

Asymptotische Entwicklungen zur Analyse stochastisch erregter Schwingungssysteme

Von der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Chemnitz
genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Dipl.-Math. Hendrik Weiß

geboren am 29.05.1973 in Karl-Marx-Stadt

Eingereicht am 27. Oktober 2005

Verteidigung am 16. März 2006

Gutachter: Prof. Dr. Jürgen vom Scheidt
Prof. Dr. Björn Schmalfuß
Prof. Dr. Ulrich Wöhrle

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 5 |
| 2 | Vorbetrachtungen | 10 |
| 2.1 | Korrelations- und Spektralanalyse | 10 |
| 2.2 | Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung | 12 |
| 2.3 | Asymptotische Entwicklung und Reihendarstellung | 16 |
| 3 | ε-korrelierte Prozesse und Korrelationsmomente | 20 |
| 3.1 | ε -korrelierte Prozesse | 21 |
| 3.2 | Differenzierbare ε -korrelierte Prozesse | 26 |
| 3.3 | B-Spline-Korrelationsfunktion | 30 |
| 4 | Korrelationsfunktion bei glatter Kernfunktion | 39 |
| 4.1 | Entwicklungssatz für die Korrelationsfunktion | 40 |
| 4.2 | Kreuzkorrelationsfunktion von Integralfunktional und Ableitung | 49 |
| 4.3 | Korrelationsfunktion der Ableitung | 56 |
| 4.4 | Konvergenz der Folge der Approximationen | 60 |
| 4.5 | Differentiation der asymptotischen Entwicklung | 68 |
| 5 | Korrelationsfunktion bei stückweise glatter Kernfunktion | 75 |
| 5.1 | Herleitung der Entwicklungssätze | 75 |
| 5.2 | Punktweise asymptotische Entwicklung | 85 |
| 5.3 | Gleichmäßige asymptotische Entwicklung | 87 |
| 5.4 | Vektorwertiger Fall | 89 |
| 5.5 | Konvergenz der Folge der Approximationen | 91 |
| 5.6 | Abschwächung der Voraussetzungen | 92 |

| | |
|--|------------|
| 6 Anwendungen | 93 |
| 6.1 Systeme mit ε -korrelierter Erregung | 93 |
| 6.1.1 Modellierung der Erregung | 93 |
| 6.1.2 Entwicklung der Korrelationsfunktion | 94 |
| 6.1.3 Alternative Bestimmung der Entwicklung | 98 |
| 6.1.4 Berechnung der Entwicklungskoeffizienten | 101 |
| 6.1.5 Beispiel Einmassenschwinger | 103 |
| 6.2 Systeme mit indirekter Erregung | 109 |
| 6.2.1 Formfilter | 112 |
| 6.2.2 Glättung von Integralfunktionalen | 113 |
| 6.2.3 Entwicklungen für glatte Kernfunktionen | 114 |
| 6.2.4 Entwicklungen für stückweise glatte Kernfunktionen | 120 |
| 6.2.5 Beispiel Einmassenschwinger | 122 |
| Literatur | 124 |
| Abkürzungs- und Symbolverzeichnis | 130 |
| Thesen | 133 |

Kapitel 1

Einleitung

Die Analyse, das Design und die Bewertung von physikalischen, technischen und ökonomischen Systemen in einer realistischen Umgebung erfordern oftmals die Berücksichtigung von stochastischen Einflüssen. Zum einen werden Systemparameter als zufällig angesehen, da z. B. Materialeigenschaften aufgrund von Schwankungen beim Herstellungsprozeß nicht im ganzen Gebiet einheitlich ausfallen. Zum anderen unterliegen dynamische Systeme ständigen Einwirkungen, die deterministisch nicht genau beschrieben werden können, da sie nicht vorhersehbar sind.

Mathematische Modelle für eine Vielzahl solcher Probleme sind Differentialgleichungen mit stochastischen Parametern. Typische Anwendungen beschäftigen sich mit Wärmeleitung oder Wellenausbreitung. Im Mittelpunkt dieser Arbeit sollen Gleichungen stehen, die zufällige Schwingungen beschreiben. Beispiele dafür sind Reaktionen von Flugzeugen auf Böen, Grenzschichtturbulenzen und Triebwerkslärm, von Fahrzeugen auf Straßenunebenheiten, von Strukturen auf Erdbeben oder Wind sowie von Offshore-Anlagen auf Wellenschlag.

Für die Behandlung von Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern gibt es grundlegend verschiedene Methoden. Ein Konzept besteht darin, in der deterministischen Problemstellung die entsprechenden Parameter durch zufällige zu ersetzen. Für die realisierungsweisen Lösungen kommen unter Nutzung der Theorie deterministischer Differentialgleichungen die Prinzipien der stochastischen Analysis zur Anwendung, vergleiche hierzu etwa [3, 22, 39]. Auch in der vorliegenden Arbeit soll diese Herangehensweise gewählt werden. Ein anderes Konzept ist durch die Verwendung spezieller stochastischer Integrationsmethoden charakterisiert, die z. B. bei der Behandlung von stochastischen Itô-Differentialgleichungen genutzt werden (siehe z. B. [1, 16, 21]).

Die Berücksichtigung von Zufallseinflüssen in der Differentialgleichung erfordert naturgemäß einen sehr viel höheren Aufwand gegenüber einem deterministischen Modell. In vielen Fällen ist lediglich eine approximative Bestimmung der Lösung beziehungsweise von stochastischen Kenngrößen der Lösung möglich.

Eine zentrale Rolle bei der Modellierung von Zufallseinflüssen spielt im weiteren die Theorie der schwach korrelierten Prozesse. Die zur Charakterisierung von Lösungen verwendeten Methoden basieren dabei auf Arbeiten von J. vom Scheidt und seiner Arbeits-

gruppe. Eine geschlossene Darstellung der Theorie liegt mit der Monographie [26] vor. Das Konzept der schwach korrelierten Prozesse wurde auf eine Vielzahl von zufälligen Gleichungen der mathematischen Physik angewendet. Zum Beispiel befassen sich neben [26] die Arbeiten [17, 18, 24, 27] mit Eigenwertproblemen zufälliger Differentialoperatoren und Matrizen sowie mit stochastischen Randwertproblemen.

Die wesentliche Eigenschaft von schwach korrelierten Prozessen besteht darin, daß sie keine „Fernwirkung“ besitzen. Die Werte eines solchen Prozesses an zwei Punkten sind unkorreliert, wenn der Abstand dieser Punkte die Größe $\varepsilon > 0$, die als Korrelationslänge bezeichnet wird, überschreitet. Ähnliche Zerfalleigenschaften gelten auch für die höheren Momente. Die Grundlage der Theorie bilden asymptotische Entwicklungen von Momenten und Verteilungsdichten linearer und nichtlinearer Funktionale schwach korrelierter Prozesse nach der Korrelationslänge ε . Auf der Basis der Entwicklungen ergeben sich für feste ε analytische Darstellungen oder zumindest Approximationen von stochastischen Charakteristiken dieser Funktionale.

Eine Weiterentwicklung der Theorie der schwach korrelierten Prozesse stellt die Arbeit [41] dar. Das unter anderem vorgestellte Konzept der ε -korrelierten Prozesse, einer speziellen Klasse von schwach korrelierten Prozessen, vereinfacht die asymptotische Entwicklung von zweiten Momenten linearer Integralfunktionale wesentlich und stellt Abschätzungen der Approximationsfehler bereit.

Für die Modellierung von Zufallseinflüssen mittels schwach korrelierter Prozesse existieren im wesentlichen zwei Ansätze. Zum einen wird der Zufallseinfluß selbst als schwach korreliert angesehen und zum anderen als Integralfunktional eines schwach korrelierten Prozesses dargestellt. Betrachtet man etwa eine Fahrbahnoberfläche, so zeigt sich, daß parallele Fahrspuren tatsächlich auf diese Art modelliert werden können, siehe z. B. [28].

Motiviert durch die Resultate in [13, 28, 45, 46] werden in der vorliegenden Arbeit diskrete Schwingungssysteme mit zufälliger Erregung untersucht. Schwingungsmodelle stellen im allgemeinen Randanfangswertprobleme für eine zeit-, orts-, und zufallsabhängige Funktion dar. Durch Diskretisierung bezüglich der Ortskoordinaten entstehen (großdimensionierte) Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Für die Korrelations- und Spektralanalyse sowohl von linearen als auch von nichtlinearen Systemen existieren eine Reihe von Verfahren. Viele Methoden zur Behandlung von Differentialgleichungssystemen mit kleinen Nichtlinearitäten basieren dabei wiederum auf dem linearen Fall, wie zum Beispiel Störungsmethoden, siehe etwa [28, 40].

In dieser Arbeit werden lineare Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\sum_{l=0}^r A_l x^{(l)}(t, \omega) = \sum_{k=0}^p \tilde{P}_k f^{(k)}(t, \omega)$$

für einen vektoriellen Zufallsprozeß $x(t, \omega)$ mit zufälligem inhomogenem Term betrachtet. Die Matrizen A_0, \dots, A_r und $\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_p$ seien konstant und deterministisch, der vektorielle Zufallsprozeß $f(t, \omega)$ sei schwach stationär.

Im zweiten Kapitel werden zunächst die Grundlagen der Korrelationsanalyse für Systeme

$$\dot{z}(t, \omega) = Az(t, \omega) + g(t, \omega)$$

erster Ordnung zusammengefaßt. Da sich Systeme höherer Ordnung ebenfalls in diese Gestalt überführen lassen, ergeben sich verschiedene Vorgehensweisen bei der Bestimmung der Korrelationsfunktion der Ableitungen $x^{(l)}(t, \omega)$, $l = 0, \dots, p$ der Lösung des Ausgangsproblems. In einem weiteren Abschnitt wird ein Überblick über die Methode der asymptotischen Entwicklung gegeben.

Auf der Basis ihrer Definition werden im dritten Kapitel einige Annahmen für Familien $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon>0}$ von ε -korrelierten Prozessen getroffen, die später zur asymptotischen Entwicklung der Korrelationsfunktion von Integralfunktionalen für $\varepsilon \rightarrow 0$ notwendig sind. Die weitreichendste Forderung ist, daß die Korrelationsfunktionen einer Familie $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon>0}$ durch die Korrelationsfunktion des 1-korrelierten Prozesses generiert werden. Damit läßt sich die gesamte Familie $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon>0}$ anhand einer Korrelationsfunktion charakterisieren. Zentrale Kenngrößen sind die von der Korrelationslänge unabhängigen Korrelationsmomente. Für die Anwendung der klassischen Entwicklungssätze (siehe z. B. [26, 27]) ist lediglich deren Kenntnis nötig. Die in dieser Arbeit vorgestellten Entwicklungen machen die Betrachtung sogenannter Korrekturterme von Korrelationsmomenten erforderlich. Diese Funktionen lassen sich aus der generierenden Korrelationsfunktion berechnen. Für eine Reihe von Korrelationsfunktionen werden die Spektraldichte, die Korrelationsmomente und die Korrekturterme angegeben.

Eine Modellierung der Erregung durch ε -korrelierte Prozesse erfordert die Untersuchung von differenzierbaren ε -korrelierten Prozessen. Neben Eigenschaften von Korrekturtermen solcher Prozesse werden Methoden zur Konstruktion von Korrelationsfunktionen angegeben. Die aus der Literatur [24, 27, 41] bekannten rekursiven Verfahren erweisen sich für höhere Differenzierbarkeit als recht aufwendig. Dagegen sind die in dieser Arbeit vorgestellten B-Spline-Korrelationsfunktionen stückweise polynomiale Funktionen, für die eine einfache explizite Darstellung existiert.

Im Mittelpunkt des vierten und fünften Kapitels steht die Entwicklung der Korrelationsfunktion von Integralfunktionalen des Typs

$$x(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q(t-s) {}^\varepsilon f(s, \omega) ds$$

mit einer deterministischen Kernfunktion $Q(t)$ und einem vektorwertigen ε -korrelierten Zufallsprozeß ${}^\varepsilon f(t, \omega)$. Bei der Untersuchung von Schwingungsmodellen ist es außerdem notwendig, neben Integralfunktionalen $x(t, \omega)$ auch deren Ableitung

$$\dot{x}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q'(t-s) {}^\varepsilon f(s, \omega) ds + Q(0) {}^\varepsilon f(t, \omega)$$

zu betrachten. Diese hat eine zu $x(t, \omega)$ grundsätzlich verschiedene Struktur, wenn der Term $Q(0) {}^\varepsilon f(t, \omega)$ aufgrund der Eigenschaft $Q(0) \neq 0$ nicht verschwindet.

