weiteren werden zufällige r -uniforme Hypergraphen betrachtet. Der Wahrscheinlichkeitsraum der Hypergraphen $H_{r,n,m}$ ergibt sich, indem m Kanten zufällig ohne Zurücklegen aus den $\binom{n}{r}$ möglichen Kanten des Hypergraphen mit n Knoten gewählt werden. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines bestimmten Hypergraphen

$$\text{Prob}[H] = \left(\frac{\binom{n}{r}}{m} \right)^{-1}.$$

Sei $H = (V, E)$ ein Hypergraph. Eine Färbung von H mit k Farben ist eine Abbildung $\chi: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, es wird also jedem Knoten eine Farbe zugeordnet. Eine Färbung χ zerlegt somit die Knotenmenge V des Hypergraphen in k disjunkte Teilmengen: $V = \bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ mit $V_i = \{v: \chi(v) = i\}$. Eine Färbung heißt *korrekt*, wenn es keine Kante gibt, deren Knoten monochromatisch, also nur mit einer Farbe, gefärbt sind.

8.2 Nicht k -färbbare r -uniforme Hypergraphen

Betrachtet man die Färbbarkeit zufälliger r -uniformer Hypergraphen, so führt dies zu folgendem Lemma:

Lemma 8.1. *Fast alle zufälligen r -uniformen Hypergraphen $H_{r,n,m}$ mit $\epsilon > 0$ und konstant, $m \geq (c + \epsilon)n$ sowie $c = \log_{1+1/(k^{r-1}-1)} k$ sind nicht k -färbbar.*

Beweis. Sei $X: H \rightarrow \mathbb{N}$ die Zufallsvariable, die die Anzahl der korrekten k -Färbungen eines r -uniformen Hypergraphen zählt: $X(H) = \text{Anzahl der korrekten } k\text{-Färbungen von } H$. Damit ist H k -färbbar genau dann, wenn $X(H) \geq 1$ gilt. Damit ergibt sich $\text{Prob}[H \text{ ist } k\text{-färbbar}] = \text{Prob}[X(H) \geq 1]$.

Sei $Y_\chi: H \rightarrow \mathbb{N}$ die Indikatorzufallsvariable, die angibt, ob ein r -uniformer Hypergraph

8 Nicht k -färbbare r -uniforme Hypergraphen

H durch die k -Färbung χ korrekt gefärbt wird: $Y_\chi(H) = \begin{cases} 1 & : \chi \text{ färbt } H \text{ korrekt} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$. Damit läßt sich die Zufallsvariable X über die einzelnen Y_χ darstellen: $X(H) = \sum_{\chi} Y_\chi(H)$.

Betrachtet man nun den Erwartungswert von X , so ergibt sich aus dessen Linearität:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_H \text{Prob}[H] \cdot X(H) \\ &= \sum_H \text{Prob}[H] \cdot \sum_{\chi} Y_\chi(H) \\ &= \sum_{\chi} \mathbb{E}[Y_\chi(H)] \\ &= \sum_{\chi} \text{Prob}[Y_\chi(H) = 1] \quad . \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit $\text{Prob}[Y_\chi(H) = 1]$, daß eine bestimmte k -Färbung χ einen zufälligen Hypergraphen H färbt, kann leicht abgeschätzt werden. Sei $n_i = |V_i|$ die Anzahl der Knoten mit der Farbe i in der Färbung χ . Es gilt natürlich $n = \sum_{i=1}^k n_i$. Es gibt insgesamt $\binom{n}{r}$ Kanten. Daraus können $\binom{n}{m}$ viele Hypergraphen mit m Kanten gebildet werden. Enthält ein solcher Hypergraph eine der $\sum_{i=1}^k \binom{n_i}{r}$ möglichen monochromatisch gefärbten Kanten, so wird er durch χ nicht korrekt gefärbt. Hieraus ergibt sich:

$$\text{Prob}[Y_\chi(H) = 1] = \frac{\binom{n}{r} - \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{r}}{\binom{n}{m}} \quad .$$

Offensichtlich ist $\binom{n}{r} - \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{r} < \binom{n}{r}$. Die Anzahl der Kanten m im r -uniformen Hypergraphen kann $\binom{n}{r}$ nicht überschreiten, damit folgt nach [Chv84] bzw. nach Lemma 10.1 des Anhangs:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[Y_\chi(H) = 1] &= \frac{\binom{n}{r} - \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{r}}{\binom{n}{m}} \quad . \\ &\leq \left(\frac{\binom{n}{r} - \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{r}}{\binom{n}{r}} \right)^m \quad . \end{aligned}$$

Das Maximum dieser Wahrscheinlichkeit kann nun mittels der Jensenschen Ungleichung

8 Nicht k -färbbare r -uniforme Hypergraphen

(230) wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}[Y_\chi(H) = 1] &\leq \left(\frac{\binom{n}{r} - k \binom{\lfloor n/k \rfloor}{r}}{\binom{n}{r}} \right)^m \\
 &= \left(1 - k \frac{\binom{\lfloor n/k \rfloor}{r}}{\binom{n}{r}} \right)^m \\
 &= \left(1 - k \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \cdot \frac{\lfloor n/k \rfloor - 1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{\lfloor n/k \rfloor - (r-1)}{n-(r-1)} \right)^m.
 \end{aligned}$$

Es sei $n > k \cdot r$, ferner kann $\lfloor n/k \rfloor$ mittels $\lfloor n/k \rfloor \geq (n-k)/k = n/k - 1$ abgeschätzt werden. So gilt für jedes i mit $0 \leq i \leq r-1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\lfloor n/k \rfloor - i}{n - i} &\geq \frac{n/k - r}{n} \\
 &= \frac{1}{k} \left(1 - \frac{kr}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}[Y_\chi(H) = 1] &\leq \left(1 - k \cdot \left(\frac{1}{k} \right)^r \cdot \left(1 - \frac{kr}{n} \right)^r \right)^m \\
 &= \left(\left(1 - \frac{1}{k^{r-1}} \right) \cdot (1 + O(1/n)) \right)^m.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun für den Erwartungswert $E[X]$:

$$\begin{aligned}
 E[X] &\leq \sum_{\chi} \left(\left(1 - \frac{1}{k^{r-1}} \right) \cdot (1 + O(1/n)) \right)^m \\
 &= k^n \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{k^{r-1}} \right) \cdot (1 + O(1/n)) \right)^m.
 \end{aligned}$$

Auf Grund der Markoff-Ungleichung [Mar12] folgt damit

$$\text{Prob}[X \geq 1] \leq k^n \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{k^{r-1}} \right) \cdot (1 + O(1/n)) \right)^m.$$

8 Nicht k -färbbare r -uniforme Hypergraphen

Setzt man nun $m \geq (c + \epsilon)n$ mit $c = \log_{1+1/(k^{r-1}-1)} k$ und $\epsilon > 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[X \geq 1] &\leq k^n \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{k^{r-1}}\right) \cdot (1 + O(1/n)) \right)^{(c+\epsilon)n} \\ &= \left(k \cdot \left(1 - \frac{1}{k^{r-1}}\right)^{c+\epsilon} \right)^n \cdot ((1 + O(1/n))^n)^{c+\epsilon} . \end{aligned}$$

Die Ungleichung $1 + x \leq e^x$ gilt für alle x . Somit erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[X \geq 1] &\leq \left(k \cdot \left(1 - \frac{1}{k^{r-1}}\right)^{c+\epsilon} \right)^n \cdot e^{O(1)} \\ &= \left(k \cdot \left(1 - \frac{1}{k^{r-1}}\right)^{\log_{1+1/(k^{r-1}-1)} k} \cdot \left(1 - \frac{1}{k^{r-1}}\right)^\epsilon \right)^n \cdot e^{O(1)} \\ &= \left(k \cdot \left(\frac{k^{r-1}-1}{k^{r-1}}\right)^{\log_{1+1/(k^{r-1}-1)} k} \cdot \left(1 - \frac{1}{k^{r-1}}\right)^\epsilon \right)^n \cdot e^{O(1)} \\ &= \left(k \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{k^{r-1}}\right)^\epsilon \right)^n \cdot e^{O(1)} \\ &= o(1) . \end{aligned}$$

□

Im Falle von 2-uniformen Hypergraphen, also einfachen Graphen, sind bessere obere Schranken für die Nichtfärbbarkeit bekannt. Nach Lemma 8.1 sind einfache Graphen mit mindestens $2,710n$ Kanten mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht 3-färbbar. In [DZ98] wird gezeigt, daß fast alle Graphen mit $2,639n$ Kanten nicht 3-färbbar sind. Aus [AM99] ist ersichtlich, daß bereits $2,522n$ genügen, damit ein zufälliger Graph mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht 3-färbbar ist.

8.3 Nicht 2-färbbare 4-uniforme Hypergraphen

Die 2-Färbbarkeit von Graphen und Hypergraphen ist ein Spezialfall des Problems NAESAT. Hier müssen alle Klauseln wahr sein und ein wahres sowie ein falsches Literal enthalten. Interpretiert man die Kanten eines Graphen $G = (V, E)$ bzw. eines k -uniformen Hypergraphen $H = (V, E)$ als Klauseln, so entsteht die k -KNF-Formel $F = (V, E)$. Diese Formel enthält nur positive Klauseln. Offensichtlich ist der Hypergraph H genau dann 2-färbbar, wenn die Formel F NAESAT-erfüllbar ist.

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

An dieser Stelle kann man untersuchen, ob der Algorithmus 7.13 *Nichterfüllbar-4-SAT* zum Nachweis der Unerfüllbarkeit von 4-SAT-Formeln mit $C \cdot n^2$ vielen Klauseln ebenfalls zum Nachweis der Nicht-2-Färbbarkeit zufälliger 4-uniformer Hypergraphen mit $C \cdot n^2$ vielen (geordneten) Kanten geeignet ist. Im letzten Teil dieses Algorithmus werden nur die positiven Klauseln der Formel herangezogen, um daraus den Produktgraphen zu bilden. Da hier in diesem speziellen Fall der Untersuchung der Nicht-2-Färbbarkeit nur positive Klauseln auftreten, kann dieser Teil unverändert eingesetzt werden.

Anders verhält es sich dagegen mit der Untersuchung der Parität. Hier sind bei herkömmlichen Formeln sowohl die positiven als auch die negativen Klauseln notwendig, um alle Belegungen ohne Parität als erfüllende Belegung auszuschließen. Hier müssen wir nochmals den Beweis zum Theorem 7.6 betrachten. Hier wußten wir, daß es bei einer erfüllenden Belegung keine positiven Klauseln des Typs (F_a, F_a, F_a, F_a) und keine negativen Klauseln des Typs (T_a, T_a, T_a, T_a) gibt. Speziell beim Problem der 2-Färbbarkeit bzw. beim Problem NAESAT gibt es für eine erfüllende Belegung a weder positive Klauseln des Typs (F_a, F_a, F_a, F_a) noch positive Klauseln des Typs (T_a, T_a, T_a, T_a) , so daß im gesamten Beweis die Formel F^- durch die Formel F^+ ersetzt werden kann. Analog kann nun der Algorithmus 7.7 *Test-Parität-4-SAT* geändert werden und der effiziente Nachweis der Nicht-2-Färbbarkeit durch den Algorithmus 7.13 *Nichterfüllbar-4-SAT* ist nun möglich. Wir erhalten:

Korollar 8.2. *Es existiert ein Polynomialzeitalgorithmus, der die Nicht-2-Färbbarkeit fast aller zufälligen geordneten 4-uniformen Hypergraphen H mit der Kantenwahrscheinlichkeit $p \sim C/n^2$ zertifiziert. Dabei ist C eine Konstante mit $C > 7,26$.*

9 Eine Hajós-Konstruktion für uniforme Hypergraphen

9.1 Einführung

Ein (einfacher ungeordneter) Hypergraph $H = (V, E)$ besteht aus einer Menge von Knoten $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ und einer Menge $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ von Kanten. Die Kantenmenge E ist somit eine Menge von Teilmengen von V . Ein Hypergraph ist genau dann *r-uniform*, wenn jede Kante $e \in E$ aus r (verschiedenen) Knoten besteht. Unter dem Grad $d(v)$ eines Knotens v versteht man die Anzahl der Kanten, in welchen sich dieser Knoten v befindet.

Mit $K_{r,n}$ bzw. K_n sei der vollständige r -uniforme Hypergraph mit n Knoten und allen möglichen $\binom{n}{r}$ Kanten bezeichnet.