Aufbauend auf den Ergebnissen in [41] gelingt es im vierten Kapitel für den Fall einer hinreichend glatten Kernfunktion $Q(t)$, asymptotische Entwicklungen nicht nur für

die Korrelationsfunktion $R_{xx}(\tau) = \mathbf{E} \{x(t)x^*(t + \tau)\}$, sondern auch für die Korrelationsfunktion $R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)$ der Ableitung des Integralfunctionals sowie für die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{x\dot{x}}(\tau)$ herzuleiten. Dabei wird stets unterschieden, ob eine Entwicklung $R(\tau) = {}^N R(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$ der Ordnung N für $\varepsilon \rightarrow 0$ lediglich punktweise oder sogar gleichmäßig bezüglich τ gilt. Die Abhängigkeit der Korrelationsfunktion von ε wird bei dieser vereinfachten Schreibweise nicht angezeigt. Während die punktweise Entwicklung eine Potenzreihe in ε darstellt, ist eine solche einfache Struktur für die gleichmäßige Entwicklung nicht zu erreichen. Für feste Korrelationslänge ε dienen die Entwicklungen als Approximationen der Korrelationsfunktionen. Der Vorteil der gleichmäßigen Entwicklung liegt unter anderem darin, daß die Approximationen stetige Funktionen sind. Außerdem können sowohl analytische Darstellungen als auch Abschätzungen der Restglieder angegeben werden. Das ermöglicht es, die Güte einer Approximation nicht nur asymptotisch für $\varepsilon \rightarrow 0$ zu bewerten, sondern auch bei festem ε Fehlerschranken anzugeben.

An einem Beispiel wird deutlich, daß für die Korrelationsfunktion der Ableitung eine Approximation entsprechend der punktweisen Entwicklung nicht immer empfehlenswert ist.

Falls asymptotische Entwicklungen beliebiger Ordnung $N = 0, 1, 2, \dots$ existieren und die Folge der Approximationen ${}^N R(\tau)$ für festes ε und $N \rightarrow \infty$ konvergiert, muß der Grenzwert nicht mit der Funktion $R(\tau)$ übereinstimmen. Es wird eine hinreichende Bedingung an die Kernfunktion $Q(t)$ angegeben, die für jedes feste $\varepsilon > 0$ eine Konvergenz der Folge der gleichmäßigen Approximationen ${}^N R(\tau)$ gegen die exakte Korrelationsfunktion $R(\tau)$ für $N \rightarrow \infty$ garantiert. Die asymptotische Entwicklung ist dann für feste $\varepsilon > 0$ eine bezüglich τ gleichmäßig konvergente Reihendarstellung der Korrelationsfunktion. An einem Beispiel wird gezeigt, wie sich die exakten Korrelationsfunktionen als Grenzwert der Approximationen berechnen lassen. Somit besteht die Möglichkeit, die Approximationen verschiedener Ordnungen mit dem Grenzfall zu vergleichen.

Eine Eigenschaft von differenzierbaren Prozessen ist es, daß sich die Korrelationsfunktion der Ableitung des Prozesses durch Differenzieren der Korrelationsfunktion des Prozesses ermitteln läßt. Diese Eigenschaft überträgt sich in gewisser Weise auch auf die asymptotischen Entwicklungen der Korrelationsfunktionen.

Das fünfte Kapitel ist Integralfunctionalen mit stückweise glatter Kernfunktion $Q(t)$ gewidmet. Dieser Fall ist insbesondere für die Analyse von Fahrzeugschwingungen von Bedeutung. Bei statistischen Auswertungen hat sich gezeigt, daß Integralfunctionale mit bestimmten stückweise definierten Kernfunktionen besonders gut zur Modellierung der bereits oben genannten Straßenprofile geeignet sind. Wie später im Kapitel 6 ersichtlich wird, haben die Lösungen des Schwingungssystems dann ebenfalls eine Darstellung mit stückweise definierter Kernfunktion.

Die Herangehensweise im vierten Kapitel beruht auf der Taylorentwicklung der Kernfunktion $Q(t)$. Diese ist im Fall stückweise definierter Kernfunktionen nicht anwendbar. Durch eine stückweise Betrachtung der Korrelationsfunktion gelingt es jedoch, eine gleichmäßige asymptotische Entwicklung auf ganz \mathbb{R} herzuleiten, so daß die dadurch definierten Approximationen stetige Funktionen sind. Eine Beschränkung der Korre-

tionslänge ε ermöglicht noch Vereinfachungen in der Darstellung. Außerdem wird die punktweise gültige Entwicklung in eine Potenzreihe angegeben. Bei den sich anschließenden Betrachtungen zur Konvergenz der Folge der Approximationen zeigt sich, daß die für glatte Kernfunktionen formulierte Bedingung wiederum hinreichend ist.

Alle Entwicklungssätze im vierten und fünften Kapitel sind so formuliert, daß die gestellten Voraussetzungen an die Kernfunktionen Entwicklungen mit einer Fehlerordnung vom Typ $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$ ermöglichen. Für die schwächere Aussage $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$ sind auch schwächere Forderungen an die Kernfunktionen zu stellen. Die Entwicklungssätze in der abgeschwächten Formulierung werden zusammengefaßt im letzten Abschnitt des fünften Kapitels angegeben.

Im sechsten Kapitel werden nun Systeme mit direkter ε -korrelierter Erregung sowie indirekter Erregung durch Integralfunktionale betrachtet. Entsprechend dieser Unterscheidung ist das Kapitel gegliedert. Bei der Modellierung durch differenzierbare ε -korrelierte Prozesse treten in der Lösung auch Integralfunktionale von Ableitungen dieser Prozesse auf. Eine wesentliche Voraussetzung der in [26] beschriebenen Entwicklungssätze war die gleichmäßige Beschränktheit der Korrelationsfunktion des eingehenden (dort als schwach korreliert vorausgesetzten) Prozesses bezüglich ε . Diese Bedingung ist bei der Betrachtung von Ableitungen ε -korrelierter Prozesse nicht erfüllt, im Gegenteil ist sogar die Angabe der genauen Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2p})$ der Korrelationsfunktion der p -ten Ableitung $\varepsilon f^{(p)}(t, \omega)$ nötig.

Im weiteren Verlauf wird für Systeme 1. Ordnung gezeigt, daß die Entwicklungen der Korrelationsfunktion der Lösung und der Ableitung für beliebige Ordnungen N existieren und die Folge der Approximationen konvergieren. Durch die Berücksichtigung verschiedener Lösungsdarstellungen kommen asymptotischen Entwicklungen zustande, die sich augenscheinlich bezüglich der Ordnung der Korrelationsfunktion unterscheiden. Diese Tatsache stellt jedoch keinen Widerspruch dar und wird unter anderem an einem Beispiel erläutert.

In [13, 26, 28] wurde der Ansatz gewählt, die zufällige Erregung durch sogenannte geglättete Integralfunktionale zu modellieren. Dadurch war die maximal mögliche Ordnung einer Entwicklung der Korrelationsfunktion unter anderem durch die erreichte Glattheit des Erregungsprozesses begrenzt. Auf der Basis der Resultate des fünften Kapitels gelingt es nun, gleichmäßig konvergente Reihendarstellungen der Korrelationsfunktion der Lösung des Systems anzugeben. Anhand von Beispielen werden die Eigenschaften verschiedener Approximationen diskutiert.

Abschließend möchte ich all denen herzlich danken, die am Zustandekommen dieser Arbeit beteiligt waren. An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. J. vom Scheidt für die Motivation zu einem Promotionsvorhaben, die Anregung zu diesem Thema sowie für seine stets freundliche Unterstützung. Weiterhin danke ich allen jetzigen und ehemaligen Chemnitzer Kollegen der Arbeitsgruppen Stochastik, Finanzmathematik und Analysis – Inverse Probleme, die mit ihrer Hilfs- und Diskussionsbereitschaft ebenfalls zum Gelingen beitrugen.

Kapitel 2

Vorbetrachtungen

Zunächst sollen die Grundlagen der Korrelations- und Spektralanalyse zusammengestellt werden. In einem zweiten Abschnitt werden die behandelten Differentialgleichungssysteme spezifiziert und die Besonderheiten bei Systemen höherer Ordnung dargelegt, wenn der inhomogene Term auch Ableitungen der Erregungsfunktion enthält. Im letzten Abschnitt wird besonders auf die verwendeten asymptotischen Entwicklungen eingegangen.

2.1 Korrelations- und Spektralanalyse

In dieser Arbeit bezeichnen Ausdrücke der Form

$$f(t, \omega), g(t, \omega), \dots$$

stochastische (Vektor-) Prozesse auf $\mathbb{R} \times \Omega$ mit Werten in \mathbb{C}^n (oder \mathbb{R}^n), $n \in \mathbb{N}$, wobei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist mit einer geeigneten σ -Algebra \mathcal{A} von Teilmengen aus Ω . Der Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbf{P} wird mit $\mathbf{E}\{\cdot\}$ bezeichnet. Für die betrachteten Prozesse wird stets vorausgesetzt, daß die zweiten Momente existieren.

Die Kreuzkorrelationsfunktion zweier vektorieller Zufallsprozesse $y(t, \omega)$ und $z(t, \omega)$, $t \in \mathbb{R}$ mit Werten in \mathbb{C}^n sei durch

$$R_{yz}(t, s) = \mathbf{E} \{ [y(t) - \mathbf{E} \{y(t)\}] [z(s) - \mathbf{E} \{z(s)\}]^* \}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

definiert. Im Fall stationärer Zufallsprozesse bezeichnet

$$R_{yz}(\tau) = \mathbf{E} \{ [y(t) - \mathbf{E} \{y(t)\}] [z(t + \tau) - \mathbf{E} \{z(t + \tau)\}]^* \}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

die Kreuzkorrelationsfunktion.

Das lineare System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{z}(t, \omega) = Az(t, \omega) + g(t, \omega) \tag{2.1}$$

für einen Zufallsvektor $z(t, \omega)$ habe eine stabile, deterministische Systemmatrix, d. h. alle Eigenwerte von A besitzen einen negativen Realteil. Ist $g(t, \omega)$ ein stationärer, im quadratischen Mittel und f.s. pfadweise stetiger Prozeß, dann existiert nach [7] die eindeutige stationäre Lösung

$$z(t, \omega) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} g(s, \omega) ds$$

im quadratischen Mittel und f.s. pfadweise. Ein Prozeß $z(t, \omega)$ heißt dabei stationäre Lösung des Systems, wenn $z(t, \omega)$ die Differentialgleichung erfüllt, stationär und mit $g(t, \omega)$ stationär verbunden ist, d. h. der Prozeß $\begin{pmatrix} z \\ g \end{pmatrix}$ stationär ist. Im Vergleich zur Lösung

$$\tilde{z}(t, \omega) = e^{A(t-t_0)} \tilde{z}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} g(s, \omega) ds$$

des Anfangswertproblems

$$\dot{\tilde{z}}(t, \omega) = A\tilde{z}(t, \omega) + g(t, \omega), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0$$

beschreibt die stationäre Lösung das Langzeitverhalten bei permanent zugeführter zufälliger Erregung $g(t, \omega)$, also ohne den Einfluß des Anfangszustandes.

Da sich $\mathbf{E}\{z(t)\}$ gerade als stationäre Lösung des deterministischen Problems mit inhomogenem Term $\mathbf{E}\{g(t)\}$ ergibt, ist es für die Korrelationsanalyse des Systemausgangs ausreichend, Systemeingänge mit $\mathbf{E}\{g(t)\} = 0$ zu betrachten.

Die Korrelationsfunktion von $z(t, \omega)$ berechnet sich nach

$$R_{zz}(\tau) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} e^{A(t-u)} R_{gg}(v-u) e^{A(t+\tau-v)*} dv du,$$

die Kenntnis der Korrelationsfunktion $R_{gg}(\cdot)$ des schwach stationären Prozesses $g(t, \omega)$ reicht zur Bestimmung von $R_{zz}(\cdot)$ aus. Die konkrete Berechnung erweist sich jedoch in vielen Fällen als schwieriges Vorhaben. Insbesondere bei großdimensionierten Systemen greift man auf Approximationsverfahren zurück, die zum Beispiel auf Modellreduktion basieren. Beispiele sind die Methoden der modalen Dekomposition und der optimalen Projektion ([34, 46]). Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Funktion $g(t, \omega)$ so zu modellieren, daß die Berechnung vereinfacht wird, z. B. mittels Weißen Rauschens.

In dieser Arbeit wird die Funktion $g(t, \omega)$ unter Verwendung ε -korrelierter Prozesse modelliert. Die Approximationen der Korrelationsfunktion werden durch asymptotische Entwicklungen nach der Korrelationslänge ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ definiert. Die Methoden der Modellreduktion und der asymptotischen Entwicklung können auch kombiniert angewendet werden, siehe z. B. [13, 34, 43, 46]. Im Folgenden soll jedoch die asymptotische Entwicklung im Mittelpunkt stehen.