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

Sei $H = (V, E)$ ein Hypergraph. Eine Färbung χ von H mit k Farben ist eine Abbildung $\chi: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, es wird also jedem Knoten eine Farbe zugeordnet. Eine Färbung χ zerlegt somit die Knotenmenge V des Hypergraphen in k disjunkte Teilmengen: $V = \bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ mit $V_i = \{v \in V: \chi(v) = i\}$. Eine Färbung heißt *korrekt*, wenn es keine Kante gibt, deren Knoten monochromatisch, also nur mit einer Farbe, gefärbt sind. Wenn ein Hypergraph k -färbbar ist, dann kann er auch mit $k' > k$ Farben korrekt gefärbt werden. Es ist natürlich das kleinste k interessant, für das ein Hypergraph korrekt färbbar ist:

Definition 9.1 (Optimale Färbung). *Eine k -Färbung eines Hypergraphen H heißt optimal, wenn es keine korrekte k' -Färbung von H mit $k' < k$ gibt.*

Wenn ein Hypergraph k -färbbar ist, dann erhält man bereits durch das Permutieren der Farben $k!$ verschiedene Färbungen. Diese Anzahl von verschiedenen Färbungen kann sich noch vergrößern, je weniger Kanten der Graph enthält. Für die weiteren Betrachtungen ist es nützlich, wenn man unter diesen Färbungen eine fest auswählen kann oder wenigstens eine Färbung bestimmbar ist, die auf Grund der gewählten Farben bereits einfache Schlußfolgerungen – beispielsweise das Vorhandensein bestimmter Kanten oder die Größe einzelner Farbklassen – zuläßt. Hierzu genügt es, die Färbungen zu ordnen. Als Vorbild dient die lexikographische Ordnung. Es sei also die Färbung maximal, bei der die meisten Knoten mit der Farbe 1 gefärbt sind. Haben zwei Färbungen die gleiche Anzahl 1-gefärbter Knoten, so ist die Färbung größer, die mehr Knoten in der Farbe 2 hat usw. Hieraus ergibt sich folgende Definition einer Ordnungsrelation $>$ über den korrekten k -Färbungen eines Hypergraphen basierend auf der Anzahl der gleich gefärbten Knoten:

Es sei $V = \bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ die durch die korrekte Färbung χ erzeugte Partition der Knoten bzw. $W = \bigcup_{1 \leq i \leq k} W_i$ die durch die Färbung κ bestimmte Partition. Es gilt $\chi > \kappa$ genau dann, wenn ein $j \in \{1, \dots, k\}$ existiert, für das gilt:

- für alle i mit $1 \leq i < j$ ist $|V_i| = |W_i|$ und
- $|V_j| > |W_j|$.

Definition 9.2 (Maximale Färbung). *Eine k -Färbung χ heißt maximal, wenn sie bezüglich der Ordnungsrelation $>$ die größte Färbung darstellt, also keine k -Färbung χ' mit $\chi' > \chi$ existiert.*

Aus der Definition der Ordnungsrelation bzw. der maximalen Färbung können bereits einfache Aussagen über die Anzahl von Knoten einer Farbe gefolgert werden. Man erkennt sofort, daß durch die maximale k -Färbung χ die Farbklassen bezüglich der Größe geordnet sind: $|V_1| \geq |V_2| \geq \dots \geq |V_k|$. Damit umfaßt die Menge $|V_1|$ mindestens $|V|/k$ Knoten. Die maximale Färbung χ ist sogar optimal, wenn die Menge V_k mindestens einen Knoten enthält.

9.2 Erste Beobachtungen

Es ist sofort einleuchtend, daß ein Hypergraph mit maximal k Knoten immer korrekt k -färbbar ist. Im folgenden wird dies weiter präzisiert, um einen nicht k -färbbaren Hypergraphen zu finden, mit dem die Konstruktion beginnen kann. Dieser Hypergraph soll dabei so klein wie möglich sein, d. h. es soll kein nicht k -färbbarer Hypergraph existieren, der weniger Knoten oder weniger Kanten umfaßt.

Lemma 9.3. *Jeder r -uniforme Hypergraph H_r mit maximal $(r - 1)k$ Knoten ist immer korrekt k -färbbar.*

Beweis:

Man ordnet jeweils maximal $r - 1$ Knoten eine Farbe zu. Damit wird jeder Knoten mit einer der k Farben gefärbt. In jeder der Kanten muß es jetzt mindestens zwei Knoten geben, die verschieden gefärbt sind. \square

Lemma 9.4. *Der vollständige r -uniforme Hypergraph $K_{r,(r-1)k+1}$ ist nicht k -färbbar.*

Beweis:

Da der Hypergraph $(r - 1)k + 1$ Knoten enthält, muß es bei jeder möglichen Färbung mindestens r Knoten x_1, \dots, x_r geben, die gleich gefärbt sind. Da der $K_{r,(r-1)k+1}$ jedoch alle möglichen Kanten enthält, verhindert diese Kante $\{x_1, \dots, x_r\}$, daß die gerade betrachtete Färbung korrekt ist. Somit existiert keine korrekte Färbung für diesen Hypergraphen. \square

Lemma 9.5. *Jeder r -uniforme Hypergraph H_r , bestehend aus maximal $(r - 1)k + 1$ Knoten und maximal $\binom{(r-1)k+1}{r} - 1$ Kanten ist k -färbbar.*

Beweis:

Alle Hypergraphen mit maximal $(r - 1)k$ Knoten sind nach Lemma 9.3 färbbar. Es genügt also zu zeigen, daß jeder Hypergraph mit $(r - 1)k + 1$ Knoten und höchstens $\binom{(r-1)k+1}{r} - 1$ Kanten färbbar ist. Es wird wie bei Lemma 9.3 verfahren. Man wählt eine Färbung so, daß es von $(k - 1)$ Farben jeweils $(r - 1)$ Knoten und von einer Farbe

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

r Knoten gibt. Diese r Knoten sind so zu wählen, daß sie keine Kante bilden, die im Hypergraph enthalten ist. Dies ist möglich, da der Hypergraph nicht vollständig ist. Nun schließt man weiter wie in Lemma 9.3. \square

Damit ist der vollständige Hypergraph $K_{r,(r-1)k+1}$ bezüglich der Knotenanzahl der kleinste nicht k -färbbare r -uniforme Hypergraph. Mit diesem Graph wird die später vorgestellte Konstruktion beginnen.

An dieser Stelle ergibt sich eine interessante Beobachtung: Entfernt man aus dem nicht k -färbbaren Hypergraphen $K_{r,(r-1)k+1}$ eine beliebige Kante $\{x_1, \dots, x_r\}$, so erhält man einen korrekt k -färbbaren Hypergraphen, in dem die Knoten x_1, \dots, x_r alle gleich gefärbt sind. (Wären sie es nicht, so könnte die korrekt gefärbte Kante $\{x_1, \dots, x_r\}$ hinzugefügt werden, was Lemma 9.4 widerspricht.) Dies führt zu folgender Definition:

Definition 9.6 (Kritische Kante). *Eine Kante e eines nicht k -färbbaren Hypergraphen $H = (V, E)$ heißt kritisch, wenn beim Entfernen von e der neu entstandene Hypergraph $H' = (V, E')$ mit $E' = E \setminus \{e\}$ korrekt k -färbbar ist.*

Die obige Beobachtung kann analog auf kritische Kanten angewendet werden. Damit gilt:

Lemma 9.7. *Sei H' der k -färbbare r -uniforme Hypergraph, der aus dem nicht k -färbbaren r -uniformen Hypergraphen H durch Entfernen der kritischen Kante e entstanden ist. Dann müssen alle Knoten v der kritischen Kante e , also mit $v \in e$, bei jeder korrekten Färbung χ von H' mit der gleichen Farbe gefärbt sein.*

Zu jedem r -uniformen Hypergraphen H gibt es mindestens eine optimale Färbung χ . Unter den optimalen Färbungen des Hypergraphen H kann man eine größte Färbung bestimmen. Auf Grund ihrer Maximalität können Aussagen über das Vorhandensein bestimmter Kanten bzw. die Größe bestimmter Farbklassen getroffen werden. Dies führt zu den nächsten drei Lemmas.

Lemma 9.8. *Es sei H ein r -uniformer Hypergraph H mit einer maximalen k -Färbung χ . Die durch χ erzeugte Partition der Knoten sei $V = \bigcup_{1 \leq l \leq k} V_l$. Für alle Knoten x sowie alle Zahlen i und j mit $\chi(x) = j$, also $x \in V_j$, $j > 1$ und $1 \leq i < j$ existiert eine Kante $e = \{x_1, \dots, x_{r-1}, x\}$ mit $\chi(x_l) = i$, also $x_l \in V_i$ für jedes $l \in \{1, \dots, r-1\}$.*

Liegt also eine maximale Färbung χ vor, so muß jeder Knoten x mit einer Farbe $\chi(x)$ verschieden von 1 in mindestens $\chi(x) - 1$ Kanten liegen. Die restlichen Knoten dieser

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

Kanten haben jeweils alle die gleiche Farbe (eine aus $\{1, \dots, \chi(x) - 1\}$).

Beweis:

Man betrachtet einen festen Knoten $x \in V_j$ mit $j > 1$ sowie die Knoten aus V_i , also alle Knoten einer Farbe $i < j$. Existiert die in der Behauptung beschriebene Kante $\{x_1, \dots, x_{r-1}, x\}$ nicht, so kann aus χ eine neue korrekte k -Färbung χ' gebildet werden,

indem x von V_j nach V_i geschoben wird. Es ist also $\chi'(v) = \begin{cases} \chi(v) & \text{für } v \neq x \\ i & \text{für } v = x \end{cases}$. Damit

ergibt sich die zugehörige Partition aus $V'_m = \begin{cases} V_i \cup \{x\} & \text{für } m = i \\ V_j \setminus \{x\} & \text{für } m = j \\ V_m & \text{sonst.} \end{cases}$

Um zu überprüfen, ob die neue Färbung korrekt ist, muß nur die korrekte Färbung der Kanten, die x enthalten, nachgewiesen werden. Da x die Farbe i hat, kann eine Kante $\{x_1, \dots, x_{r-1}, x\}$ nur falsch gefärbt sein, wenn alle x_l mit $l \in \{1, \dots, r-1\}$ die Farbe i haben und damit für alle l $x_l \in V_i$ gilt. Eine solche Kante soll es aber nicht geben. Damit ist χ' eine korrekte k -Färbung von H . Nun gilt aber $i < j \leq k$ und $|V'_i| = |V_i| + 1 > |V_i|$. Auf Grund der Konstruktion von χ' ergibt sich $\chi' > \chi$. Das widerspricht aber der Maximalität von χ . Damit muß die Kante $e = \{x_1, \dots, x_{r-1}, x\}$ in H existieren. \square

Auf Grund der Maximalität der Färbung kann nun für einen Knoten x , der nicht mit der Farbe 1 gefärbt ist, eine minimale Anzahl von Kanten angegeben werden, in denen dieser Knoten liegen muß. Neben dieser Anzahl ist auch die Struktur dieser Kanten bekannt. Sie bestehen aus dem Knoten x sowie Knoten, die alle gleich gefärbt sind. Aus der Struktur dieser Kanten können nun ebenfalls Rückschlüsse über die minimale Größe der einzelnen Farbklassen gezogen werden:

Lemma 9.9. *Sei H ein r -uniformer Hypergraph $H = (V, E)$ mit der optimalen und maximalen k -Färbung χ , die die Knotenmenge V in die Partition $V = \bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ zerlegt.*

Dann gilt

- $|V_k| \geq 1$,
- $|V_i| \geq r - 1$ für alle $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ und
- $|V_i| \geq |V_{i+1}|$ für alle $i \in \{1, \dots, k - 1\}$.

Beweis:

Es ist offensichtlich, daß $|V_i| \geq |V_j|$ für zwei Knotenmengen V_i und V_j der Partition gel-

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

ten muß, wenn $i < j$ gilt und die Färbung χ maximal ist. Anderenfalls könnte eine neue korrekte und größere Färbung durch Vertauschen der beiden Mengen V_i und V_j gebildet werden. Nach Lemma 9.8 gibt es für jeden Knoten $x \in V$ mit $\chi(x) \neq k$ und für jede Farbe $l < k$ eine Kante $\{y_1, \dots, y_{r-1}, x\}$ mit $\chi(y_1) = \chi(y_2) = \dots = \chi(y_{r-1}) = l$. Damit enthält jede Menge V_l mit $l < k$ mindestens $(r - 1)$ Knoten. Damit gilt $|V_i| \geq r - 1$ für alle $i \in \{1, \dots, k - 1\}$. Da die Färbung χ optimal ist, muß es von jeder Farbe wenigstens einen Knoten geben. Es ist also $|V_k| \geq 1$. \square

Zu einem Knoten konnten nun Kanten beschrieben werden, in denen dieser liegen muß. Andererseits ist auch die Fragestellung interessant, unter welchen Umständen r Knoten des Hypergraphen eine Kante bilden müssen. Im nächsten Lemma werden r beliebige Knoten betrachtet. Bilden diese Knoten keine Kante, so kann man versuchen, diese Knoten mit der selben Farbe zu färben. Dies sollte dann möglich sein, wenn die Färbung dieser Knoten von nicht zu vielen Knoten bzw. Kanten des Hypergraphen abhängt. Im Umkehrschluß findet man hierüber eine hinreichende Bedingung, so daß die r Knoten eine Kante bilden müssen:

Lemma 9.10. *Sei H ein r -uniformer Hypergraph $H = (V, E)$ mit einer maximalen k -Färbung χ , die die Knotenmenge V in die Partition $V = \bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ zerlegt. Sei $e = \{x_1, \dots, x_r\}$ ein Menge von r Knoten. Dabei liege ein Knoten x_i in der Knotenmenge X_i der Partition, also $X_i \in \{V_1, \dots, V_k\}$. Ferner sei $|X_i| \geq |X_{i+1}|$ für alle $i \in \{1, \dots, r - 1\}$. Gilt nun $|V_1| \leq (r - 1)$ und $X_1 \neq X_r$, also $\chi(x_1) \neq \chi(x_r)$, dann ist e eine Kante von H .*

Wählt man also r beliebige Knoten aus dem maximal gefärbten Hypergraphen aus und gibt es unter diesen Knoten mindestens zwei, die verschieden gefärbt sind, so müssen diese r Knoten eine Kante bilden, wenn es in dem Hypergraphen maximal $r - 1$ Knoten gibt, die mit der kleinsten Farbe der r Knoten gefärbt sind. Die Knotenmengen X_1, X_2, \dots, X_r müssen nicht voneinander verschieden sein. Es kann durchaus $x_1 \in X_1 = V_3$ und $x_2 \in X_2 = V_3 = X_1$ gelten. Die Knotenmenge X_i ist die Menge von Knoten, die mit der gleichen Farbe wie der Knoten x_i gefärbt wurde.