Bei der Spektralanalyse wird das System im Frequenzbereich untersucht [28, 22, 40]. Die Spektraldichte von $z(t, \omega)$

$$S_{zz}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\tau} R_{zz}(\tau) d\tau$$

berechnet sich nach

$$S_{zz}(\alpha) = H(\alpha)S_{gg}(\alpha)H^*(\alpha)$$

aus der Spektraldichte von $g(t, \omega)$ mit der Übertragungsfunktion des Systems

$$H(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{At} e^{i\alpha t} dt = -(i\alpha I + A)^{-1}.$$

2.2 Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung

Gegenstand der Betrachtungen sei ein lineares Differentialgleichungssystem r -ter Ordnung der Dimension n

$$\sum_{l=0}^r A_l x^{(l)}(t, \omega) = \tilde{g}(t, \omega) \quad (2.2)$$

mit der zufälligen Erregung

$$\tilde{g}(t, \omega) = \sum_{k=0}^p \tilde{P}_k f^{(k)}(t, \omega). \quad (2.3)$$

Dabei sind A_0, \dots, A_r ($n \times n$)-Matrizen, $\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_p$ ($n \times m$)-Matrizen sowie $f(t, \omega)$ und $x(t, \omega)$ vektorielle Zufallsprozesse mit Werten in \mathbb{C}^m bzw. in \mathbb{C}^n . Die Matrix A_r sei invertierbar.

Diskrete oder diskretisierte Schwingungsmodelle sind von dieser Gestalt mit $r = p = 2$ ([11, 14, 20, 28, 40, 46]).

Das System (2.2) läßt sich mittels

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(r-1)} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} O \\ \vdots \\ O \\ I \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} O & I & O & \cdots & O \\ \vdots & O & I & O & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & O & \cdots & O & I \\ -A_r^{-1}A_0 & -A_r^{-1}A_1 & \cdots & -A_r^{-1}A_{r-2} & -A_r^{-1}A_{r-1} \end{pmatrix}$$

in ein lineares System (2.1) der Dimension nr mit Erregung

$$g(t, \omega) = T\tilde{g}(t, \omega) = \sum_{k=0}^p P_k f^{(k)}(t, \omega) \quad (2.4)$$

umwandeln, wobei

$$P_k = T A_r^{-1} \tilde{P}_k$$

gesetzt wird.

Es wird in der Arbeit das Symbol O für Nullvektoren oder Nullmatrizen, das Symbol I für die Einheitsmatrix verwendet. Die Vektor- bzw. Matrixdimension ergibt sich aus dem Zusammenhang.

Bei der Betrachtung von Systemen höherer Ordnung wird immer gefordert, daß die entsprechende Matrix A stabil ist.

Die $(nr \times nr)$ -dimensionale Matrixexponentialfunktion $G(t) = e^{At}$ ist Lösung des matrixwertigen Anfangswertproblems

$$G'(t) = AG(t), \quad G(0) = I$$

(siehe z. B. [2]). Für die $(nr \times n)$ -dimensionale Matrixfunktion

$$Y(t) := G(t)T = e^{At}T$$

gilt

$$Y'(t) = AY(t), \quad Y(0) = T.$$

Sei $\tilde{G}(t)$ der erste $(n \times n)$ -Block der Matrixfunktion $Y(t)$, d. h.

$$\tilde{G}(t) = \tilde{T}Y(t),$$

wenn \tilde{T} eine $(n \times nr)$ -Matrix der Gestalt

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} I & O & \dots & O \end{pmatrix}$$

ist. Die Matrixfunktion $Y(t)$ hat dann aufgrund der speziellen Struktur der Matrix A die Darstellung

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \tilde{G}(t) \\ \tilde{G}'(t) \\ \vdots \\ \tilde{G}^{(r-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrixfunktion $\tilde{G}(t)$ hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(i)}(t) &= \tilde{T}A^i e^{At}T = \tilde{T}A^i Y(t), \quad i = 0, 1, \dots, \\ \tilde{G}^{(i)}(0) &= O, \quad i = 0, \dots, r-2 \quad \text{und} \quad \tilde{G}^{(r-1)}(0) = I. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Übertragungsfunktion $\tilde{H}(\alpha)$ zu $\tilde{G}(t)$ ermittelt man aus

$$\tilde{H}(\alpha) = \int_0^{\infty} \tilde{G}(t) e^{i\alpha t} dt = \int_0^{\infty} \tilde{T} e^{At} T e^{i\alpha t} dt = \tilde{T} H(\alpha) T,$$

wenn die Stabilität der Matrix A vorausgesetzt wird. Die stationären Lösungen

$$z_{i+1}(t, \omega) = x^{(i)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(i)}(t-s) \tilde{g}(s, \omega) ds, \quad i = 0, \dots, r-1$$

sind Integralfunktionale des Prozesses $\tilde{g}(t, \omega)$. Die Ableitung von $x^{(r-1)}(t, \omega)$ hat die Gestalt

$$x^{(r)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(r)}(t-s) \tilde{g}(s, \omega) ds + \tilde{g}(t, \omega).$$

Für die Existenz weiterer Ableitungen von $x(t, \omega)$ müssen Forderungen bezüglich der Differenzierbarkeit von $\tilde{g}(t, \omega)$ gestellt werden.

Mit der konkreten Gestalt (2.3) von $\tilde{g}(t, \omega)$ interessieren nun die Integralfunktionale

$$\sum_{k=0}^p \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(i)}(t-s) \tilde{P}_k f^{(k)}(s, \omega) ds, \quad i = 0, \dots, r.$$

Da die Funktion $\tilde{G}(t)$ beliebig oft differenzierbar ist, bietet die partielle Integration die Möglichkeit, die Integralfunktionale mit Ableitungen $f^{(k)}(t, \omega)$, $k \geq 1$, auf Integralfunktionale von $f(t, \omega)$ zurückzuführen. Man berechnet

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(i)}(t-s) \tilde{P}_k f^{(k)}(s, \omega) ds \\ &= \tilde{G}^{(i)}(t-s) \tilde{P}_k f^{(k-1)}(s, \omega) \Big|_{s=-\infty}^t - \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(i+1)}(t-s) \tilde{P}_k f^{(k-1)}(s, \omega) ds \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \tilde{G}^{(i+j)}(0) \tilde{P}_k f^{(k-j-1)}(t, \omega) + (-1)^k \int_{-\infty}^t \tilde{G}^{(i+k)}(t-s) \tilde{P}_k f(s, \omega) ds. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1 Es sei vereinbart, daß eine Summe den Wert 0 annimmt, falls die obere Summationsgrenze kleiner ist als die untere ($\sum_{j=k}^l \dots = 0$ für $k > l$).

Aufgrund der Eigenschaft (2.5) der Funktion $\tilde{G}(t)$ verschwindet die Summe der Randterme

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \tilde{G}^{(i+j)}(0) \tilde{P}_k f^{(k-j-1)}(t, \omega) &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \tilde{G}^{(k-j+i-1)}(0) \tilde{P}_k f^{(j)}(t, \omega) \\ &= \sum_{j=0}^{k+i-r} (-1)^{k-j-1} \tilde{G}^{(k-j+i-1)}(0) \tilde{P}_k f^{(j)}(t, \omega), \end{aligned}$$

falls $k + i < r$ ist. Insbesondere lassen sich dann die Ableitungen von $x(t, \omega)$ bis zur Ordnung $r - p - 1$ als Integralfunktional von $f(t, \omega)$ darstellen

$$x^{(i)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k \tilde{G}^{(i+k)}(t-s) \tilde{P}_k \right) f(s, \omega) ds, \quad i = 0, \dots, r - p - 1. \quad (2.6)$$

Die Ableitungen höherer Ordnung haben aufgrund von

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^{k+i-r} (-1)^{k-j-1} \tilde{G}^{(k-j+i-1)}(0) \tilde{P}_k f^{(j)}(t, \omega) \\ = \sum_{j=0}^{p+i-r} \left(\sum_{k=r+j-i}^p (-1)^{k-j-1} \tilde{G}^{(k-j+i-1)}(0) \tilde{P}_k \right) f^{(j)}(t, \omega) \\ = \sum_{k=0}^{p+i-r} \left(\sum_{j=r-i}^{p-k} (-1)^{j-1} \tilde{G}^{(j+i-1)}(0) \tilde{P}_{k+j} \right) f^{(k)}(t, \omega) \end{aligned}$$

für $i = r - p, \dots, r - 1$ und

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \left(\sum_{j=0}^{p-k} (-1)^{j-1} \tilde{G}^{(j+r-1)}(0) \tilde{P}_{k+j} \right) f^{(k)}(t, \omega) \\ = \sum_{k=0}^p \left(-\tilde{P}_k + \sum_{j=1}^{p-k} (-1)^{j-1} \tilde{G}^{(j+r-1)}(0) \tilde{P}_{k+j} \right) f^{(k)}(t, \omega) \end{aligned}$$

für $i = r$ die Gestalt

$$\begin{aligned} x^{(i)}(t, \omega) &= \int_{-\infty}^t \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k \tilde{G}^{(i+k)}(t-s) \tilde{P}_k \right) f(s, \omega) ds \\ &+ \sum_{k=0}^{p+i-r} \left(\sum_{j=r-i}^{p-k} (-1)^{j-1} \tilde{G}^{(j+i-1)}(0) \tilde{P}_{k+j} \right) f^{(k)}(t, \omega), \quad i = r - p, \dots, r - 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

und

$$\begin{aligned}
 x^{(r)}(t, \omega) = & \int_{-\infty}^t \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k \tilde{G}^{(r+k)}(t-s) \tilde{P}_k \right) f(s, \omega) ds \\
 & + \sum_{k=0}^p \left(\sum_{j=1}^{p-k} (-1)^{j-1} \tilde{G}^{(j+r-1)}(0) \tilde{P}_{k+j} \right) f^{(k)}(t, \omega).
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Zur Beurteilung von $x^{(i)}(t, \omega)$, $i = 0, \dots, r-p$, sind also nur Kenntnisse über die Erregungsfunktion $f(t, \omega)$ erforderlich, nicht von deren Ableitung. Außerdem wird es im weiteren von Bedeutung sein, ob ein Zufallsprozeß als Integralfunktional von $f(t, \omega)$ darstellbar ist oder ob noch Randterme hinzukommen.

Im Fall von Schwingungssystemen ($r = 2$) sind für die technische Interpretation neben der Auslenkung und der Geschwindigkeit auch besonders die Beschleunigungen ($i = 2$) von Bedeutung. Die obigen Überlegungen zeigen, daß die für Schwingungssysteme typischen Werte $p = 1, 2$ eine Modellierung der Erregung $f(t, \omega)$ durch differenzierbare Prozesse und eine Analyse der für Approximationsverfahren notwendigen Kenngrößen erfordern.

2.3 Asymptotische Entwicklung und Reihendarstellung

In diesem Abschnitt soll der Begriff der asymptotischen Entwicklung definiert und der Zusammenhang zu Reihendarstellungen von Funktionen aufgezeigt werden. Außerdem werden Eigenschaften von asymptotischen Entwicklungen diskutiert, um die Methoden der Bestimmung von Approximationen von Korrelationsfunktionen zu erläutern.

Folgt man [4] und [8], so gibt es verschiedene Typen von asymptotischen Entwicklungen. Der Grundgedanke einer asymptotischen Entwicklung liegt in der Approximation einer reellen Funktion $\varphi(\varepsilon)$ in der Umgebung eines Punktes, hier speziell $\varepsilon = 0$, durch eine Darstellung der Art

$$\varphi(\varepsilon) = a_0\psi_0(\varepsilon) + a_1\psi_1(\varepsilon) + \dots + a_N\psi_N(\varepsilon) + \mathcal{O}(\psi_N(\varepsilon)) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Die vorgegebene Folge von Funktionen $\psi_j(\cdot)$, $j = 0, 1, \dots, N$ sei eine asymptotische Skala, d. h. die Bedingungen $\psi_j(\varepsilon) \neq 0$ für $\varepsilon \neq 0$, $j = 0, \dots, N$ und $\psi_{j+1}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\psi_j(\varepsilon))$, $j = 0, \dots, N-1$ seien erfüllt. Die Entwicklung in eine Potenzreihe von ε (z. B. $\psi_j(\varepsilon) = \varepsilon^j$) stellt einen Spezialfall dar.

In komplizierten Fällen kennt man im Vorfeld die Funktionen $\psi_j(\cdot)$ nicht, ein erweiterter Begriff der asymptotischen Entwicklung erweist sich als nützlich. Eine allgemeine asymptotische Entwicklung zur asymptotischen Skala $\psi_j(\cdot)$, $j = 0, 1, \dots, N$ ist eine Darstellung

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi_0(\varepsilon) + \varphi_1(\varepsilon) + \dots + \varphi_N(\varepsilon) + \mathcal{O}(\psi_N(\varepsilon)) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

wenn $\varphi_j(\varepsilon) = \mathcal{O}(\psi_j(\varepsilon))$, $j = 0, 1, \dots, N$ gilt.

Die Symbole $\mathcal{O}(\cdot)$ und $\mathcal{o}(\cdot)$ kennzeichnen dabei das asymptotische Verhalten zweier auf $(0, \varepsilon_0)$ definierter Funktionen $\varphi(\varepsilon)$ und $\tilde{\varphi}(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ zueinander. Man sagt

- $\varphi(\varepsilon) = \mathcal{O}(\tilde{\varphi}(\varepsilon))$ genau dann, wenn Konstanten $C > 0$ und $\tilde{\varepsilon}_0 \in (0, \varepsilon_0)$ existieren, so daß

$$|\varphi(\varepsilon)| \leq C|\tilde{\varphi}(\varepsilon)| \text{ für alle } \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0) \quad (2.9)$$

Gültigkeit hat und

- $\varphi(\varepsilon) = \mathcal{o}(\tilde{\varphi}(\varepsilon))$ genau dann, wenn zu jeder Konstante $C > 0$ ein $\tilde{\varepsilon}_0 \in (0, \varepsilon_0)$ existiert, so daß (2.9) gilt.

Nach den einleitenden Bemerkungen wird der Begriff der asymptotischen Entwicklung konkretisiert. Für die Korrelationsfunktionen, die in dieser Arbeit untersucht werden, ist es ausreichend, sich auf asymptotische Entwicklungen bezüglich einer asymptotischen Skala von Potenzen von ε zu beschränken.

Definition 2.2

Sei $\varphi(\varepsilon)$ eine auf $(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}$ definierte reelle Funktion. Eine asymptotische Entwicklung der Ordnung N der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ bezüglich Potenzen $\varepsilon^{p_0}, \dots, \varepsilon^{p_N}$ mit $p_0 < \dots < p_N$ ist eine Darstellung

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi_0(\varepsilon) + \dots + \varphi_N(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{p_N}), \quad (2.10)$$

wenn für $j = 0, 1, \dots, N$ gilt

$$\varphi(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{j-1} \varphi_k(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{p_j}). \quad (2.11)$$

Aus Definition 2.2 folgt, daß

$$\varphi_j(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{p_j}) \quad \text{für } j = 0, \dots, N \quad (2.12)$$

erfüllt ist.

Andererseits ist (2.12) dafür hinreichend, daß es sich in (2.10) um eine asymptotische Entwicklung handelt.

Zur Vereinfachung wird die Notation

$${}^N\varphi(\varepsilon) := \sum_{j=0}^N \varphi_j(\varepsilon)$$

für die Approximation der Ordnung N einer Funktion $\varphi(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ eingeführt und mit

$$\varrho^{N+1}(\varepsilon) := \varphi(\varepsilon) - {}^N\varphi(\varepsilon)$$

das Restglied zu dieser Approximation bezeichnet. Für eine asymptotische Entwicklung der Ordnung N schreibt man kurz

$$\varphi(\varepsilon) = {}^N\varphi(\varepsilon) + \varrho^{N+1}(\varepsilon).$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Exponenten p_0, p_1, \dots und die Entwicklungsglieder $\varphi_0(\varepsilon), \varphi_1(\varepsilon), \dots$ zu bestimmen. Im Gegensatz zum klassischen Fall der Entwicklung in eine Potenzreihe hat der Begriff der asymptotischen Entwicklung den Nachteil, daß eine solche Entwicklung nicht eindeutig ist. Hat man z. B. die Entwicklungsglieder $\varphi_1(\varepsilon), \dots, \varphi_{j-1}(\varepsilon)$ festgelegt, dann ist $\varphi_j(\varepsilon)$ nur bis auf einen Summanden der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{p_j})$ eindeutig bestimmt.

Besondere Bedeutung soll dem Fall beigemessen werden, daß für eine Folge von Entwicklungsgliedern $\varphi_0(\varepsilon), \varphi_1(\varepsilon), \dots$ die Bedingung (2.11) für alle $j = 0, 1, \dots$ erfüllt ist. Man spricht dann von einer asymptotischen Entwicklungen der Ordnung $N = \infty$. Konvergiert die Reihe

$$\hat{\varphi}(\varepsilon) := \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\varepsilon) \text{ für alle } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

dann ist im Allgemeinen weder gesichert, daß die Funktionen $\hat{\varphi}(\varepsilon)$ und $\varphi(\varepsilon)$ übereinstimmen, noch daß die asymptotische Entwicklung von $\varphi(\varepsilon)$ auch eine asymptotische Entwicklung der Summe $\hat{\varphi}(\varepsilon)$ ist. Entsprechende Gegenbeispiele sind in [4] zu finden. Haben beide Funktionen eine gemeinsame asymptotische Entwicklung für $N = \infty$, dann gilt $\hat{\varphi}(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{p_j})$ für alle $j = 0, 1, \dots$. Beide Funktionen stimmen überein, falls $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$|\varphi(\varepsilon) - {}^N\varphi(\varepsilon)| = |\varrho^{N+1}(\varepsilon)| \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty$$

gilt, d. h. die Folge der Approximationen (punktweise) gegen die exakte Funktion konvergiert, ${}^N\varphi(\varepsilon) \rightarrow \varphi(\varepsilon)$ für $N \rightarrow \infty$.

Neben der möglichen Abhängigkeit von einem Parameter ε sind Korrelationsfunktionen schwach stationärer Prozesse Funktionen einer reellen Variablen τ . Bei asymptotischen Entwicklungen für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist zu beachten, ob diese lediglich punktweise für alle τ oder gleichmäßig bezüglich τ gelten. Für eine Funktion $\varphi(\tau, \varepsilon)$ mit dem Definitionsgebiet $\mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0)$ heißt eine Darstellung

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = {}^N\varphi(\tau, \varepsilon) + \varrho^{N+1}(\tau, \varepsilon)$$

punktweise asymptotische Entwicklung bezüglich τ für $\varepsilon \rightarrow 0$, falls die definierenden Bedingungen (2.10) und (2.11) für jedes feste $\tau \in \mathbb{R}$ gelten. Man spricht von einer gleichmäßigen asymptotischen Entwicklung, falls diese Bedingungen gleichmäßig bezüglich τ gelten.

Liegt eine asymptotische Entwicklung der Ordnung $N = \infty$ vor, ist außerdem von Interesse, ob für alle festen $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$|\varphi(\tau, \varepsilon) - {}^N\varphi(\tau, \varepsilon)| = |\varrho^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

gilt. Dabei ist ebenfalls zu unterscheiden, ob diese Konvergenz nur punktweise für alle τ oder sogar gleichmäßig bezüglich τ gilt. Für festes ε ist dann $\varphi(\tau, \varepsilon)$ die Summe der

Funktionenreihe $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\tau, \varepsilon)$, deren Partialsummen ${}^N\varphi(\tau, \varepsilon)$ gerade die Approximationen von $\varphi(\tau, \varepsilon)$ darstellen. In diesem Zusammenhang wird von punktwiser beziehungsweise gleichmäßiger Konvergenz der Approximationen gesprochen.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll ein Überblick über den Nutzen der verschiedenen Entwicklungen gegeben werden. Eine erste Information ist die Ordnung der Funktion selbst, $\varphi(\varepsilon, \tau) = \mathcal{O}(\varphi_0(\varepsilon, \tau)) = \mathcal{O}(\varepsilon^{p_0})$. Darüber hinausgehend läßt sich die Güte einer Approximation in 3 Stufen bewerten:

1. Ist eine asymptotische Entwicklung der Ordnung N gegeben, dann können anhand der Ordnung des Restgliedes Aussagen zur Ordnung des Fehlers für $\varepsilon \rightarrow 0$ gemacht werden. Eine Erhöhung der Approximationsordnung N zieht eine Verbesserung der Fehlerordnung nach sich.
2. Liegt eine analytische Darstellung des Restgliedes oder eine Abschätzung dafür vor, dann läßt sich der Fehler einer Approximation für festes ε konkret angeben bzw. abschätzen, eine Erhöhung von N hat das Ziel eines kleineren Fehlers.
3. Konvergiert die Folge der Approximationen gleichmäßig gegen die exakte Funktion, dann existiert bei festem ε zu jeder vorgegebenen Fehlerschranke eine Approximationsordnung, so daß der Fehler durch diese Fehlerschranke beschränkt wird.

Bei praktischen Aufgaben wird der Wert von ε durch die Modellierung und Anpassung an gemessene Größen festgelegt sein, Aussagen im Sinne von 2. und 3. sind anzustreben.

Kapitel 3

ε -korrelierte Prozesse und Korrelationsmomente

Das Konzept der ε -korrelierten Prozesse baut auf der Theorie der schwach korrelierten Prozesse auf ([26, 27]). Die Eigenschaft der schwachen Korreliertheit eines zentrierten Zufallsprozesses ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ mit Korrelationslänge $\varepsilon > 0$ bedeutet, daß alle Momente höherer Ordnung $\mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(t_1) \dots {}^\varepsilon f(t_n) \}$ in ein Produkt von Momenten niedrigerer Ordnung zerfallen, je nachdem, wie die Menge der Zeitpunkte $\{t_1, \dots, t_n\}$ in maximal ε -benachbarte Teilmengen zu zerlegen ist. Die exakte Definition ist z. B. in [18, 24, 26, 27, 41] zu finden. Für zweite Momente schwach korrelierter zentrierter Prozesse folgt, daß $\mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(t_1) {}^\varepsilon f(t_2) \} = 0$ ist für $|t_2 - t_1| \geq \varepsilon$.

In [41] wurde die Theorie zu schwach korrelierten Prozessen weiterentwickelt. Dort ist auch genau analysiert, in welchem Verhältnis die Klassen der schwach korrelierten, der sogenannten ε -abhängigen und der ε -korrelierten Zufallsprozesse stehen. Insbesondere zeigt sich, daß für die Korrelationsanalyse von Integralfunktionalen von schwach korrelierten Prozessen die Eigenschaft der ε -Korreliertheit entscheidend ist, bei deren Definition lediglich Eigenschaften der zweiten Momente eine Rolle spielen.

Für die Entwicklung der Korrelationsfunktion von Integralfunktionalen ε -korrelierter Prozesse sind in diesem Kapitel weitere Annahmen zu treffen. Außerdem werden die benötigten Korrelationsmomente und deren Korrekturterme vorgestellt.

Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit differenzierbaren ε -korrelierten Prozessen. Die Ableitungen sind zwar ebenfalls ε -korreliert, genügen a priori aber nicht den Voraussetzungen für die in [26] und [27] vorgestellten Entwicklungssätze. Neben einigen Beispielen wird eine Methode angegeben, wie sich Korrelationsfunktionen differenzierbarer ε -korrelierter Prozesse konstruieren lassen, siehe dazu auch [24, 41].

Eine Reihe von B-Spline sind Korrelationsfunktionen von differenzierbaren ε -korrelierten Prozessen. Der letzte Abschnitt ist solchen B-Spline-Korrelationsfunktionen gewidmet.

3.1 ε -korrelierte Prozesse

Definition 3.1

Ein stochastischer Prozeß ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ mit $t \in D \subset \mathbb{R}$ und Werten im \mathbb{C}^n heißt ε -korreliert mit der Korrelationslänge $\varepsilon > 0$, wenn

$$R_{\varepsilon f}{}^\varepsilon(t, s) = \mathbf{E} \{ [{}^\varepsilon f(t) - \mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(t) \}] [{}^\varepsilon f(s) - \mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(s) \}]^* \} = \mathbf{O} \quad \forall t, s \in D \text{ mit } |t - s| \geq \varepsilon$$

gilt.

Für Familien $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ von ε -korrelierten Prozessen wird folgende Annahme vereinbart, die ohne besonderen Vermerk im weiteren gelten soll.

Annahme 3.2

1. Die Zufallsfunktionen $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ sind zentriert, d. h. $\mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(t) \} = \mathbf{O}$.
2. Die Funktionen $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ sind schwach stationäre Prozesse mit den Korrelationsfunktionen

$$\mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(t) {}^\varepsilon f^*(s) \} = R_{\varepsilon f}{}^\varepsilon(s - t), \quad \text{wobei}$$

3. für die Korrelationsfunktionen $(R_{\varepsilon f}{}^\varepsilon(\cdot))_{\varepsilon > 0}$ eine Darstellung durch eine Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ eines 1-korrelierten, schwach stationären Prozesses existiert mit

$$R_{\varepsilon f}{}^\varepsilon(s) = R\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \text{und}$$

4. die Funktionen $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ sind im quadratischen Mittel stetig, woraus die Stetigkeit der Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ folgt.