Beweis:

Es wird wieder angenommen, daß $e \notin E$ gilt. Hieraus kann aber wiederum eine korrekte Färbung χ' konstruiert werden, die der Maximalität von χ widerspricht:

Die Knoten x_1 und x_r haben verschiedene Farben. Insgesamt sei j die Anzahl der verwendeten Farben für die Knoten x_1, \dots, x_r . Es gilt offensichtlich $2 \leq j \leq k$. D.h. die

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

Knotenmenge $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$ ist die Teilmenge von Knoten des Hypergraphen, die mit den j Farben der r Knoten gefärbt wurde. Jede dieser j Farbklassen darf aber laut Voraussetzung maximal $r - 1$ Knoten beinhalten. Somit ist $|X| \leq (r - 1)j$.

Die Knotenmenge $X \subseteq V$ spannt im Hypergraphen $H = (V, E)$ einen Teilhypergraphen $H' = (X, E')$ (mit $E' = \{e: e \in E, e \cap (V \setminus X) = \emptyset\}$) auf. Der Hypergraph H' ist somit der Teilhypergraph von H , der nur mit den j Farben gefärbt ist.

Dieser Hypergraph H' kann nach Lemma 9.3 immer mit j Farben korrekt gefärbt werden, da er maximal $(r - 1)j$ Knoten enthält. Dieser Hypergraph ist also mit oder ohne der Kante e korrekt j -färbbar.

Ändert man die Färbung des Teilhypergraphen H' und beschränkt sich dabei auf die j Farben, so bleibt diese neue Färbung ebenfalls für H korrekt. Es sei also κ eine korrekte j -Färbung von H' mit den j Farben. Dann ist die Färbung χ' von H mit

$$\chi'(v) = \begin{cases} \kappa(v) & \text{für } v \in X \\ \chi(v) & \text{für } v \in V \setminus X \end{cases}$$

ebenfalls eine korrekte k -Färbung. Die Färbungen χ und κ sind für H bzw. H' korrekt. Man muß also für die Korrektheit der Färbung χ' nur die Kanten untersuchen, die sowohl Knoten aus X als auch Knoten aus $V \setminus X$ enthalten. Da aber die Knoten aus X mit j Farben und die Knoten aus $V \setminus X$ mit den restlichen $k - j$ Farben gefärbt sind, müssen die Knoten dieser Kanten ebenfalls korrekt gefärbt sein.

Den Abschluß des Beweises des Lemmas bildet die Konstruktion der Färbung κ des Teilhypergraphen H' . Die Färbung κ muß so beschaffen sein, daß sie für den Fall, daß $e = \{x_1, \dots, x_r\}$ keine Kante aus E ist, die größere Färbung $\chi' > \chi$ und damit einen Widerspruch erzeugt.

Wenn $e = \{x_1, \dots, x_r\}$ keine Kante aus H und damit auch keine Kante aus H' ist, dann können alle diese Knoten mit der gleichen Farbe, beispielsweise $\chi(x_1)$ gefärbt werden. Um für die restlichen Knoten aus X in H' eine korrekte Färbung zu erhalten, verfährt man wie in Lemma 9.3, indem man jeweils $r - 1$ Knoten mit der selben Farbe färbt. In dieser Färbung κ beträgt die Anzahl der Knoten, die mit der Farbe $\chi(x_1)$ gefärbt wurden, genau r . Diese Anzahl ist damit mindestens um 1 größer als die Anzahl Knoten

$|X_1|$, die durch die Färbung χ mit der Farbe $\chi(x_1)$ gefärbt wurden. Daraus folgt aber sofort $\chi' > \chi$ und somit ein Widerspruch zur Maximalität der Färbung χ . \square

9.3 Die Konstruktion

Die Konstruktion nicht k -färbbarer r uniformer Hypergraphen folgt der Konstruktion aus [Haj61]. Es werden auch hier ausschließlich folgende drei Operationen verwendet:

1. *Hinzufügen*

Es können beliebige Knoten und aus r verschiedenen, bereits vorhandenen Knoten bestehende Kanten zum r -uniformen Hypergraphen H hinzugefügt werden.

2. *Verschmelzen*

Das Verschmelzen zweier r -uniformer Hypergraphen $H_1 = (V_1, E_1)$ und $H_2 = (V_2, E_2)$ zu $H = (V, E)$:

Im Hypergraphen H_1 wird ein Knoten $x \in V_1$ mit einem Grad $d(x) \geq 1$ und einer beliebigen Kante $e_1 = \{x, x_2, \dots, x_r\}$, die diesen Knoten enthält, ausgewählt. Analog wählt man im Hypergraphen H_2 einen Knoten $y \in V_2$, der in der Kante $e_2 = \{y, y_2, \dots, y_r\}$ liegt. Die beiden Knoten x und y werden identifiziert, d. h. sie werden zu einem neuen Knoten z verschmolzen. Die beiden Knotenmengen V_1 und V_2 umfassen somit einen gemeinsamen Knoten: $V_1 \cap V_2 = \{x\} = \{y\} = \{z\}$.

Nun entfernt man die beiden Kanten e_1 und e_2 aus den Hypergraphen und bildet aus den beiden Restgraphen unter Beachtung der Identifizierung einen neuen Hypergraphen. Zu diesem fügt man eine neue Kante $e = \{z_1, \dots, z_r\}$ hinzu, die nur aus Knoten z_i besteht, die sich vorher in den Kanten e_1 und e_2 befunden haben. Aus $e_1 \cup e_2$ werden also r verschiedene Knoten ausgewählt. Es entsteht der Hypergraph $H = (V, E)$ mit

- $V = V_1 \cup V_2$,
- $V_1 \cap V_2 = \{x\} = \{y\} = \{z\}$,
- $E = (E_1 \setminus \{e_1\}) \cup (E_2 \setminus \{e_2\}) \cup \{e\}$ und
- $e = \{z_1, \dots, z_r\}$ mit $z_i \in e_1 \cup e_2 = \{x_2 \dots x_r, y_2, \dots, y_r, z\}$.

Abbildung 1 zeigt eine Möglichkeit, wie zwei 3-uniforme Hypergraphen H_1 und H_2 zu dem neuen Hypergraphen H verschmolzen werden können.

3. Homomorphe Abbildung

Der r -uniforme Hypergraph $\bar{H} = (\bar{V}, \bar{E})$ ist ein homomorphes Bild des r -uniformen Hypergraphen $H = (V, E)$, wenn es eine Abbildung $\varphi: V \rightarrow \bar{V}$ gibt, so daß die Relationen der Knoten untereinander bezüglich der Zugehörigkeit von Kanten erhalten bleiben. Gibt es also die Kante $\{x_1, \dots, x_r\} \in E$ in H , so muß es in \bar{H} die Kante $\{\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_r)\} \in \bar{E}$ geben bzw. zu jeder Kante $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\} \in \bar{E}$ in \bar{H} existiert in H mindestens eine Kante $\{x_1, \dots, x_r\} \in E$ mit $\bar{x}_i = \varphi(x_i)$.

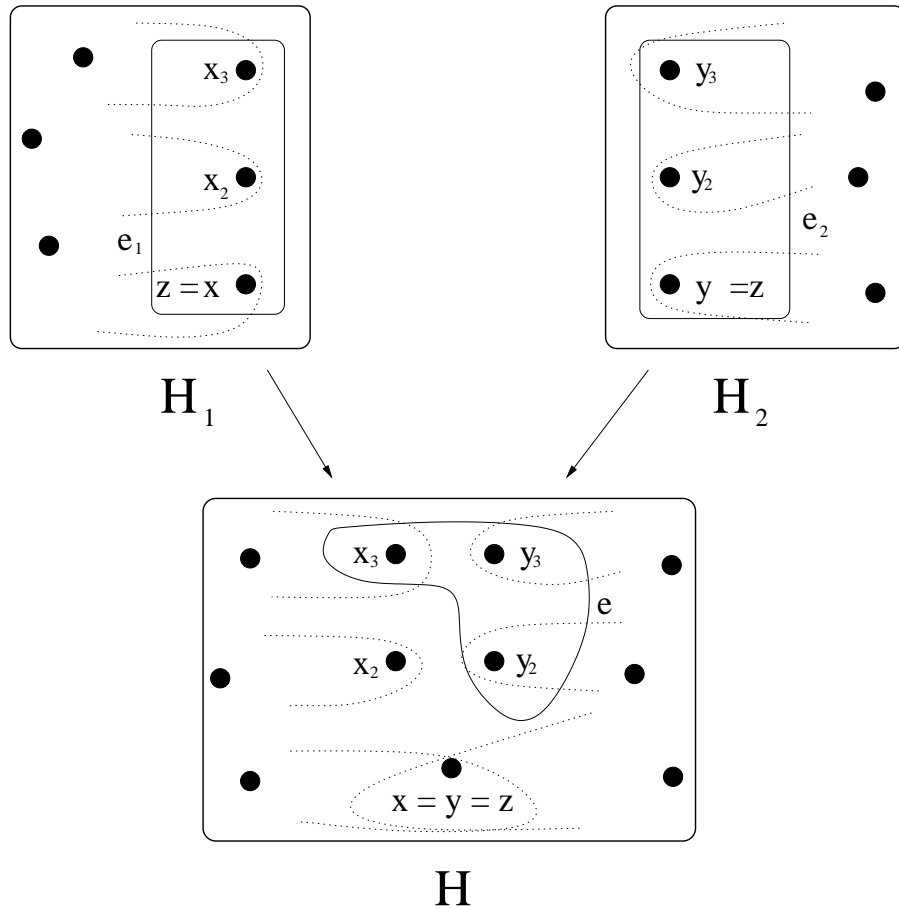


Abbildung 1: mögliche Verschmelzung der 3-uniformen Hypergraphen H_1 und H_2 zu H

Theorem 9.11. Das Anwenden der Operationen (1), (2) und (3) auf den vollständigen r -uniformen Hypergraphen $K_{r,(r-1)k+1}$ erzeugt alle nicht k -färbbaren r -uniformen Hypergraphen H .

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

Beweis: Den Beweis dieses Satzes liefern die beiden folgenden Lemmata. Das Lemma 9.14 beweist die Korrektheit der Operationen. Die Vollständigkeit ergibt sich aus dem Lemma 9.15.

Für das Lemma 9.15 ist der Begriff des erhaltbaren bzw. konstruierbaren sowie des gesättigten Hypergraphen notwendig:

Definition 9.12 (Erhaltbare und konstruierbare Hypergraphen). *Ein r -uniformer Hypergraph H heißt erhaltbar bzw. konstruierbar, wenn er aus dem vollständigen r -uniformen Hypergraphen $K_{(r-1)k+1}$ nur durch Anwenden der Operationen (2) und (3) bzw. (1) bis (3) gewonnen werden kann.*

Enthält ein Hypergraph H einen erhaltbaren Teilgraphen, so kann H allein durch die Operation (1) – beliebiges Hinzufügen von Knoten und Kanten – gewonnen werden. Somit wäre ein solcher Hypergraph H ebenfalls konstruierbar. Ist dagegen der Hypergraph H nicht erhaltbar, so kann er auch keinen erhaltbaren Teilgraphen enthalten. Es ist zu vermuten, daß das Hinzufügen beliebiger Knoten und Kanten einen erhaltbaren Teilgraphen in der weiteren Konstruktion nicht zerstören wird. Wir werden zeigen, daß ein konstruierbarer Hypergraph einen erhaltbaren Teilgraphen enthält.

Fügt man zu einem nicht erhaltbaren Hypergraphen Kanten hinzu, so entsteht irgendwann ein vollständiger Hypergraph, der offensichtlich erhaltbar ist. Beschränkt man das Hinzufügen der Kanten darauf, daß nur nicht erhaltbare Hypergraphen entstehen, so spricht man vom Sättigen des Hypergraphen. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 9.13 (Gesättigter Hypergraph). *Ein gesättigter Hypergraph H ist ein nicht erhaltbarer Hypergraph, aus dem durch das Hinzufügen einer beliebigen Kante ein erhaltbarer Hypergraph entsteht.*

Jeder nicht erhaltbare und nicht gesättigte Hypergraph muß Teilgraph mindestens eines gesättigten Hypergraphen sein, welcher selbst auch keine erhaltbaren Teilgraphen enthalten darf. Aus dem Theorem folgt, daß jeder gesättigte Hypergraph k -färbbar sein muß. Im Lemma 9.15 wird die Existenz eines nicht k -färbbaren gesättigten und damit nicht erhaltbaren Hypergraphen angenommen. Es kann aber gezeigt werden, daß dieser Hypergraph einen erhaltbaren Teilgraphen enthält. Dieser Widerspruch beweist am Ende die Vollständigkeit der Konstruktion.