Die Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ des 1-korrelierten Prozesses zu einer Familie $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ von ε -korrelierten Prozessen wird kurz 1-korrelierte Korrelationsfunktion genannt.

Ist $S(\cdot)$ die Spektraldichte zu $R(\cdot)$, dann ist für $\varepsilon > 0$ $S_{\varepsilon f}{}^\varepsilon(\alpha) = \varepsilon S(\varepsilon \alpha)$ die Spektraldichte zu $R_{\varepsilon f}{}^\varepsilon(\tau) = R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$, denn eine Eigenschaft der Fouriertransformation ist

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon f}{}^\varepsilon(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\tau} R_{\varepsilon f}{}^\varepsilon(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\tau} R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) d\tau = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\varepsilon\tau} R(\tau) d\tau \\ &= \varepsilon S(\varepsilon\alpha). \end{aligned}$$

Wichtige Kenngrößen von Korrelationsfunktionen sind die sogenannten Korrelationsmomente und deren Korrekturterme. Die Bezeichnungen für diese Größen sollen für die gesamte Arbeit einheitlich gelten und werden aus diesem Grund bereits jetzt eingeführt.

Definition 3.3

Sei $R(\cdot)$ eine 1-korrelierte Korrelationsfunktion. Für $j = 0, 1, 2, \dots$ heißen die komplexwertigen Matrizen

$$\kappa_j := \int_0^\infty u^j R(u) du = \int_0^1 u^j R(u) du,$$

$$\mu_j := \int_{-1}^1 u^j R(u) du \quad \text{und} \quad \nu_j := \int_{-1}^1 |u|^j R(u) du$$

die Korrelationsmomente der Ordnung j . μ_0 wird auch Intensität genannt.

Es gelten die Zusammenhänge

$$\mu_j = \kappa_j + (-1)^j \kappa_j^*, \quad \nu_j = \kappa_j + \kappa_j^* \quad \text{und} \quad \nu_{2j} = \mu_{2j}$$

für $j = 0, 1, 2, \dots$

In den später hergeleiteten Entwicklungen kommen neben den Korrelationsmomenten weitere Kenngrößen ε -korrelierter Funktionen vor, sogenannte Korrekturterme der Korrelationsmomente.

Definition 3.4

Zu einer 1-korrelierten Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ heißen die Funktionen

$$\kappa_j(\alpha, \beta) := \int_\alpha^\infty (u - \beta)^j R(u) du, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Korrekturterme der Korrelationsmomente.

Die Anwendung der binomischen Formel ermöglicht es, die Korrekturterme $\kappa_j(\alpha, \beta)$ für $\beta \neq 0$ auf Korrekturterme $\kappa_j(\alpha, 0)$ zurückzuführen.

Von Bedeutung werden die Korrekturterme für die Werte $\beta = 0$, $\beta = \alpha$ und $\beta = 2\alpha$ sein. Deshalb wird noch die folgende Bezeichnung eingeführt.

Definition 3.5

Zu einer 1-korrelierten Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ heißen die für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ definierten Funktionen

$$\kappa_{i,j}(\alpha) := \kappa_j(\alpha, i\alpha) = \int_\alpha^\infty (u - i\alpha)^j R(u) du, \quad i = 0, 1, 2$$

i -te Korrekturterme der Korrelationsmomente der Ordnung j .

Bemerkung 3.6 Aufgrund der 1-Korreliertheit der Funktion $R(\cdot)$ haben die Korrekturterme die Darstellung

$$\kappa_j(\alpha, \beta) = \begin{cases} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^j R(u) du & \alpha \in [0, 1) \\ 0 & \alpha \in [1, \infty), \end{cases}$$

d. h. für $\alpha \geq 1$ gilt $\kappa_j(\alpha, \beta) = \kappa_{i,j}(\alpha) = 0$.

Ein Zusammenhang zwischen den Korrelationsmomenten und den Korrekturtermen ist durch

$$\kappa_j = \kappa_j(0, 0) = \kappa_{i,j}(0) \quad (3.1)$$

gegeben. Außerdem haben die Korrekturterme zu Korrelationsmomenten 0-ter Ordnung die Eigenschaft

$$\kappa_{0,0}(\alpha) = \kappa_{1,0}(\alpha) = \kappa_{2,0}(\alpha). \quad (3.2)$$

Für reellwertige ε -korrelierte Prozesse vereinfachen sich die Eigenschaften der Korrelationsmomente zu

$$\nu_j = 2\kappa_j \quad \text{und} \quad \mu_j = \begin{cases} 0 & j \text{ ungerade} \\ \nu_j & j \text{ gerade} \end{cases}.$$

Bevor einige Beispiele für Korrelationsfunktionen von ε -korrelierten Prozessen angegeben werden, sollen Bedingungen formuliert werden, wann eine Funktion $R(\cdot)$ eine Korrelationsfunktion eines schwach stationären reellwertigen Prozesses ist.

Eine komplexwertige Funktion $R(\cdot)$ heißt positiv definit, wenn für $n = 1, 2, \dots$ und beliebige reelle Zahlen τ_1, \dots, τ_n sowie beliebige komplexe Zahlen z_1, \dots, z_n gilt:

$$\sum_{i,j=1}^n R(\tau_i - \tau_j) z_i \bar{z}_j \geq 0.$$

Eine grundlegende Rolle in der Theorie der stationären Prozesse spielt der Satz von Chintschin [12, 40], der an dieser Stelle für eindimensionale komplexwertige stetige Funktionen angegeben wird, die zusätzlich als integrierbar vorausgesetzt sind.

Satz 3.7

Sei $R(\cdot)$ eine stetige, integrierbare Funktion ($R(\cdot) \in C(\mathbb{C}) \cap L_1(\mathbb{C})$). Dann sind äquivalent

1. $R(\cdot)$ ist Korrelationsfunktion eines i.q.M. stetigen schwach stationären Prozesses.
2. $S(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\tau} R(\tau) d\tau \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $R(\cdot)$ ist positiv definit.

Insbesondere ist durch diesen Satz auch die Existenz eines i.q.M. stetigen schwach stationären Prozesses gesichert, der die vorgegebene Korrelationsfunktion besitzt. So ist z. B. ein stationärer Gaußprozeß durch eine Erwartungswertfunktion und eine Korrelationsfunktion eindeutig bestimmt.

Ein anderes Kriterium für reellwertige Funktionen bietet ein Satz von Polya (siehe [38]). Demnach ist eine stetige, gerade, nichtnegative und auf \mathbb{R}_+ konvexe Funktion $R(\cdot)$ mit $R(0) = 1$ und $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$ eine Korrelationsfunktion.

Beispiel 3.8 Die Funktion

$$R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$$

ist 1-korreliert und nach dem Satz von Polya eine Korrelationsfunktion. Man berechnet die Korrekturterme für $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \kappa_j(\alpha, \beta) &= \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^j (1 - u) \, du \\ &= \frac{(u - \beta)^{j+1} (1 - u)}{j + 1} \Big|_{u=\alpha}^1 + \frac{1}{j + 1} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j+1} \, du \\ &= -\frac{(\alpha - \beta)^{j+1} (1 - \alpha)}{j + 1} + \frac{(u - \beta)^{j+2}}{(j + 1)(j + 2)} \Big|_{u=\alpha}^1 \\ &= \frac{(1 - \beta)^{j+2} - (\alpha - \beta)^{j+2}}{(j + 1)(j + 2)} - \frac{(\alpha - \beta)^{j+1} (1 - \alpha)}{j + 1}, \end{aligned}$$

die Korrelationsmomente

$$\kappa_j = \frac{1}{(j + 1)(j + 2)}$$

und die Spektraldichte

$$S(\alpha) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\pi \alpha^2}.$$

Die Korrekturterme $\kappa_{0,j}(\alpha) = \kappa_j(\alpha, 0)$, $\kappa_{1,j}(\alpha) = \kappa_j(\alpha, \alpha)$ und $\kappa_{2,j}(\alpha) = \kappa_j(\alpha, 2\alpha)$ sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

Beispiel 3.9 Eine Verallgemeinerung von Beispiel 3.8 stellt die Korrelationsfunktion

$$R(\tau) = (1 - |\tau|)_+^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

dar. Die Korrekturterme berechnen sich rekursiv. Für $k = 1$ sind diese aus Beispiel 3.8

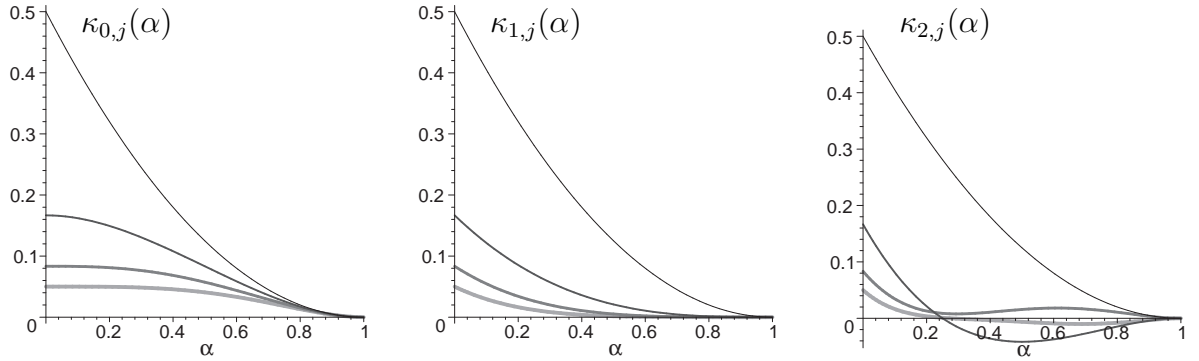


Abbildung 3.1: Korrekturterme der Korrelationsmomente $\kappa_{0,j}(\alpha)$, $\kappa_{1,j}(\alpha)$ und $\kappa_{2,j}(\alpha)$, $j = 0, 1, 2, 3$ (Linien von dünn und dunkel nach dick und hell) für die Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$

bekannt, für $k = 2, 3, \dots$ ermittelt man für $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \kappa_j^k(\alpha, \beta) &= \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^j (1 - u)^k du \\ &= \frac{(u - \beta)^{j+1} (1 - u)^k}{j + 1} \Big|_{u=\alpha}^1 + \frac{k}{j + 1} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j+1} (1 - u)^{k-1} du \\ &= -\frac{(\alpha - \beta)^{j+1} (1 - \alpha)^k}{j + 1} + \frac{k}{j + 1} \kappa_{j+1}^{k-1}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Für die Korrelationsmomente berechnet man

$$\kappa_j = \int_0^1 u^j (1 - u)^k du = \text{Beta}(k + 1, j + 1) = \frac{\Gamma(k + 1)\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j + k + 2)} = \frac{k!j!}{(k + j + 1)!}.$$

Beispiel 3.10 Die Korrelationsfunktion

$$R(\tau) = (1 - |\tau|^\beta)_+, \quad 0 < \beta \leq 1$$

hat die Korrelationsmomente

$$\kappa_j = \frac{\beta}{(j + 1)(j + \beta + 1)}.$$

Weitere Beispiele von Korrelationsfunktionen 1-korrelierter Prozesse findet man in [41]. Die angegebenen Beispiele sind Korrelationsfunktionen von Prozessen, die nicht i.q.M. differenzierbar sind.

3.2 Differenzierbare ε -korrelierte Prozesse

Sowohl die Differenzierbarkeit im quadratischen Mittel als auch die ε -Korreliertheit eines Prozesses stehen im Zusammenhang mit Eigenschaften der Korrelationsfunktion. So gibt es notwendige und hinreichende Bedingungen an die Korrelationsfunktion für die Differenzierbarkeit des Prozesses [28, 40].

Im Speziellen ist ein schwach stationärer Prozeß $f(t, \omega)$ mit $2n$ -mal stetig differenzierbarer Korrelationsfunktion n -mal im quadratischen Mittel differenzierbar, es gilt

$$R_{f^{(k)}f^{(l)}}(\tau) = (-1)^k R_{ff}^{(k+l)}(\tau), \quad k, l = 0, \dots, n \quad (3.3)$$

und insbesondere

$$S_{f^{(k)}f^{(k)}}(\alpha) = \alpha^{2k} S_{ff}(\alpha).$$

In [27] wurde der Nachweis erbracht, daß unendlich oft differenzierbare ε -korrelierte Prozesse existieren. Die angegebene beliebig oft differenzierbare Korrelationsfunktion (siehe auch [26, 28, 45]) ist aber eher von theoretischer Bedeutung und für die Korrelationsanalyse unzureichend.