Lemma 9.14. *Jeder r -uniforme Hypergraph H_r , der aus dem vollständigen Hypergraphen $K_{r,(r-1)k+1}$ durch beliebiges Anwenden der drei Operationen (1), (2) und (3) entsteht, ist nicht k -färbbar.*

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Der vollständige Hypergraph $K_{r,(r-1)k+1}$ ist nach Lemma 9.4 nicht k -färbbar. Im Induktionsschluß ist nun nur noch zu zeigen, daß aus nicht k -färbbaren r -uniformen Hypergraphen beim Anwenden der drei Operationen wieder nicht k -färbbare r -uniforme Hypergraphen entstehen:

- *Hinzufügen*

Ein Hypergraph H ist nicht färbbar, wenn er einen nicht färbbaren Subgraphen H' enthält. Anderenfalls müßte H' färbbar sein, wenn auch H färbbar ist. (Die Färbung χ , die H färbt, färbt sofort auch H' korrekt.) Ist H nun aus H' durch Hinzufügen beliebiger Knoten oder Kanten entstanden, so enthält H den Subgraphen H' . Da H' nicht k -färbbar ist, kann auch H nicht k -färbbar sein.

- *Verschmelzen*

Es seien $H_1 = (V_1, E_1)$ und $H_2 = (V_2, E_2)$ die nicht k -färbbaren Hypergraphen, die zu dem Hypergraphen $H = (V, E)$ verschmolzen werden. Dabei werden $x \in V_1$ und $y \in V_2$ zu $z \in V$ verschmolzen und die beiden Kanten $e_1 \in E_1$ und $e_2 \in E_2$ entfernt sowie die neue Kante $e \in E$ gebildet. Dieser Verschmelzungsvorgang besteht aus einzelnen Teiloperationen. Mit jeder dieser Operation entsteht ein neuer Hypergraph. Betrachtet man die Folge der hier entstehenden Hypergraphen, so vereinfacht sich die Analyse.

$H'_1 = (V_1, E'_1)$ und $H'_2 = (V_2, E'_2)$ mit $E'_i = E_i \setminus \{e_i\}$ seien die Hypergraphen, die entstehen, wenn die Kanten e_1 und e_2 in H_1 bzw. H_2 entfernt werden. H' sei der Hypergraph, der entsteht, wenn die Kanten e_1 und e_2 entfernt und die Knoten x und y zu z verschmolzen werden, aber die Kante e noch nicht hinzugefügt wird. Der Prozeß des Verschmelzens von H_1 und H_2 zu H kann nun über H'_1 , H'_2 und H' Schritt für Schritt verfolgt werden. Dieser Vorgang wird noch einmal schematisch in der Abbildung 2 dargestellt. Es werden jetzt zwei Fälle unterschieden:

Fall 1:

Mindestens eine der Kanten e_1 und e_2 ist nicht kritisch. O. b. d. A. sei dies die Kante e_1 . Damit ist der Hypergraph $H'_1 = (V_1, E_1 \setminus \{e_1\})$ (H_1 ohne die Kante e_1) nicht

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

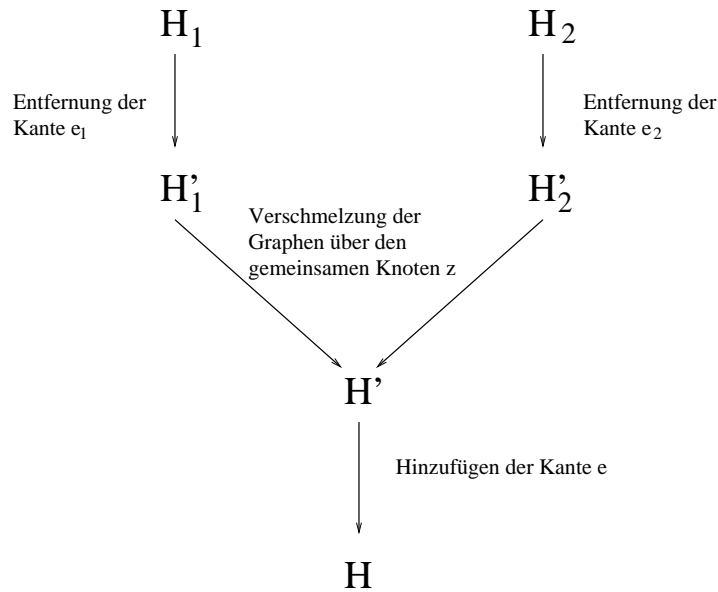


Abbildung 2: Schrittweises Verschmelzen der Hypergraphen H_1 und H_2 zu H

k -färbbar. Auf Grund der Konstruktion ist aber H'_1 ein Subgraph von H . Damit ist auch H nicht k -färbbar.

Fall 2:

Die beiden Kanten e_1 und e_2 sind kritische Kanten. Damit sind die Hypergraphen H'_1 und H'_2 k -färbbar. Hieraus folgt aber, daß auch der Hypergraph H' färbbar ist: Seien χ_1 und χ_2 Färbungen, die H'_1 bzw. H'_2 korrekt färben. Durch Permutieren der Farben läßt sich zu einer Färbung χ_1 eine solche Färbung χ_2 finden, so daß die Knoten x aus H_1 und y aus H_2 gleich gefärbt sind, also $\chi_1(x) = \chi_2(y)$ gilt. Diese beiden Färbungen ergeben offensichtlich nur in diesem Fall die korrekte Färbung

$$\chi(v) = \begin{cases} \chi_1(v), & \text{wenn } v \in V_1 \\ \chi_2(v), & \text{wenn } v \in V_2 \end{cases} \text{ für } H', \text{ da zwischen den beiden Teilgraphen } H'_1$$

und H'_2 keine Kanten verlaufen und bei den beiden Färbungen χ_1 und χ_2 der gemeinsame Knoten v mit der selben Farbe gefärbt ist.

Der Hypergraph H entsteht nun im letzten Schritt der Verschmelzung durch Hinzufügen der Kante e zum k -färbbaren Hypergraphen H' . Der Hypergraph H kann aber nicht k -färbbar sein: Angenommen, eine Färbung χ färbt korrekt den Hypergraphen H mit k Farben, so muß χ auch den Teilgraphen H' und damit auch die

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

Teilgraphen H'_1 und H'_2 färben. In diesen beiden Hypergraphen fehlen die kritischen Kanten $e_1 = \{x, x_2, \dots, x_r\}$ bzw. $e_2 = \{y, y_2, \dots, y_r\}$. Aus Lemma 9.7 folgt, daß die Knoten x, x_2, \dots, x_r des Teilgraphen H'_1 bzw. die Knoten y, y_2, \dots, y_r alle gleich gefärbt sind. Auf Grund der Verschmelzung von H'_1 und H'_2 zu H' über den Knoten $x = y = z$ müssen nun all diese Knoten mit der selben Farbe belegt sein. Aus r dieser Knoten wurde aber die Kante e gebildet, damit ist diese nicht mehr korrekt gefärbt. Die Annahme, daß der Hypergraph H k -färbbar ist, führt also zu einem Widerspruch.

- *Homomorphe Abbildung*

Sei der Hypergraph $\bar{H} = (\bar{V}, \bar{E})$ das homomorphe Abbild des Hypergraphen $H = (V, E)$, mit der zugehörigen Abbildung $\varphi: V \rightarrow \bar{V}$ bzw. $\bar{v} = \varphi(v)$. Es genügt hier zu zeigen, daß H k -färbbar sein muß, wenn \bar{H} korrekt k -färbbar ist.

Sei $\bar{\chi}$ die korrekte Färbung des Bildes \bar{H} , dann ist $\chi(v) = \bar{\chi}(\bar{v})$ offensichtlich eine korrekte k -Färbung von H , da die Färbung der Knoten einer beliebigen Kante $e = \{x_1, \dots, x_r\}$ genau der (korrekten) Färbung der Knoten der Bildkante $\bar{e} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r\}$ entspricht.

□

Lemma 9.15. *Jeder r -uniforme Hypergraph H , der keinen erhaltbaren Teilgraphen enthält, ist k -färbbar.*

Beweis:

Aus Lemma 9.5 folgt, daß es nur einen nicht k -färbbaren r -uniformen Hypergraphen mit maximal $(r - 1)k + 1$ Knoten gibt. Dabei handelt es sich um den vollständigen r -uniformen Hypergraphen $K_{r, (r-1)k+1}$. Dieser ist natürlich erhaltbar. Es genügt also zu zeigen, daß die Annahme, daß es einen nicht k -färbbaren und nicht erhaltbaren Hypergraphen $H = (V, E)$ mit $|V| > (r - 1)k + 1$ Knoten gibt, zu einem Widerspruch führt. Die schematische Vorgehensweise im Beweis zur Konstruktion des Widerspruches ist in Abbildung 3 dargestellt.

Es sei $H = (V, E)$ mit $|V| > (r - 1)k + 1$ ein r -uniformer nicht k -färbbarer Hypergraph, der keinen erhaltbaren Teilgraphen enthält. Zu diesem Hypergraphen fügt man beliebige Kanten hinzu, solange der Hypergraph keinen erhaltbaren Teilgraphen enthält. Es entsteht ein sogenannter gesättigter Hypergraph $H' = (V, E')$ mit $E \subseteq E'$. Dieses Hinzufügen von Kanten stoppt nach endlich vielen Schritten, da letztlich der vollständige Hypergraph $K_{r, |V|}$ gebildet werden müßte. Dieser enthält aber den (erhaltbaren)

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

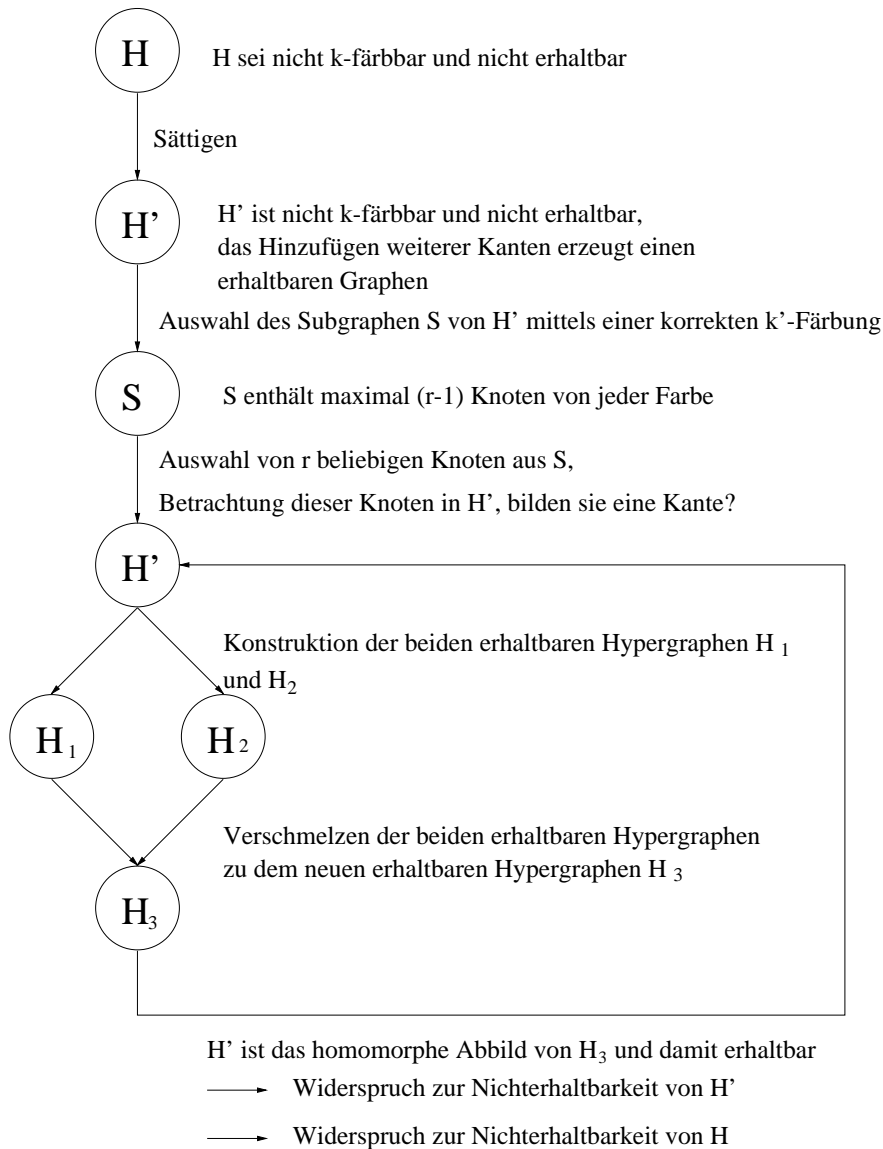


Abbildung 3: Beweisschema für Lemma 9.15 - Konstruktion des Widerspruches

vollständigen Teilgraphen $K_{r,(r-1)k+1}$, so daß das Hinzufügen von Kanten bereits eher stoppen muß.