Als nächstes sollen Eigenschaften der Korrekturterme zu differenzierbaren 1-korrelierten Korrelationsfunktionen angegeben werden. Mit

$$\kappa_j^{(n)}(\alpha, \beta) := \int_{\alpha}^{\infty} (u - \beta)^j R^{(n)}(u) du$$

wird der Korrekturterm des j -ten Korrelationsmomentes der n -ten Ableitung der 1-korrelierten, n -mal differenzierbaren Korrelationsfunktion bezeichnet. Aufgrund der Beziehung (3.3) gilt für die Korrekturterme eines n -mal differenzierbaren 1-korrelierten Prozesses $f(t, \omega)$

$$\kappa_{j, f^{(k)}f^{(l)}}(\alpha, \beta) = (-1)^k \kappa_{j, ff}^{(k+l)}(\alpha, \beta), \quad k, l = 0, \dots, n. \quad (3.4)$$

Lemma 3.11

Sei $R(\cdot)$ eine n -mal differenzierbare, 1-korrelierte Korrelationsfunktion. Dann gilt für $j = 0, 1, \dots$

$$\kappa_j^{(n)}(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\min\{n, j\}-1} \frac{(-1)^{l+1} j!}{(j-l)!} (\alpha - \beta)^{j-l} R^{(n-l-1)}(\alpha) + \begin{cases} (-1)^{j+1} j! R^{(n-j-1)}(\alpha) & j < n \\ (-1)^n \frac{j!}{(j-n)!} \kappa_{j-n}(\alpha, \beta) & j \geq n \end{cases}.$$

Beweis.

Sei $k := \min\{n, j\}$. Die k -fache partielle Integration ergibt für $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^1 (u - \beta)^j R^{(n)}(u) du &= (u - \beta)^j R^{(n-1)}(u) \Big|_{u=\alpha}^1 - j \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-1} R^{(n-1)}(u) du \\
&= -(\alpha - \beta)^j R^{(n-1)}(\alpha) + j(\alpha - \beta)^{j-1} R^{(n-2)}(\alpha) \\
&\quad + j(j-1) \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-2} R^{(n-2)}(u) du \\
&= \dots = \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^{l+1} j!}{(j-l)!} (\alpha - \beta)^{j-l} R^{(n-l-1)}(\alpha) + (-1)^k \frac{j!}{(j-k)!} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-k} R^{(n-k)}(u) du.
\end{aligned}$$

Im Fall $k = j < n$ berechnet man

$$\begin{aligned}
(-1)^k \frac{j!}{(j-k)!} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-k} R^{(n-k)}(u) du &= (-1)^j j! \int_{\alpha}^1 R^{(n-j)}(u) du \\
&= (-1)^{j+1} j! R^{(n-j-1)}(\alpha),
\end{aligned}$$

und für $k = n \leq j$ ist

$$\begin{aligned}
(-1)^k \frac{j!}{(j-k)!} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-k} R^{(n-k)}(u) du &= (-1)^n \frac{j!}{(j-n)!} \int_{\alpha}^1 (u - \beta)^{j-k} R(u) du \\
&= (-1)^n \frac{j!}{(j-n)!} \kappa_{j-n}(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

□

Die Aussage von Lemma 3.11 läßt sich leicht auf die Korrekturterme $\kappa_{i,j}(\alpha)$ (Definition 3.5) und die Korrelationsmomente κ_j übertragen. Der Fall eindimensionaler, reellwertiger Prozesse wird im folgenden Korollar konkretisiert.

Korollar 3.12

Sei $R(\cdot)$ eine 1-korrelierte, n -mal differenzierbare reellwertige, eindimensionale Korrelationsfunktion. Dann gilt

$$\kappa_j^{(n)} = \begin{cases} 0 & j < n, \quad n - j \text{ gerade} \\ (-1)^{j+1} j! R^{(n-j-1)}(0) & j < n, \quad n - j \text{ ungerade} \\ (-1)^n \frac{j!}{(j-n)!} \kappa_{j-n} & j \geq n \end{cases}.$$

Das heißt insbesondere, daß alle geraden Korrelationsmomente der n -ten Ableitung eines Prozesses bis zur Ordnung $2n - 2$ verschwinden,

$$(-1)^{n+1} \kappa_{2k}^{(2n)} = 0, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, weitere Eigenschaften und Beispiele von differenzierbaren ε -korrelierten Prozessen zu erarbeiten. Ist ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ ein differenzierbarer ε -korrelierter Prozeß mit $R_{{}^\varepsilon f}(\tau) = R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$, dann ist $\dot{{}^\varepsilon f}(t, \omega)$ ε -korreliert im Sinne der Definition 3.1. Die Voraussetzung 3. der Annahme 3.2, daß die Korrelationsfunktion für alle $\varepsilon > 0$ durch eine 1-korrelierte Korrelationsfunktion erzeugt wird, ist jedoch nicht erfüllt, da gilt

$$R_{{}^\varepsilon \dot{f}}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_{{}^\varepsilon f}(\tau) = -\frac{1}{\varepsilon^2} R''\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right).$$

Aus dieser Tatsache folgt, daß verschiedene Ableitungen eines Prozesses nicht gleichzeitig ε -korreliert im Sinne der geforderten Voraussetzungen sein können.

Es ist zunächst keinesfalls offensichtlich, wie eine Korrelationsfunktion eines differenzierbaren, 1-korrelierten Prozesses gewählt werden kann. Die Idee, z. B. für die Ableitung eines Prozesses die Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ anzusetzen, steht im Widerspruch zu Korollar 3.12. Denn für die Korrelationsfunktion der Ableitung eines 1-korrelierten Prozesses verschwindet das Korrelationsmoment 0-ter Ordnung, was bei der Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ jedoch nicht der Fall ist (Beispiel 3.8). Dabei ist die 1-Korreliertheit des Prozesses nicht die entscheidende Einschränkung. Es gibt keinen differenzierbaren, schwach stationären Prozeß, dessen Ableitung die Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ hat.

Wäre nämlich die Korrelationsfunktion eines solchen Prozesses absolut integrierbar, so hätte sie offenbar die Spektraldichte

$$S(\alpha) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\pi \alpha^4}$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S(\alpha) = \infty,$$

was aber im Widerspruch zur Integrierbarkeit steht. Man kann auch zeigen, daß es keine nicht integrierbare Korrelationsfunktion mit den geforderten Eigenschaften gibt, wobei für die Anwendungen hier (Spektral- und Korrelationsanalyse) diese ausgearteten Fälle nicht von Bedeutung sind.

In [24] wurde folgende Methode vorgeschlagen, um Korrelationsfunktionen differenzierbarer 1-korrelierter Prozesse zu konstruieren.

Mittelungsmethode

Sei $f(t, \omega)$ ein 1-korrelierter Prozeß mit Korrelationsfunktion $R_{ff}(\cdot)$. Dann ist

$$g(t, \omega) = \int_t^{t+1} f(s, \omega) ds = \int_0^1 f(t+s, \omega) ds$$

ein 2-korrelierter, differenzierbarer, schwach stationärer Prozeß mit Korrelationsfunktion

$$\mathbf{E} \{g(t_1)g(t_2)\} = \int_0^1 \int_0^1 R_{ff}(t_2 - t_1 + s_2 - s_1) ds_1 ds_2 = R_{gg}(t_2 - t_1).$$

Durch eine Stauchung des Zeitintervalls und Division durch den Wert $R_{gg}(0)$ erhält man die Korrelationsfunktion des 1-korrelierten Prozesses mit Varianz 1.

Vorteil dieser Vorgehensweise ist, daß die konstruierte Funktion $R_{gg}(\cdot)$ per Definition eine Korrelationsfunktion ist, die Differenzierbarkeit läßt sich leicht nachweisen.

Der Zusammenhang zwischen dem Prozeß $\dot{g}(t, \omega)$ und dem zur Konstruktion verwendeten Prozeß $f(t, \omega)$ ist gegeben durch

$$\dot{g}(t, \omega) = f(t + 1, \omega) - f(t, \omega),$$

$\dot{g}(t, \omega)$ hat die Korrelationsfunktion

$$R_{\dot{g}\dot{g}}(\tau) = 2R_{ff}(\tau) - R_{ff}(\tau + 1) - R_{ff}(\tau - 1).$$

Beispiel 3.13 Geht man von der Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ aus Beispiel 3.8 aus, ergibt sich die Korrelationsfunktion eines differenzierbaren Prozesses $g(t, \omega)$

$$R_{gg}(\tau) = \begin{cases} 1 - 6|\tau|^2 + 6|\tau|^3 & |\tau| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |\tau|)^3 & \frac{1}{2} < |\tau| \leq 1 \end{cases}$$

mit der Spektraldichte

$$S(\alpha) = \frac{24(1 - \cos(\frac{\alpha}{2}))^2}{\pi\alpha^4}.$$

Aufgrund der stückweisen Definition der Korrelationsfunktion sind auch die Korrekturterme der Korrelationsmomente von einer entsprechenden Gestalt. Für $\alpha > \frac{1}{2}$ ermittelt man die Funktionen aus Beispiel 3.9 für $k = 3$, da die Korrelationsfunktionen für $|\tau| > \frac{1}{2}$ bis auf den Faktor 2 übereinstimmen, d. h.

$$\kappa_j(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2\kappa_j^3(\frac{1}{2}, \beta) + \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} (u - \beta)^j (1 - 6u^2 + 6u^3) du & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ 2\kappa_j^3(\alpha, \beta) & \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Prinzipiell sind die Korrekturterme zu stückweise polynomialen Korrelationsfunktionen ebenfalls stückweise Polynomfunktionen und lassen sich analytisch bestimmen. Aus diesem Grund wird in den folgenden Beispielen auf die Angabe der Korrekturterme verzichtet, es werden lediglich die Korrelationsmomente angegeben. Für die Funktion $R_{gg}(\tau)$ sind das die Korrelationsmomente

$$\kappa_j = \frac{3j!(4 - (\frac{1}{2})^j)}{(j + 4)!}.$$

Die Ableitung $\dot{g}(t, \omega)$ hat die Korrelationsfunktion

$$R_{\dot{g}\dot{g}}(\tau) = \begin{cases} 12(1 - 3|\tau|) & |\tau| \leq \frac{1}{2} \\ -12(1 - |\tau|) & \frac{1}{2} < |\tau| \leq 1 \end{cases}.$$

Die Korrelationsmomente der Ableitung des Prozesses berechnen sich nach Korollar 3.12 unter Berücksichtigung der Beziehung (3.4),

$$\kappa_{j,\dot{g}\dot{g}} = -\kappa_j^{(2)} = -\frac{12(1 - (\frac{1}{2})^j)}{(j+1)(j+2)}.$$

Beispiel 3.14 Wendet man diese Methode erneut an, d. h. integriert man in der oben beschriebenen Weise über die Korrelationsfunktion $R_{gg}(\tau)$ aus Beispiel 3.13, so erhält man eine Korrelationsfunktion eines zweimal stetig differenzierbaren Prozesses

$$R(\tau) = \frac{1}{46} \begin{cases} -1280 |\tau|^5 + 1280 |\tau|^4 - 320 |\tau|^2 + 46 & |\tau| \leq \frac{1}{4} \\ -256 |\tau|^5 + 640 |\tau|^3 - 480 |\tau|^2 + 20 |\tau| + 45 & \frac{1}{4} < |\tau| \leq \frac{1}{2} \\ 768 |\tau|^5 - 2560 |\tau|^4 + 3200 |\tau|^3 - 1760 |\tau|^2 + 340 |\tau| + 13 & \frac{1}{2} < |\tau| \leq \frac{3}{4} \\ 256 (1 - |\tau|)^5 & \frac{3}{4} < |\tau| \leq 1 \end{cases}$$

mit der Spektraldichte

$$S(\alpha) = \frac{122880}{23} \frac{\sin^2(\frac{\alpha}{4}) (1 - \cos(\frac{\alpha}{4}))^2}{\pi \alpha^6}$$

und den Korrelationsmomenten

$$\kappa_j = \frac{15 j! (1024 + 2^{-2j} + 2^{6-j} - 729(\frac{3}{4})^j)}{23(j+6)!}.$$

Die mit der Mittelungsmethode aus der Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ konstruierten Funktionen sind stückweise definierte Funktionen, wobei sich die Anzahl der zu untersuchenden Teilintervalle von $[-1, 1]$ mit jeder Anwendung verdoppelt.