Der Hypergraph H ist nun ein Teilgraph des ebenfalls nicht k -färbbaren Graphen H' , welcher ebenfalls keinen erhaltbaren Teilgraphen enthält. Kann nun die Existenz eines solchen gesättigten Hypergraphen H' auf einen Widerspruch geführt werden, so gibt es auch den beschriebenen Hypergraphen H nicht.

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

Sei χ eine optimale und maximale Färbung von H' . Diese Färbung χ erzeugt die Partition $V = \bigcup_{1 \leq i \leq k'} V_i$. Es ist $k' > k$ da H' nicht k -färbbar ist. Aus Lemma 9.9 folgt nun $|V_1| \geq \dots \geq |V_k| \geq \dots \geq |V_{k'-1}| \geq (r-1)$ und $|V_{k'}| \geq 1$. D. h. man kann einen Teilhypergraphen $S = (V_S, E_S)$ von H' bilden, indem in V_S je $(r-1)$ beliebige Knoten der Knotenmengen V_1, \dots, V_k sowie einen Knoten aus $V_{k'}$ aufnimmt. In E_S seien die Kanten enthalten, die zwischen den Knoten aus V_S in H' verlaufen. S ist also der Teilhypergraph, den die $(r-1)k+1$ Knoten aus V_S in H' aufspannen.

Im weiteren wird nun gezeigt, daß S der vollständige und damit erhaltbare r -uniforme vollständige Hypergraph $K_{r,(r-1)k+1}$ ist. Dies stellt jedoch einen Widerspruch dazu dar, daß H' keinen erhaltbaren Teilgraphen enthalten soll. Es muß nun also gezeigt werden, daß eine beliebige Menge $e = \{x_1, \dots, x_r\}$ mit $x_i \in V_S$ Kante von S und damit auch Kante von H' ist:

Ein Knoten $x_i \in e$ gehöre zu einer Knotenmenge X_i der Partition $V = \bigcup_{1 \leq j \leq k'} V_j$ von H' . Es ist also $X_i \in \{V_1, \dots, V_{k'}\}$. O. b. d. A. gelte wieder $|X_1| \geq |X_2| \geq \dots \geq |X_r|$. Der Teilhypergraph S wurde so konstruiert, daß sich von jeder Farbe maximal $r-1$ Knoten in S befinden. Betrachtet man nun r verschiedene Knoten aus S , so müssen mindestens zwei der r Knoten verschieden gefärbt sein. Auf Grund der Sortierung dieser Knoten nach den Farben gilt $X_1 \neq X_r$. D. h. die Knoten x_1 und x_r der Menge e sind verschieden gefärbt.

Nun kann man zwei Fälle bezüglich der Größe der Knotenmenge X_1 unterscheiden:

1. *Fall:* $|X_1| \leq (r-1)$

Auf Grund von Lemma 9.10 gilt $e = \{x_1, \dots, x_r\} \in E'$ und damit auch $e \in E_S$. Im Teilhypergraphen S ist also jede mögliche Kante vorhanden. S umfaßt auf Grund der Konstruktion $(r-1)k+1$ Knoten. Damit ist S der vollständige und vor allem der erhaltbare Hypergraph $K_{r,(r-1)k+1}$. Dadurch enthält aber H' einen erhaltbaren Teilhypergraphen, was einen Widerspruch darstellt.

2. *Fall:* $|X_1| \geq r$

Hier wird gezeigt, daß die Annahme, daß $e \notin E'$ und damit $e \notin E_S$ zu einem Widerspruch führt. Die nachfolgende Konstruktion ist exemplarisch in Abbildung 4 am Beispiel von

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

3-uniformen Hypergraphen dargestellt.

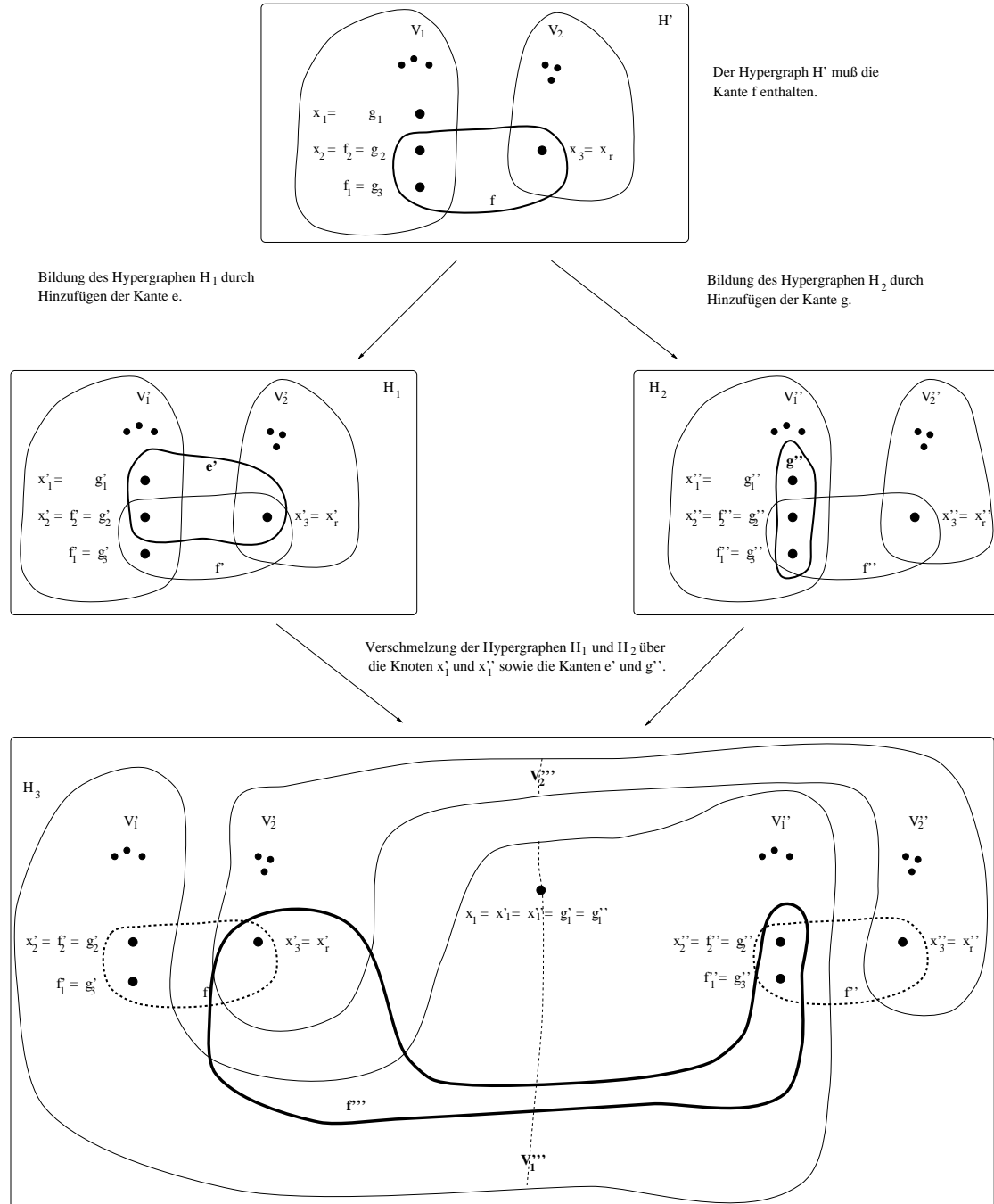


Abbildung 4: Konstruktion von H_3 aus H_1 und H_2 am Beispiel 3-uniformer Hypergraphen in Lemma 9.15 mit $k = 2$

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

In diesem Fall kann nicht einfach gezeigt werden, daß S der vollständige Hypergraph $K_{r,(r-1)k+1}$ ist. Die betrachteten Farbklassen sind größer als im ersten Fall, Lemma 9.10 kann leider nicht zu Einsatz kommen.

Der Beweis verläuft jetzt etwas anders. Die Größe der Farbklassen bzw. die Konstruktion von S liefern jeweils r Knoten, die im Hypergraphen H' keine Kante bilden (im Beweis die Knotenmengen g und e). Hieraus können durch Hinzufügen jeweils einer dieser Kanten neue Hypergraphen H_1 und H_2 gebildet werden. Der Hypergraph H' ist gesättigt, d. h. die Hypergraphen H_1 und H_2 sind erhaltbar. Die beiden Hypergraphen H_1 und H_2 sind in ihrer Struktur fast identisch. Sie unterscheiden sich nur in zwei Kanten. Es liegt also nahe zu untersuchen, ob sich diese beiden Hypergraphen mit der Operation (2) zu einem neuen Hypergraphen H_3 verschmelzen lassen, der wiederum das homomorphe Abbild des ursprünglichen Hypergraphen H' ist. Gelingt diese Konstruktion, so folgt daraus, daß der Hypergraph H' erhaltbar ist, was einen Widerspruch darstellt.

Es sei also $e \notin E'$ und damit auch $e \notin E_S$. Auf Grund von Lemma 9.8 gibt es eine Kante $f = \{f_1, \dots, f_{r-1}, x_r\}$ mit $f_i \in X_1$ in H . Es gilt natürlich $f \neq e$, da $e \notin E'$ gelten soll. Diese Kante f wird für die Verschmelzung der beiden neu zu erzeugenden Hypergraphen nicht benötigt. Bei der Verschmelzung wird aber eine neue Kante hinzukommen. Diese Kante f wird das homomorphe Abbild der neuen Kante werden.

Die Knoten f_1, \dots, f_{r-1} der Kante f liegen in X_1 . Sie sind also mit der gleichen Farbe gefärbt wie der Knoten x_1 . Die Menge X_1 enthält aber laut Voraussetzung mindestens r Knoten. Es muß also in X_1 noch mindestens einen Knoten geben, der nicht in der Kante f enthalten ist. Es ist damit möglich, r Knoten aus X_1 so auszuwählen, daß sie sowohl die Knoten f_1, \dots, f_{r-1} als auch den Knoten x_1 enthalten. Dabei ist es durchaus zulässig, daß $x_1 \in \{f_1, \dots, f_{r-1}\}$ gelten kann. Aus diesen r Knoten wird die Menge $g = \{g_1, \dots, g_r\}$ gebildet. Für die r Knoten dieser Menge g gilt also:

- $g_i \in X_1$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ (bzw. $\chi(g_i) = \chi(x_1)$),
- $x_1 \in g \cap e$ und
- $g \cap f = \{f_1, \dots, f_{r-1}\}$.

O. b. d. A. sei $g_1 = x_1$.

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

Es wurden nun die beiden r -elementigen Knotenmengen e und g bestimmt. Fügt man jeweils eine von ihnen als Kante zu dem gesättigten Hypergraphen H' hinzu, so entstehen die erhaltbaren Hypergraphen $H_1 = (V', E_1)$ und $H_2 = (V'', E_2)$ mit $V' = V'' = V$, $E_1 \cup \{e\}$ und $E_2 = E \cup \{g\}$.

Durch diese Konstruktion entstehen zwei neue Hypergraphen mit neuen, verschiedenen Knotenmengen. Diese wurden aus der ersten ursprünglichen Knotenmenge V gebildet. Für die Konstruktion der homomorphen Abbildung ist es notwendig, den Weg eines Knotens durch die verschiedenen Graphen zu verfolgen. Wenn also $v \in V$ ein Knoten des Hypergraphen H' ist, so seien $v' \in V'$ bzw. $v'' \in V''$ die entsprechenden Knoten der Hypergraphen H_1 und H_2 . Analog verfährt man mit den Kanten. Ist $h = \{x_1, \dots, x_r\} \in E$ eine Kante aus H' , so finden sich in H_1 und H_2 die zugehörigen Kanten $h' = \{x'_1, \dots, x'_r\} \in E_1$ bzw. $h'' = \{x''_1, \dots, x''_r\} \in E_2$.

Die beiden Hypergraphen H_1 und H_2 sind erhaltbar, da H' gesättigt ist. Nun verschmilzt man die beiden Graphen H_1 und H_2 mit der Operation (2) zu dem erhaltbaren Hypergraphen $H_3 = (V''', E_3)$. Dabei werde in H_1 die Kante e' (ursprünglich in H' die Kante e) und in H_2 die Kante g'' (ursprünglich Kante g in H') entfernt. Es ist also $e' = \{x'_1, \dots, x'_r\} \in E_1$ und $g'' = \{g''_1, \dots, g''_{r-1}\} \in E_2$. Für g gilt natürlich noch $x''_1 = g''_1$ und $\{f''_1, \dots, f''_{r-1}\} \subset g$.

Die beiden Knoten x'_1 und x''_1 werden identifiziert und zu dem neuen Knoten $x_1 \in V'''$ verschmolzen. Es ist also $V' \cap V'' = \{x_1\}$. Aus den Knoten von e' und g'' bildet man nun

$$\text{die neue Kante } f''' = \left\{ \underbrace{f''_1, \dots, f''_{r-1}}_{\text{aus } H_2}, \underbrace{x'_r}_{\text{aus } H_1} \right\}.$$

Auf Grund dieser Verschmelzung ist nun H' das homomorphe Abbild des erhaltbaren Hypergraphen H_3 . Die beiden Hypergraphen H_1 und H_2 sind fast identisch. Bis auf die Kanten e' bzw. g'' sind die Relationen der Knoten der Hypergraphen H' , H_1 und H_2 untereinander bezüglich der Zugehörigkeit in Kanten gleich, so daß für diesen Fall leicht eine Abbildung angegeben werden kann. Selbst die beiden Knoten x'_1 und x''_1 werden zu dem ursprünglichen Knoten x_1 verschmolzen. Die Knotenmengen e und g bilden in H' keine Kante. Bei der Verschmelzung werden aber die Kanten e' und g'' entfernt, so daß auch hier die Angabe einer Abbildung möglich ist. Lediglich die neue Kante $f''' = \{f''_1, \dots, f''_{r-1}, x'_r\}$ muß genauer untersucht werden. Hier kann aber sofort die Kante $f = \{f_1, \dots, f_{r-1}, x_r\}$ als entsprechende Bildkante genutzt werden.

9 Hajós-Konstruktion für Hypergraphen

Mit dieser Betrachtung kann die homomorphe Abbildung $\varphi: V_3 \rightarrow V$ genau angegeben werden:

$$\varphi(v) = \begin{cases} x & \text{für } v \neq x_1 \text{ und } v = x' \in V' \\ x & \text{für } v \neq x_1 \text{ und } v = x'' \in V'' \\ x_1 & \text{für } v = x_1 \end{cases} .$$

H' ist das homomorphe Abbild des erhaltbaren Hypergraphen H_3 und damit ebenfalls erhaltbar. Dies stellt einen Widerspruch zur ursprünglich angenommenen Nichterhaltbarkeit von H' dar. Es kann also diesen gesättigten, nicht k -färbbaren und nicht erhaltbaren Hypergraphen H' nicht geben. Damit ist aber der Hypergraph H erhaltbar und somit auch konstruierbar.

Der Teilhypergraph S wurde jetzt nicht mehr benötigt, um den Beweis abzuschließen. An dieser Stelle kann man aber auch argumentieren, daß in S jede Kante vorhanden sein muß, da die Annahme $e \notin E_S$ zu einem Widerspruch geführt hat. Damit ist aber wiederum S der (erhaltbare) vollständige r -uniforme Hypergraph $K_{r,(r-1)k+1}$. \square

Für den Nachweis der Nicht- k -Färbbarkeit eines Hypergraphen genügt das Vorhandensein eines erhaltbaren Teilgraphen. D. h. die Beweise können auf die Operationen 2 (Verschmelzen) und 3 (Homomorphe Abbildung) beschränkt werden. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, daß die Möglichkeit der Operation 1 (Beliebiges Hinzufügen von Knoten oder Kanten) kürzere Beweise liefern kann. Als Länge des Beweises wird die Anzahl der durchgeführten Operationen gezählt.

Die Konstruktion nicht k -färbbarer (einfacher) Graphen wird in [Haj61] vorgestellt. Eine Variante für Hypergraphen mit der chromatischen Zahl ≥ 3 findet sich in [Ben78] und wurde in [Ben83] in der Konstruktion und im Beweis verbessert sowie für alle Farben, d. h. für alle Hypergraphen mit der chromatischen Zahl ≥ 2 , angepaßt.

Die Konstruktionsschritte sowie der Anfang des Beweises sind bei allen Konstruktionsverfahren identisch. Man sieht im Falle von Graphen bzw. Hypergraphen sofort, daß die drei verwendeten Operationen immer wieder nicht färbbare Graphen erzeugen. Ebenfalls wird immer die Idee aufgegriffen, einen (nicht konstruierbaren, nicht färbbaren und) gesättigten Graphen zu verwenden, um die Vollständigkeit der Konstruktion zu beweisen. In [Haj61] und [Ben83] gelingt dies insofern einfach, da hier Knoten in Re-

lation gebracht werden, die nicht mit einer Kante verbunden sind. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, die Klassen entsprechen den Farben. Betrachtet man nun einen gesättigten nicht k -färbbaren Graphen, so zerfällt dieser in $k' > k$ Äquivalenzklassen. Ein jeder Knoten einer solchen Klasse muß mit allen Knoten der anderen Klassen verbunden sein (d. h. er steht mit diesen Knoten nicht in Relation). Sowohl für Graphen als auch für Hypergraphen wird dann gezeigt, daß der vollständige (Hyper-) Graph als Subgraph enthalten sein muß.

Das hier beschriebene Verfahren unterscheidet sich vom Verfahren in [Ben83] dadurch, das r -uniforme Hypergraphen während des gesamten Konstruktionsprozesses verwendet werden. Dabei sollte es aber nicht als Spezialfall dieses Verfahrens angesehen werden, da dieses bereits mit einem vollständigen (und nicht r -uniformen) Hypergraphen startet. Es ist gleichfalls eine Verallgemeinerung der ursprünglichen Hajós-Konstruktion aus [Haj61].

Auf Grund der Verwendung von r -uniformen Hypergraphen führte der Versuch einer analogen Definition einer Äquivalenzrelation der Nichtverbundenheit nicht zum gewünschten Erfolg. Es ist daher eine elementarere Analyse an den Hypergraphen erforderlich, was sich vor allem im 2. Fall des Lemmas 9.15 widerspiegelt. Der vollständige (hier aber r -uniforme) Hypergraph spielt wiederum eine wichtige Rolle im Beweis.

10 Anhang

Hier im Anhang befinden sich einige wichtige Sätze, Ungleichungen und Abschätzungen, die entweder allgemein bekannt sind oder deren Herleitung besser hierher paßt. Viele mathematische Sachverhalte können in [BS91] und [GZZZ95] nachgeschlagen werden. Eine gute Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre erhält man in [Shi89]. Das Standardwerk für zufällige Graphen ist neben [Pal85] und [ASE92] natürlich [Bol85]. Die wichtigsten Ungleichungen sind in [HLP52] zu finden.

10.1 Stirlingsche Formel

Man benötigt häufig eine Abschätzung für die Fakultät. Als erste Abschätzung findet man sofort:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\binom{n}{2}} \leq n! \leq n^n . \quad (203)$$

10 Anhang

Eine genauere Abschätzung liefert die Stirlingsche Formel (vgl. z. B. Gleichung 4 auf Seite 4 in [Bol85]):

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \quad \text{bzw.} \quad (204)$$

$$n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{1/12n} \quad \text{und} \quad (205)$$

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{1/(12n+1)}. \quad (206)$$

10.2 Binomialkoeffizienten

Lemma 10.1. *Sind N , M , und $k \in \mathbb{N}$ mit $N \geq M$, $N > k$ und $M + k \neq 0$, so gilt*

$$\left(\frac{M-k}{N-k}\right)^k \leq \frac{\binom{M}{k}}{\binom{N}{k}} \leq \left(\frac{M}{N}\right)^k.$$

Aus der Bedingung $N > k$ folgt natürlich auch $\left(\frac{M-k}{N-k}\right)^k \leq \frac{\binom{M}{k}}{\binom{N}{k}}$. Die Einschränkung $M + k \neq 0$ ist sinnvoll, damit Ausdrücke der Art 0^0 vermieden werden.

Beweis:

$$1. \quad \frac{\binom{M}{k}}{\binom{N}{k}} \leq \left(\frac{M}{N}\right)^k :$$

Zunächst stellt man fest, daß das Lemma für die trivialen Fälle $k = 0$, $M > 0$ bzw. $k > 0$, $M < k$ gilt. Sei also im weiteren $M > k > 0$.

Sei $i \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl mit $i < k$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} M &\leq N \\ N \cdot M - i \cdot M &\geq N \cdot M - i \cdot N \\ \frac{M}{N} &\geq \frac{M-i}{N-i}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung muß für alle i mit $0 \leq i \leq k$ gelten. Da beide Seiten der Ungleichung nichtnegativ sind, erhält man:

$$\prod_{i=0}^{k-1} \frac{M}{N} \geq \prod_{i=0}^{k-1} \frac{M-i}{N-i}$$

10 Anhang

$$\begin{aligned}\left(\frac{M}{N}\right)^k &\geq \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (M-i)/k!}{\prod_{i=0}^{k-1} (N-i)/k!} \\ \left(\frac{M}{N}\right)^k &\geq \frac{\binom{M}{k}}{\binom{N}{k}}.\end{aligned}$$

2. $\left(\frac{M-k}{N-k}\right)^k \leq \frac{\binom{M}{k}}{\binom{N}{k}}$:

Der Beweis dieser Ungleichung erfolgt analog zur ersten:

$$\begin{aligned}N &\geq M \\ k-i &\geq 0 \\ \implies N \cdot (k-i) &\geq M \cdot (k-i) \\ Nk + Mi &\geq Ni + kM \\ NM - Ni - kM + ki &\geq NM - Nk - Mi + ik \\ (N-k)(M-i) &\geq (N-i)(M-k) \\ \frac{M-i}{N-i} &\geq \frac{M-k}{N-k}.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist auf Grund $N \geq M > k$ nichtnegativ. Aus der Bildung des Produktes über alle i folgt wie in der ersten Ungleichung die Behauptung.

10.3 Exponentialfunktion

Eine häufig verwendete Ungleichung ist

$$1 + x \leq e^x \tag{207}$$

für alle reellen x .

10.4 Siebformeln

Es seien A und B zwei Ereignisse. Dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A oder B aus der Siebformel:

$$\text{Prob}[A \cup B] = \text{Prob}[A] + \text{Prob}[B] - \text{Prob}[A \cap B]. \tag{208}$$

Die Siebformel kann Schritt für Schritt auf n Ereignisse A_1 bis A_n erweitert werden. Beachtet man nicht das gemeinsame Auftreten zweier Ereignisse, so erhält man als erste Abschätzung die Boole-Ungleichung:

$$\text{Prob} \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] \leq \sum_{i=1}^n \text{Prob} [A_i] \quad (209)$$

bzw. nach Anwendung der de-Morganschen-Regeln:

$$\text{Prob} \left[\bigcap_{i=1}^n A_i \right] \geq 1 - \sum_{i=1}^n (1 - \text{Prob} [A_i]) \quad (210)$$

Betrachtet man die Siebformel 208 genauer, so kann man induktiv die Bonferroni-Ungleichung zeigen:

$$\text{Prob} \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] \geq \sum_{i=1}^n \text{Prob} [A_i] - \sum_{1 \leq i < k \leq n} \text{Prob} [A_i \cap A_k] . \quad (211)$$

Man betrachtet oft Zufallsexperimente, in denen n Ereignisse A_i vollständig unabhängig voneinander sind. Hier gilt $\text{Prob} [\bigcap_{i=1}^r A_{j_i}] = \prod_{i=1}^r \text{Prob} [A_{j_i}]$ für beliebige r (verschiedene) Ereignisse A_{j_1}, \dots, A_{j_r} . Die Siebformeln liefern hier:

$$\text{Prob} \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = 1 - \text{Prob} \left[\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \right] \quad (212)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n \text{Prob} [\overline{A_i}] \quad (213)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \text{Prob} [A_i]) . \quad (214)$$

Haben alle Ereignisse A_i die gleiche Wahrscheinlichkeit $\text{Prob} [A_i] = p$, so erhalten wir:

$$\text{Prob} \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = 1 - (1 - p)^n . \quad (215)$$

Die n Ereignisse A_i heißen paarweise unabhängig, wenn für zwei Ereignisse A_i und A_j mit $i \neq j$ $\text{Prob} [A_i \cap A_j] = \text{Prob} [A_i] \cdot \text{Prob} [A_j]$ gilt. Die paarweise Unabhängigkeit der Ereignisse A_i genügt, um aus (209) und (211)

$$np - \binom{n}{2} p^2 \leq \text{Prob} \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] \leq np \quad (216)$$

zu folgern. Ist die Wahrscheinlichkeit p sehr klein, also $np \rightarrow 0$ bzw. $np = o(1)$, so führt dies zu:

$$\text{Prob} \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = np(1 - |o(1)|) . \quad (217)$$

10.5 Markoff-Ungleichung

Es sei X eine nichtnegative Zufallsvariable. Dann gilt für $a > 0$ die Markoff-Ungleichung (siehe [Mar12] Seite 54):

$$\text{Prob} [X \geq a] \leq E[X]/a. \quad (218)$$

10.6 Chernoff-Schranken

Es sei X eine (n, p) -binomialverteilte Zufallsvariable. Diese ist um ihren Erwartungswert $E[X] = np$ konzentriert. Für $\delta > 0$ gelten folgende Ungleichungen (vergl. z. B. [ASE92] oder [HR90]):

$$\text{Prob} [X \geq (1 + \delta) \cdot E[X]] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{(1+\delta)}} \right)^{E[X]} \quad (219)$$

$$\text{Prob} [X \leq (1 - \delta) \cdot E[X]] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{(1-\delta)}} \right)^{E[X]} \quad (220)$$

Gilt zusätzlich $\delta < 1$, so ergeben sich folgende Ungleichungen:

$$\text{Prob} [X \geq (1 + \delta) \cdot E[X]] \leq e^{-\delta^2 \cdot E[X]/3} \quad (221)$$

$$\text{Prob} [X \leq (1 - \delta) \cdot E[X]] \leq e^{-\delta^2 \cdot E[X]/3} \quad (222)$$

$$\text{Prob} [|X - E[X]| \geq \delta \cdot E[X]] \leq 2e^{-\delta^2 \cdot E[X]/3} . \quad (223)$$