3.3 B-Spline-Korrelationsfunktion

Eine weitere Möglichkeit, Korrelationsfunktionen von differenzierbaren, 1-korrelierten Prozessen zu konstruieren, bietet die Theorie der B-Spline [5, 6, 19, 25]. An dieser Stelle soll auf eine allgemeine Definition von B-Spline mittels Dividierter Differenzen verzichtet werden. Für den hier betrachteten Fall äquidistanter Knoten genügt die definierende Eigenschaft der rekursiven Darstellung von B-Spline zu einer streng wachsenden Folge von Knoten.

Definition 3.15

Die (sogenannten normierten) i -ten B-Spline der Ordnung $m \geq 1$ zur Folge von Zahlen $t_i < \dots < t_{i+m}$ sind stückweise definierte Funktionen aus Polynomen des Grades $m - 1$, die folgender Rekursion genügen:

$$\begin{aligned} m = 1: \quad B_i^1(t) &= \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) \\ m \geq 2: \quad B_i^m(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} B_i^{m-1}(t) + \frac{t_{i+m} - t}{t_{i+m} - t_{i+1}} B_{i+1}^{m-1}(t). \end{aligned}$$

Die Zahlen $t_i < \dots < t_{i+m}$ werden auch Knoten genannt.

Der Fall der Knoten $0, 1, \dots, m$ spielt eine besondere Rolle. Dann definiert man den B-Spline $B^m(\cdot)$ durch die Rekursion

$$\begin{aligned} B^1(t) &= \mathbf{1}_{[0,1)}(t) \\ m \geq 2: \quad B^m(t) &= \frac{t B^{m-1}(t) + (m-t) B^{m-1}(t-1)}{m-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zunächst werden einige Eigenschaften von B-Spline diskutiert, die zur Definition sogenannter B-Spline-Korrelationsfunktionen nötig sind. Die Ausführungen sind im Wesentlichen an [25] angelehnt.

Lemma 3.16

Für die B-Spline zu den Knoten $0, 1, \dots, m$ gilt die explizite Darstellung

$$B^m(t) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-1}. \quad (3.6)$$

Dabei wird

$$(t-s)_+^0 := \begin{cases} 0 & t < s \\ 1 & t \geq s \end{cases}$$

gesetzt.

Beweis.

Der Beweis erfolgt per Induktion nach m . Der Induktionsanfang ($m = 1$) folgt aus

$$\sum_{i=0}^1 (-1)^i \binom{1}{i} (t-i)_+^0 = (t)_+^0 - (t-1)_+^0 = \mathbf{1}_{[0,1)}(t) = B^1(t).$$

Angenommen, die explizite Darstellung (3.6) gilt für $B^{m-1}(\cdot)$. Dann ergibt sich aus der Rekursion (3.5) die Beziehung

$$\begin{aligned}
& (m-1)!B^m(t) \\
&= t \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (t-i)_+^{m-2} + (m-t) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (t-i-1)_+^{m-2} \\
&= t \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (t-i)_+^{m-2} + (t-m) \sum_{i=1}^m (-1)^i \binom{m-1}{i-1} (t-i)_+^{m-2} \\
&= t \sum_{i=0}^m (-1)^i \left[\binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} \right] (t-i)_+^{m-2} - \sum_{i=1}^m (-1)^i m \binom{m-1}{i-1} (t-i)_+^{m-2} \\
&= t \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-2} - \sum_{i=1}^m (-1)^i i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-2} \\
&= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-2} (t-i) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (t-i)_+^{m-1},
\end{aligned}$$

wenn man $\binom{m-1}{m} = \binom{m-1}{-1} = 0$ vereinbart und $i \binom{m}{i} = m \binom{m-1}{i-1}$ berücksichtigt. \square

Den Zusammenhang zwischen den Größen $B^m(t)$ und den in Definition 3.15 beschriebenen B-Spline zu beliebigen aber äquidistanten Knoten stellt folgendes Lemma her.

Lemma 3.17

Seien t_i, \dots, t_{i+m} äquidistante Knoten mit Abstand $t_{i+1} - t_i = h$, dann gilt für die B-Spline zu diesen Knoten

$$B_i^m(t) = B^m\left(\frac{t-t_i}{h}\right).$$

Beweis.

Für $m = 1$ berechnet man

$$B_i^1(t) = \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) = \mathbf{1}_{[0,1)}\left(\frac{t-t_i}{h}\right) = B^1\left(\frac{t-t_i}{h}\right)$$

und per Induktion folgt die Behauptung

$$\begin{aligned}
B_i^m(t) &= \frac{t-t_i}{t_{i+m-1}-t_i} B_i^{m-1}(t) + \frac{t_{i+m}-t}{t_{i+m}-t_{i+1}} B_{i+1}^{m-1}(t) \\
&= \frac{(t-t_i)B^{m-1}\left(\frac{t-t_i}{h}\right) + (t_{i+m}-t)B^{m-1}\left(\frac{t-t_{i+1}}{h}\right)}{(m-1)h} \\
&= \frac{\frac{t-t_i}{h} B^{m-1}\left(\frac{t-t_i}{h}\right) + \left(m - \frac{t-t_i}{h}\right) B^{m-1}\left(\frac{t-t_i}{h} - 1\right)}{m-1} = B^m\left(\frac{t-t_i}{h}\right).
\end{aligned}$$

\square

Für die weiteren Betrachtungen werden die Funktionen

$$M^m(t) := B^m\left(t + \frac{m}{2}\right)$$

definiert, die den Träger $[-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]$ haben. Die B-Spline $M^m(\cdot)$ können durch Faltung erzeugt werden.

Lemma 3.18

Für $1 \leq i \leq m-1$ gilt

$$M^m(t) = M^i * M^{m-i}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M^i(t-s)M^{m-i}(s) ds.$$

Beweis.

Unter Verwendung der expliziten Darstellung (3.6) erfolgt der Beweis mittels der Berechnung

$$\begin{aligned} M^1 * M^{m-1}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} B^1\left(t-s + \frac{1}{2}\right) B^{m-1}\left(s + \frac{m-1}{2}\right) ds \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{(m-2)!} \binom{m-1}{i} \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \left(s + \frac{m-1}{2} - i\right)_+^{m-2} ds \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \binom{m-1}{i} \left[\left(t + \frac{m}{2} - i\right)_+^{m-1} - \left(t + \frac{m}{2} - i - 1\right)_+^{m-1} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \binom{m-1}{i} \left(t + \frac{m}{2} - i\right)_+^{m-1} + \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \binom{m-1}{i-1} \left(t + \frac{m}{2} - i\right)_+^{m-1} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \left[\binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1} \right] \left(t + \frac{m}{2} - i\right)_+^{m-1} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{(m-1)!} \binom{m}{i} \left(t + \frac{m}{2} - i\right)_+^{m-1} = B^m\left(t + \frac{m}{2}\right) = M^m(t). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.19

Die Fouriertransformierte der Funktion $M^m(\cdot)$ hat die Darstellung

$$\Phi_m(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} M^m(t) dt = \left(\frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\frac{\alpha}{2}} \right)^m.$$

Beweis.

Für $m = 1$ ermittelt man die Fouriertransformierte durch direktes Lösen des Integrals

$$\Phi_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} M^1(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\alpha t} dt = \frac{e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}}{-i\alpha} = \frac{2 \sin(\frac{\alpha}{2})}{\alpha}.$$

Die Fouriertransformierte der Faltung zweier Funktionen ergibt das Produkt der Fouriertransformierten der einzelnen Funktionen

$$\Phi_m(\alpha) = \Phi_i(\alpha) \Phi_{m-i}(\alpha).$$

Aus $M^m = M^1 * \dots * M^1$ folgt die Behauptung $\Phi_m(\alpha) = (\Phi_1(\alpha))^m$. □

Die B-Spline $B_0^m(\cdot)$ der Ordnung m zu den äquidistanten Knoten $t_i = -1 + ih$, $i = 0, \dots, m$ mit Abstand $h = \frac{2}{m}$ werden mit

$$R^m(\cdot) := B_0^m(\cdot)$$

bezeichnet. Da diese Splinefunktionen im weiteren für gerade m als Korrelationsfunktionen dienen sollen, werden ihre Eigenschaften in folgendem Satz zusammengefaßt.

Satz 3.20

Die B-Spline $R^m(\cdot)$ haben folgende Eigenschaften.

1. Es gilt

$$R^m(t) = B^m\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) = M^m\left(\frac{mt}{2}\right). \quad (3.7)$$

2. Die Funktionen $R^m(\cdot)$ genügen der Rekursion

$$R^1(t) = \mathbf{1}_{[-1,1)}(t),$$

$$m \geq 2: \quad R^m(t) = \frac{m}{2(m-1)} \left[(1+t)R^{m-1}\left(\frac{mt+1}{m-1}\right) + (1-t)R^{m-1}\left(\frac{mt-1}{m-1}\right) \right].$$

3. Es gilt für $m = 1, 2, \dots$ die explizite Darstellung

$$R^m(t) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \left(\frac{m}{2}(t+1) - i\right)_+^{m-1}.$$

4. Die Funktionen $R^m(\cdot)$ sind für $m \geq 2$ gerade, d. h. es gilt

$$R^m(t) = R^m(-t).$$

5. Die Funktionen $R^{2k}(\cdot)$ haben für $k = 1, 2, \dots$ die Spektraldichte

$$S^k(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} R^{2k}(t) dt = \frac{k^{2k-1} 2^{k-1} (1 - \cos(\frac{\alpha}{k}))^k}{\pi \alpha^{2k}}.$$

6. Für $m \geq 2$ ist die Funktion $R^m(\cdot)$ $(m - 2)$ -mal stetig differenzierbar,

$$R^m(\cdot) \in C^{m-2}(\mathbb{R}),$$

die $(m - 2)$ -te Ableitung ist eine stückweise lineare Funktion.

7. Für $m \geq 2$ gilt $R^m(t) > 0$ für $t \in (-1, 1)$ und $R^m(t) = 0$ sonst.

Beweis.

1. Die Darstellung von B-Spline zu äquidistanten Knoten durch Skalierung und Translation der B-Spline $B^m(\cdot)$ ist die Aussage von Lemma 3.17.
2. Die Rekursion für die Funktionen $R^m(\cdot)$ folgt aus der Beziehung (3.7) unter Verwendung der Rekursion (3.5) für die Funktionen $B^m(\cdot)$,

$$\begin{aligned} R^m(t) &= B^m\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) \\ &= \frac{\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) B^{m-1}\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) + \left(m - \left(\frac{m}{2}(t+1)\right)\right) B^{m-1}\left(\left(\frac{m}{2}(t+1)\right) - 1\right)}{m-1} \\ &= \frac{m}{2(m-1)} \left[(1+t) B^{m-1}\left(\frac{m-1}{2}\left(\frac{mt+1}{m-1} + 1\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + (1-t) B^{m-1}\left(\frac{m-1}{2}\left(\frac{mt-1}{m-1} + 1\right)\right) \right] \\ &= \frac{m}{2(m-1)} \left[(1+t) R^{m-1}\left(\frac{mt+1}{m-1}\right) + (1-t) R^{m-1}\left(\frac{mt-1}{m-1}\right) \right]. \end{aligned}$$

3. Die explizite Darstellung ergibt sich unmittelbar aus Lemma 3.16.
4. Der Beweis dieser Behauptung erfolgt per Induktion. Für $m = 2$ ermittelt man

$$R^2(t) = (t+1)_+ - 2(t)_+ + (t-1)_+ = (1-|t|)_+.$$

Nimmt man an, die Funktion R^{m-1} sei gerade, so folgt aus der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} R^m(-t) &= \frac{m}{2(m-1)} \left[(1-t) R^{m-1}\left(\frac{-mt+1}{m-1}\right) + (1+t) R^{m-1}\left(\frac{-mt-1}{m-1}\right) \right] \\ &= \frac{m}{2(m-1)} \left[(1-t) R^{m-1}\left(\frac{mt-1}{m-1}\right) + (1+t) R^{m-1}\left(\frac{mt+1}{m-1}\right) \right] \\ &= R^m(t). \end{aligned}$$

5. Mit der Anwendung der Eigenschaften der Fouriertransformation und der Beziehung $\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha))$ ermittelt man die Spektraldichte

$$S^k(\alpha) = \frac{1}{2\pi k} \Phi_{2k}\left(\frac{\alpha}{k}\right) = \frac{1}{2\pi k} \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2k}\right)}{\frac{\alpha}{2k}}\right)^{2k} = \frac{k^{2k-1} 2^{k-1} (1 - \cos\left(\frac{\alpha}{k}\right))^k}{\pi \alpha^{2k}} \geq 0.$$

6. Daß die Funktion $R^m(\cdot)$ für $m \geq 2$ zu $C^{m-2}(\mathbb{R})$ gehört, erkennt man an der expliziten Darstellung in 3., da die Funktion $g(t) = (t - i)_+^{m-1}$ $(m - 2)$ -mal stetig differenzierbar ist. Die $(m - 2)$ -te Ableitung $g^{(m-2)}(t) = (m - 1)!(t - i)_+$ ist eine stückweise lineare Funktion.