10.7 Hoeffding-Schranken

Aus den Chernoff-Schranken ist ersichtlich, daß eine binomialverteilte Zufallsvariable um ihren Erwartungswert konzentriert ist. Diese binomialverteilte Zufallsvariable kann als Summe von n unabhängigen Indikatorzufallsvariablen X_i dargestellt werden. Im allgemeinen Fall sind diese Variablen nicht binomialverteilt und sie können einen beliebigen Wert innerhalb eines Intervalls annehmen. Dabei kann jede dieser voneinander unabhängigen Variablen durch ein anderes Intervall beschränkt sein. Die Konzentration

10 Anhang

der Summe dieser Zufallsvariablen liefert die Hoeffding-Schranke (vgl. z. B. [Hoe63] oder [Hof87], S. 103ff.):

Theorem 10.2. *Es seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen mit $a_i \leq X_i \leq b_i$. Ferner sei $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$, $\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$ und $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i/n$. Dann gilt für alle $t > 0$:*

$$\text{Prob} \left[\bar{X} - \mu > t \right] \leq e^{-\frac{2 \cdot n^2 \cdot t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}} . \quad (224)$$

Auch hier sieht man sofort die scharfe Konzentration um den Erwartungswert. Wir führen n neue Zufallsvariablen $X'_i = -X_i$ ein. Offensichtlich gilt hier für alle Variablen $-b_i \leq X'_i \leq -a_i$. Für die Summe dieser Variablen erhalten wir $\bar{X}' = \sum_{i=1}^n X'_i/n = \sum_{i=1}^n -X_i/n = -\bar{X}$. Aus $X'_i = -X_i$ folgern wir ebenfalls sofort $\mathbb{E}[X'_i] = -\mathbb{E}[X_i]$ bzw. $\mu'_i = -\mu_i$. Dies führt uns zu $\mu' = \sum_{i=1}^n \mu'_i/n = -\mu$. Die neuen Zufallsvariablen X'_i sind ebenfalls wieder voneinander unabhängig und sie sind beschränkt. Das Theorem 10.2 kann wieder angewandt werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left[\bar{X}' - \mu' > t \right] &\leq e^{-\frac{2 \cdot n^2 \cdot t^2}{\sum_{i=1}^n (-a_i + b_i)^2}} \\ \Rightarrow \text{Prob} \left[\mu - \bar{X} > t \right] &\leq e^{-\frac{2 \cdot n^2 \cdot t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}} . \end{aligned} \quad (225)$$

Die Vereinigung der beiden Ungleichungen 224 und 225 liefert:

$$\text{Prob} \left[\left| \bar{X} - \mu \right| > t \right] \leq 2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot n^2 \cdot t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}} . \quad (226)$$

Sind alle X_i durch $0 \leq X_i \leq b$ beschränkt, so vereinfacht sich die Ungleichung 226 zu:

$$\text{Prob} \left[\left| \bar{X} - \mu \right| > t \right] \leq 2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot n \cdot t^2}{b^2}} \quad \text{bzw.} \quad (227)$$

$$\text{Prob} \left[\left| \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \right| > t \cdot n \right] \leq 2 \cdot e^{-\frac{2 \cdot n \cdot t^2}{b^2}} . \quad (228)$$

Sind die X_i unabhängige Indikatorzufallsvariablen mit $\text{Prob}[X_i = 1] = p$, so ergibt sich für $t = \delta \cdot p$ eine weitere Form der Chernoff-Schranken.

10.8 Jensensche Ungleichung

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion sowie x_1, \dots, x_n und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dann gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(x_i) . \quad (229)$$

Wenn dagegen $s = \sum_{i=1}^n x_i$ bekannt ist, so erhält man als Folgerung aus der Jensenschen Ungleichung:

$$n \cdot f\left(\frac{s}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) . \quad (230)$$

10.9 Matrizen

In der vorliegenden Arbeit sind hauptsächlich symmetrische Matrizen von Interesse. Im weiteren sei also $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dabei sei $a_{i,j}$ das Element in Zeile i und Spalte j . Die Matrix \mathbf{A} wird auch Einheitsmatrix \mathbf{I} genannt, wenn die Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich eins und alle anderen Elemente gleich null sind. Ein Element ist hier also gleich dem Kroneckersymbol:

$$a_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 : i = j \\ 0 : i \neq j \end{cases} . \text{ Weiter sei } \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n \text{ ein Spaltenvektor bzw. } \mathfrak{x}^T = (x_1, \dots, x_n) \text{ ein}$$

Zeilenvektor. Das (Standard-) Skalarprodukt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ zweier Vektoren \mathfrak{x} und \mathfrak{y} berechnet sich aus

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

Die Norm $\|\mathfrak{x}\|$ eines Vektors \mathfrak{x} beträgt

$$\|\mathfrak{x}\| = \sqrt{(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})} .$$

Der Vektor \mathbf{o} mit $\mathbf{o}^T = (0, \dots, 0)$ heißt Nullvektor. Analog hierzu heißt $\mathbf{1}$ mit $\mathbf{1}^T = (1, \dots, 1)$ Einsvektor.

Aus den Eigenschaften des Skalarproduktes folgt sofort die Dreiecksungleichung:

$$\|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\| \leq \|\mathfrak{x}\| + \|\mathfrak{y}\| . \quad (231)$$

10 Anhang

Ferner gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\boldsymbol{\eta}\| . \quad (232)$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (233)$$

Existiert für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ eine Zahl λ , so daß

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (234)$$

gilt, so ist \mathbf{x} ein Eigenvektor von \mathbf{A} und λ der zugehörige Eigenwert.

Es bezeichne weiter $\det \mathbf{A}$ die Determinante der Matrix \mathbf{A} sowie

$$\text{Spur } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \quad (235)$$

die Spur von \mathbf{A} , also die Summe der Hauptdiagonalelemente.

Für die uns interessanten symmetrischen Matrizen können die Eigenwerte näher beschrieben werden:

Lemma 10.3. *Wenn \mathbf{A} eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix ist, dann hat sie n reelle Eigenwerte $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.*

Zwischen den Eigenwerten einer symmetrischen Matrix und einem beliebigen Vektor gibt es folgenden interessanten Zusammenhang:

Lemma 10.4. *Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit den n reellen Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ sowie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ ein Vektor. Dann gilt*

$$\lambda_1 \geq \frac{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}}{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \geq \lambda_n .$$

Wenn \mathbf{x} sogar ein Einheitsvektor ist, also $\|\mathbf{x}\| = 1$ gilt, dann vereinfacht sich die Aussage des Lemmas zu $\lambda_1 \geq \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq \lambda_n$.

Ferner finden sich zwischen den Eigenwerten, der Determinante und der Spur einer Matrix folgende wichtige Zusammenhänge:

Lemma 10.5. *Es sei \mathbf{A} eine $(n \times n)$ -Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt*

$$\text{Spur } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{und} \quad \det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i .$$

Für weitere Eigenschaften der Matrizen ist es wichtig zu wissen, ob die (reellen) Eigenwerte einer Matrix sämtlich positiv oder negativ sind.

Definition 10.6 (Positiv und negativ definite Matrizen). *Es sei \mathbf{A} eine symmetrische Matrix. Sind sämtliche Eigenwerte der Matrix positiv (bzw. negativ, nicht positiv oder nicht negativ), so heißt \mathbf{A} positiv definit (bzw. negativ definit, positiv semidefinit oder negativ semidefinit).*

In der Arbeit konzentrieren wir uns auf symmetrische, positiv semidefinite Matrizen. Als erstes hinreichendes und notwendiges Kriterium für positiv semidefinite Matrizen findet man:

Lemma 10.7. *Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn es eine Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so daß*

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}$$

gilt.

Wir haben bereits gesehen, daß ein Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und den Elementen der Hauptdiagonale einer Matrix besteht. Hier kann ebenfalls ein hinreichendes Kriterium für positiv semidefinite Matrizen gefunden werden. Für dieses Kriterium benötigen wir den Begriff der schwachen Diagonaldominanz:

Definition 10.8 (Schwache Diagonaldominanz). *Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt schwach diagonaldominant, wenn für alle Hauptdiagonalelemente $a_{i,i}$*

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$$

gilt.

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen schwacher Diagonaldominanz und positiver Semidefinitheit (vgl. z. B. Lemma 1 in [Lai93]):

Lemma 10.9. *Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, schwach diagonaldominante Matrix, deren Hauptdiagonalelemente sämtlich nichtnegativ sind. Dann ist \mathbf{A} eine positiv semidefinite Matrix.*

Bei der Bestimmung der Anzahl von geschlossenen Wegen in einem Graphen sind die Potenzen der Adjazenzmatrix von Bedeutung. Das nachfolgende Lemma stellt die Verbindung zu den Eigenwerten her:

Lemma 10.10. *Es seien alle c_i für $0 \leq i \leq n$ Konstanten. Ferner sei \mathbf{A} eine $(n \times n)$ -Matrix sowie $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$. Wenn \mathbf{A} den Eigenwert λ hat, dann hat die Matrix $\mathbf{B} = \sum_{i=0}^n c_i \mathbf{A}^i$ den Eigenwert $\sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$.*

Hieraus folgt sofort, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Matrix \mathbf{A}^k den Eigenwert λ^k hat, wenn die Matrix \mathbf{A} den Eigenwert λ hat.

10.10 Der maximale Schnitt (MAXCUT)

Beim Problem MAX- k -CUT ist ein ungerichteter gewichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit $c: E \rightarrow \mathbb{N}$ sowie eine Konstante $k \in \{2, \dots, |V|\}$ gegeben. Gesucht ist nun eine Partition von V in k Knotenmengen $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, so daß die Summe der Gewichte der Kanten zwischen diesen Mengen

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=i+1}^k \sum_{\substack{u \in V_i \\ v \in V_l}} c(\{u, v\})$$

maximal ist. Für $k = 2$ und die konstante Gewichtsfunktion $c(e) = 1$ suchen wir somit einen Schnitt im ungerichteten Graphen, für den die Anzahl an Kanten im Schnitt maximal wird. Hier bezeichnen wir das Problem als MAXCUT. Die Entscheidungsvariante von MAXCUT ist \mathcal{NP} -vollständig [Kar72].

Ein Durchbruch bei der Approximation des maximalen Schnitts wurde in [GW95] erzielt. Dort wird ein Algorithmus vorgestellt, der MAXCUT mit einer Güte $> 0,87856$ approximiert und polynomielle Laufzeit hat. Dieses Ergebnis aus [GW95] fassen wir zusammen in

Lemma 10.11. *Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph sowie $1 > \varepsilon > 0$ eine Konstante. Es existiert ein deterministischer Algorithmus, der das Problem MAXCUT für G in polynomieller Zeit, also in $O(\text{poly}(|V| + |E| + \log(1/\varepsilon)))$ mit einer Güte von $(\alpha - \varepsilon)$ approximiert. Dabei ist $\alpha > 0.87856$.*

Aus diesem Ansatz in [GW95] ergeben sich sofort weitere effiziente Approximationsalgorithmen, beispielsweise für MAXDICUT, MAX-2-SAT und MAXSAT. Weitere effiziente

Literatur

Implementierungen dieser Algorithmen, eingesetzte Rundungstechniken bzw. die Erweiterung auf MAX- k -CUT sind z. B. in [Zwi99], [Fei02], [FJ97] oder [MH95] zu finden (vgl. auch [Aus99] Seite 400).

Literatur

- [AF99] Dimitris Achlioptas und Ehud Friedgut. A Sharp Threshold for k -Colorability. *Random Structures and Algorithms*, 14:63–70, 1999.
- [AM97] Dimitris Achlioptas und Michael Molloy. The Analysis of a List-Coloring Algorithm on a Random Graph (extended abstract). In *Proceedings of the 38th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, Seiten 204–212, 1997.
- [AM99] Dimitris Achlioptas und Michael Molloy. Almost All Graphs with $2.522n$ Edges are not 3-Colorable. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 6:R29, http://www.combinatorics.org/Volume_6/v6i1toc.html, 1999.
- [AM02] Dimitris Achlioptas und Cristopher Moore. The Asymptotic Order of the Random k -SAT Threshold. In *Proceedings of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, Seiten 779–788, 2002.
- [AP03] Dimitris Achlioptas und Yuval Peres. The Threshold for Random k -SAT is $2^k(\ln 2 + o(1))$. In *Proceedings of the 35th ACM Symposium on Theory of Computing*, 2003.
- [ASE92] Noga Alon, Joel H. Spencer und Paul Erdős. *The Probabilistic Method*. John Wiley Sons, Inc., New York Chichester Brisbane Toronto Singapore, 1992.
- [Aus99] Giorgio Ausiello u. a. *Complexity and Approximation*. Springer, 1999.
- [Ben78] Claude Benzaken. Post's Closed Systems and the Weak Chromatic Number of Hypergraphs. *Discrete Mathematics*, 23:77–84, 1978.
- [Ben83] Claude Benzaken. Hajós' Theorem for Hypergraphs. *Annals of Discrete Mathematics*, 17:53–57, 1983.
- [Ber73] Claude Berge. *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [Ber89] Claude Berge. *Hypergraphs*. Elsevier Science Publishing Company, 1989.

Literatur

- [BKPS98] Paul Beame, Richard Karp, Toniann Pitassi und Michael Saks. On the complexity of Unsatisfiability Proofs for Random k -CNF Formulas. In *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Seiten 561–571, 1998.
- [BKV⁺81] Manuel Blum, Richard M. Karp, Oliver Vornberger, Christos H. Papadimitriou und Mihalis Yannakakis. The Complexity of Testing Whether a Graph is a Superconcentrator. *Information Processing Letters*, 13:164–167, 1981.
- [Bol85] Bellá Bollobás. *Random Graphs*. Academic Press, London, 1985.
- [BP96] Paul Beame und Toniann Pitassi. Simplified and Improved Resolution Lower Bounds. In *37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, Seiten 274–282, 1996.
- [BS91] Ilja N. Bronstein und Konstantin A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Verlag Nauka Moskau, Stuttgart Leipzig Moskau, 25. Auflage, 1991.
- [BT88] Samuel R. Buss und György Turán. Resolution Proofs Of Generalized Pigeonhole Principles. *Theoretical Computer Science*, 62:311–317, 1988.
- [CGLS03] Amin Coja-Oghlan, Andreas Goerdt, André Lanka und Frank Schädlich. Certifying Unsatisfiability of Random $2k$ -SAT Formulas using Approximation Techniques. In *Proceedings of the 14th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory, also in Electronic Colloquium on Computational Complexity, TR03-030*, 2003.
- [Chu97] Fan R. K. Chung. *Spectral Graph Theory*. Number 92 in CBMS Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society, 1997.
- [Chv84] Vašek Chvátal. Probabilistic Methods In Graph Theory. *Annals of Operations Research*, 1:171–182, 1984.
- [Chv91] Vašek Chvátal. Almost All Graphs with $1.44n$ Edges are 3-Colourable. *Random Structures and Algorithms*, 2:11 – 28, 1991.
- [Coo71] Stephen A. Cook. The Complexity of Theorem Proving Procedures. In *Proceedings of the 3rd ACM Symposium on the Theory of Computing*, Seiten 151–158, 1971.

Literatur

- [CR76] Jacques Cohen und Martin S. Roth. On the Implementation of Strassen's Fast Multiplication Algorithm. *Acta Informatica*, 6:341–355, 1976.
- [CS88] Vašek Chvátal und Endre Szemerédi. Many Hard Examples for Resolution. *Journal of the Association for Computing Machines*, 4(35):759–768, 1988.
- [CW90] Don Coppersmith und Shmuel Winograd. Matrix Multiplication via Arithmetic Progressions. *Journal of Symbolic Computation*, 9(3):251–280, 1990.
- [DBM00] Olivier Dubois, Yacine Boufkhad und Jacques Mandler. Typical Random 3-SAT Formulae and the Satisfiability Threshold. In *Proceedings of the 11th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Seiten 126–127, 2000.
- [DZ98] Paul E. Dunne und Michele Zito. An Improved Upper Bound on the Non-3-Colourability Threshold. *Information Processing Letters*, 65(1):17–23, 1998.
- [Fei02] Uriel Feige. Relations Between Average Case Complexity and Approximation Complexity. In *Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Seiten 534–543, 2002.
- [FF73] Dmitri Konstantinowitsch Faddejew und Wera Nikolajewna Faddejewa. *Numerische Methoden der linearen Algebra*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 3. Auflage, 1973.
- [FG01] Joel Friedman und Andreas Goerdt. Recognizing More Unsatisfiable Random 3-SAT Instances Efficiently. In *Proceedings of the 28th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, Seiten 310–321, 2001.
- [FGK02] Joel Friedman, Andreas Goerdt und Michael Krivelevich. Recognizing More Unsatisfiable Random k -SAT Instances Efficiently. *Preprint*, <http://www.math.tau.ac.il/~krivelev/SAT.ps>, 2002.
- [FJ97] Alan M. Frieze und Mark Jerrum. Improved Approximation Algorithms for MAX k -CUT and MAX BISECTION. *Algorithmica*, 18(1):67–81, 1997.
- [FK81] Zoltán Füredi und János Komlós. The Eigenvalues of Random Symmetric Matrices. *Combinatorica*, 1(3):233–241, 1981.
- [Fri91] Joel Friedman. On the Second Eigenvalue and Random Walks in Random d -regular Graphs. *Combinatorica*, 11(4):331–362, 1991.

Literatur

- [Fri99] Ehud Friedgut. Necessary and Sufficient Conditions for Sharp Thresholds of Graph Properties, and the k -SAT Problem. *Journal of the American Mathematical Society*, 12:1017–1054, 1999.
- [FS96] Alan M. Frieze und Stephen Suen. Analysis of Two Simple Heuristics on a Random Instance of k -SAT. *Journal of Algorithms*, 20(2):312–355, 1996.
- [Fu95] Xudong Fu. *On the Complexity of Proof Systems*. Dissertation, University of Toronto, 1995.
- [GJ79] Michael R. Garey und David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.
- [GJ02] Andreas Goerdt und Tomasz Jurdzinski. Some Results on Random Unsatisfiable k -SAT Instances and Approximation Algorithms applied to Random Structures. In *Proceedings of the 27th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, Seiten 280–291, 2002.
- [GK01] Andreas Goerdt und Michael Krivelevich. Efficient Recognition of Random Unsatisfiable k -Sat Instances by Spectral Methods. In *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, Seiten 294–304, 2001.
- [Goe92] Andreas Goerdt. A Threshold for Unsatisfiability. In *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, Seiten 264–274, 1992.
- [GW95] Michel X. Goemans und David P. Williamson. Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems using Semidefinite Programming. *Journal of the ACM*, 42:1115–1145, 1995.
- [GZZZ95] Günter Grosche, Dorothea Ziegler, Viktor Ziegler und Eberhard Zeidler, Hrsg. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik Teil 2*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart Leipzig, 7. Auflage, 1995.
- [Haj61] György Hajós. Über eine Konstruktion nicht n -färbbarer Graphen. *Wissenschaftliche Zeitung der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Mathematisch Naturwissenschaftliche Reihe*, 1:116–117, 1961.

Literatur

- [Hak85] Armin Haken. The Intractibility Of Resolution. *Theoretical Computer Science*, 39:297–308, 1985.
- [HLP52] Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood und George Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 1952.
- [Hoe63] Wassily Hoefding. Probability Inequalities for Sums of Bounded Random Variables. *American Statistical Association Journal*, 58:13–50, 1963.
- [Hof87] Micha Hofri. *Probabilistic Analysis of Algorithms*. Springer-Verlag, 1987.
- [HR90] Torben Hagerup und Christine Rüb. A Guided Tour of Chernoff Bounds. *Information Processing Letters*, 33:305–308, 1990.
- [Jan96] Svante Janson. The Second Moment Method, Conditioning and Approximation. *IMA*, 76:175–183, 1996.
- [Kar72] Richard M. Karp. Reducibility among Combinatorial Problems. In Raymond E. Miller und James W. Thatcher, Hrsg., *Complexity of Computer Computations*, Seiten 85–103. Plenum Press, New York, 1972.
- [KKKS98] Lefteris M. Kirousis, Evangelos Kranakis, Danny Krizanc und Yannis C. Stamatiou. Approximating the Unsatisfiability Threshold of Random Formulas. *Random Structures and Algorithms*, 12(3):253–269, 1998.
- [KKL02] Alexis C. Kaporis, Lefteris M. Kirousis und Efthimios G. Lalas. The Probabilistic Analysis of a Greedy Satisfiability Algorithm. In *Proceedings of the 10th European Symposium on Algorithms*, Seiten 574–585, 2002.
- [KKS00] Alexis C. Kaporis, Lefteris M. Kirousis und Yannis C. Stamatiou. A Note on the Non-Colorability Threshold of a Random Graph. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 7(1):R29, 2000.
- [Lai93] Ming-Jun Lai. Some Sufficient Conditions for Convexity of Multivariate Bernstein-Bezier Polynomials and Box Spline Surfaces. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 28:363–374, 1993.
- [Lov73] László Lovász. Coverings and Colorings of Hypergraphs. In *Proceedings of the 4th Southeastern Conference on Combinatorics, Graphs Theory and Computing*, Seiten 3–12, 1973.

Literatur

- [Mar12] Andrei Andrejewitsch Markoff. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1912.
- [MH95] Sanjeev Mahajan und Ramesh Hariharan. Derandomizing Semidefinite Programming based Approximation Algorithms. In *Proceedings of the 36th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, Seiten 162–169, 1995.
- [MR95] Rajeev Motwani und Prabhakar Raghavan. *Randomized Algorithms*. Cambridge University Press, 1995.
- [Pal85] Edgar. M. Palmer. *Graphical Evolution*. Wiley, New York, 1985.
- [Pap94] Christos H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [PU92] Toniann Pitassi und Alasdair Urquhart. The Complexity of the Hajós Calculus. In *Proceedings of the 33rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, Seiten 187–196, 1992.
- [Sch78] Thomas J. Schaefer. The Complexity of Satisfiability Problems. In *Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Seiten 216–226, 1978.
- [Shi89] Albert Nikolaevich Shiryaev. *Probability*. Springer, New York Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 1989.
- [Sor01] Gregory B. Sorkin. Some Notes on Random Satisfiability. In *Proceedings of the 1st Annual International Symposium on Stochastic Algorithms, Foundations and Applications*, Seiten 117–130. Springer, 2001.
- [Str69] Volker Strassen. Gaussian Elimination is not Optimal. *Numerische Mathematik*, 13:354–356, 1969.
- [Zwi99] Uri Zwick. Outward Rotations: A Tool for Rounding Solutions of Semidefinite Programming Relaxations, with Applications to MAX CUT and Other Problems. In *Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Seiten 679–687, 1999.

Thesen

1. Die Eigenwertseparierung der aus der Laplacematrix \mathcal{L} abgeleiteten Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathcal{L}$ ist hinreichend für den Nachweis der geringen Diskrepanz eines einfachen ungerichteten fast d -regulären Multigraphen.
2. In fast d -regulären Multigraphen ist die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix \mathbf{A} äquivalent zur Eigenwertseparierung der Matrix \mathbf{B} .
3. Es existiert ein Polynomialzeitalgorithmus, der die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix eines fast d -regulären Multigraphen nachweist.
4. Die Eigenwertseparierung der Adjazenzmatrix ist hinreichend für den Nachweis der geringen Diskrepanz eines einfachen ungerichteten fast d -regulären Multigraphen.
5. Die geringe Diskrepanz aller Projektions- und Produktgraphen ist hinreichend für den Nachweis der geringen Diskrepanz eines 3-uniformen gerichteten fast d -regulären Hypergraphen.
6. Es existiert ein Polynomialzeitalgorithmus, der die geringe Diskrepanz für fast alle 3-uniformen Hypergraphen mit $C \cdot n^2$ vielen Kanten zertifiziert.
7. Es existiert ein Polynomialzeitalgorithmus, der die Unerfüllbarkeit fast aller unerfüllbarer 4-SAT-Formeln sowie 4-NAESAT-Formeln mit $C \cdot n^2$ Klauseln ($C > 16 \cdot 7, 26$) nachweist.
8. Es existiert ein Polynomialzeitalgorithmus, der die Nicht-2-Färbbarkeit fast aller nicht 2-färbbaren 4-uniformen Hypergraphen mit $C \cdot n^2$ Kanten ($C > 7, 26$) nachweist.
9. Für jeden nicht k -färbbaren r -uniformen Hypergraphen existiert eine Hajos-Konstruktion, welche ausschließlich r -uniforme Hypergraphen verwendet.

Lebenslauf

Persönliche Daten

geboren am 20. November 1971 in Zwickau

Bildungsweg und Grundwehrdienst

09/1978 – 10/1986 Polytechnische Oberschule in Zwickau

09/1986 – 07/1990 Abitur an der Spezialschule „Hans Beimler“ mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung in Karl-Marx-Stadt

09/1990 – 09/1991 Grundwehrdienst bei der NVA und Bundeswehr

10/1991 – 11/1996 Informatikstudium an der TU Chemnitz-Zwickau

Berufstätigkeit

07/1994 – 11/1995 Studentische Hilfskraft bei der Open Soft GmbH Chemnitz

07/1995 – 08/1996 Studentische Hilfskraft bei der Parsytec Eastern Europe Parallele Computer GmbH Chemnitz

08/1996 – 02/1997 Softwareentwickler bei der Parsytec Eastern Europe Parallele Computer GmbH Chemnitz

03/1997 – 09/1997 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur für Theoretische Informatik der TU Chemnitz

seit 10/1997 Wissenschaftlicher Assistent an der Professur für Theoretische Informatik der TU Chemnitz

Zusätzliche Qualifikationen und Preise

1988 15. Chemieolympiade der DDR: 3. Preis

1996 Universitätszertifikat Technikfolgen-Umwelt der TU Chemnitz

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt wurde und die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken in der Arbeit als solche kenntlich gemacht sind.

Ich versichere ebenfalls, daß weitere Personen bei der geistigen Herstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt waren, insbesondere auch nicht die Hilfe eines Promotionsberaters in Anspruch genommen wurde, und daß Dritte von mir weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten haben, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Chemnitz, den 26.09.2003

Frank Schädlich