7. Diese Behauptung wird mittels der Rekursionsformel aus 2. verifiziert. Der Induktionsanfang für $m = 2$ ist aus der Darstellung von $R^2(t) = (1 - |t|)_+$ klar. Die Behauptung gelte nun für $m - 1$. In der Rekursionsformel kommen die Funktionen $R^{m-1}\left(\frac{mt+1}{m-1}\right)$ und $R^{m-1}\left(\frac{mt-1}{m-1}\right)$ vor. Aufgrund der Annahme für $m - 1$ gelten

$$R^{m-1}\left(\frac{mt+1}{m-1}\right) > 0 \text{ für } t \in (-1, \frac{m-2}{m}) \text{ und } R^{m-1}\left(\frac{mt+1}{m-1}\right) = 0 \text{ sonst,}$$

sowie

$$R^{m-1}\left(\frac{mt-1}{m-1}\right) > 0 \text{ für } t \in (-\frac{m-2}{m}, 1) \text{ und } R^{m-1}\left(\frac{mt-1}{m-1}\right) = 0 \text{ sonst.}$$

Die Intervalle $(-1, \frac{m-2}{m})$ und $(-\frac{m-2}{m}, 1)$ überschneiden sich für $m \geq 3$. Somit wird aus der Rekursionsformel ersichtlich, daß $R^m(t) > 0$ genau dann gilt, wenn $t \in (-1, 1)$ ist.

□

Basierend auf den Eigenschaften 5. bis 7. aus Satz 3.20 und der Anwendung des Satzes 3.7 wird das Resultat der vorangegangenen Überlegungen formuliert.

Korollar 3.21

Für $k \geq 1$ sind die B-Spline $R^{2k}(\cdot)$ 1-korrelierte Korrelationsfunktionen eines $(k - 1)$ -mal i.q.M. stetig differenzierbaren schwach stationären Prozesses.

Die Funktion $R^{2k}(\cdot)$ erhält die Bezeichnung B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung k . Teilt man die Funktion $R^{2k}(\cdot)$ durch den Wert $R^{2k}(0)$, entsteht die normierte B-Spline-Korrelationsfunktion

$$\bar{R}^{2k}(\tau) := \frac{1}{R^{2k}(0)} R^{2k}(\tau),$$

d. h. der zugrunde liegende Prozeß hat eine Varianz von 1. In der Abbildung 3.2 sind die normierten B-Spline-Korrelationsfunktionen $\bar{R}^{2k}(\cdot)$ der Ordnungen $k = 1, 2, \dots, 8$ und deren Spektraldichten $\bar{S}^{2k}(\alpha) := S^{2k}(\alpha)/R^{2k}(0)$ zu sehen.

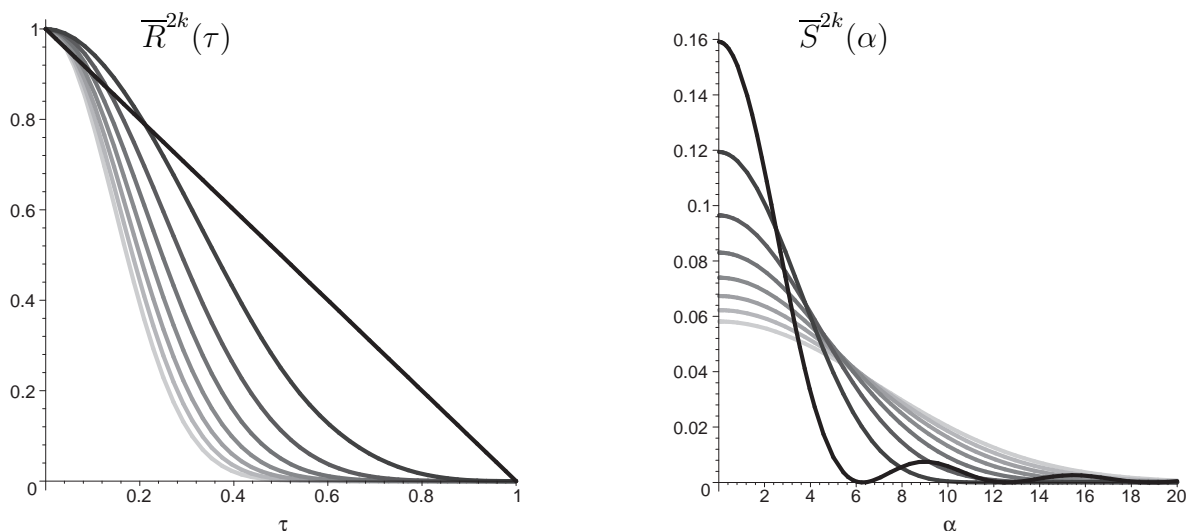


Abbildung 3.2: normierte B-Spline-Korrelationsfunktionen $\overline{R}^{2k}(\tau)$ der Ordnung $k = 1, 2, \dots, 8$ (Linien von dunkel nach hell) und dazugehörige Spektraldichten $\overline{S}^{2k}(\alpha)$

Die Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ aus Beispiel 3.8 ist die B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung 1. Die durch Mittelung konstruierte Korrelationsfunktion des einmal differenzierbaren Prozesses aus Beispiel 3.13 stimmt mit der normierten B-Spline-Korrelationsfunktion $\overline{R}^4(\cdot)$ der Ordnung 2 überein. Für die normierte B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung 3 ermittelt man die folgende stückweise Darstellung.

Beispiel 3.22 Die normierte B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung 3

$$\begin{aligned} \overline{R}^6(\tau) &= \frac{20}{11} R^6(\tau) \\ &= \frac{1}{22} \begin{cases} -810 |\tau|^5 + 810 |\tau|^4 - 180 |\tau|^2 + 22 & |\tau| \leq \frac{1}{3} \\ 405 |\tau|^5 - 1215 |\tau|^4 + 1350 |\tau|^3 - 630 |\tau|^2 + 75 |\tau| + 17 & \frac{1}{3} < |\tau| \leq \frac{2}{3} \\ 81 (1 - |\tau|)^5 & \frac{2}{3} < |\tau| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

hat die Spektraldichte

$$\overline{S}^6(\alpha) = \frac{19440}{11\pi} \frac{(1 - \cos(\frac{\alpha}{3}))^3}{\alpha^6}$$

und die Korrelationsmomente

$$\kappa_j = \frac{20 j! (243 - 128 (\frac{2}{3})^j + 5 (\frac{1}{3})^j)}{11(j+6)!}.$$

Die Korrelationsfunktion und die Spektraldichte sind in Abbildung 3.3 dargestellt. Außerdem sind die Korrelationsfunktionen und Spektraldichten der ersten und zweiten Ableitung eines Prozesses mit dieser Korrelationsfunktion abgebildet.

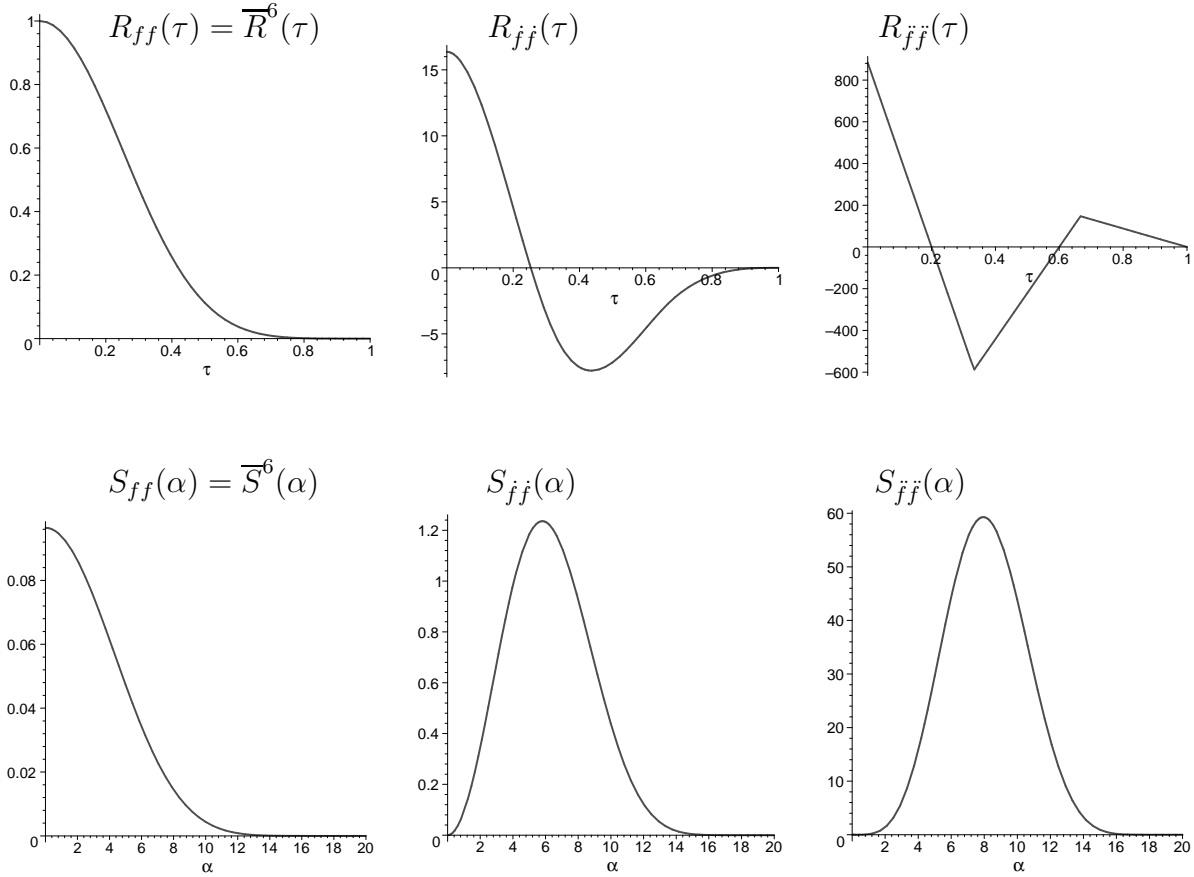


Abbildung 3.3: Korrelationsfunktionen von $f^{(k)}(t, \omega)$, $k = 0, 1, 2$, mit $R_{ff}(\tau) = \overline{R}^6(\tau)$ und dazugehörige Spektraldichten

Der Vergleich der Korrelationsfunktionen der zweimal differenzierbaren Prozesse (Beispiele 3.14 und 3.22) zeigt, daß sich die konstruierten Korrelationsfunktionen beider Methoden für höhere Differenzierbarkeit unterscheiden. Die Vorteile der B-Spline-Korrelationsfunktionen liegen darin, daß erstens explizite Formeln für die Korrelationsfunktion sowie die Spektraldichte vorliegen und sich zweitens die Anzahl der Teilintervalle des Definitionsgebietes bei der stückweisen Definition mit steigender Ordnung nur um jeweils zwei erhöht. Letzteres macht sich besonders bei der Bestimmung von Korrelationsmomenten und Korrekturtermen bemerkbar.

Kapitel 4

Korrelationsfunktion bei glatter Kernfunktion

Ziel dieses Kapitels ist die Berechnung beziehungsweise die Approximation von zweiten Momenten des Integralfunktional

$$x(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds \quad (4.1)$$

und dessen Ableitung mittels asymptotischer Entwicklung für $\varepsilon \rightarrow 0$. Dabei ist die Kernfunktion $Q(\cdot)$ eine deterministische, komplexwertige $(m \times n)$ -Matrixfunktion einer reellen Variablen und $(\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ eine Familie von n -dimensionalen ε -korrelierten Zufallsprozessen, die Annahme 3.2 erfüllt. Neben diesem allgemeinen Fall (komplexwertige Vektoren) wird zur Veranschaulichung noch der Spezialfall eindimensionaler, reellwertiger Kernfunktionen und Zufallsprozesse betrachtet, da sich hier in der Darstellung einige Vereinfachungen ergeben.

Bemerkung 4.1 Die in der Einleitung motivierten Anwendungen führen im Allgemeinen zu reellwertigen Differentialgleichungssystemen. Effektive Berechnungsmethoden und Reduktionsverfahren (vgl. [13, 34, 43, 46]) erfolgen jedoch an komplexwertigen Erstsatzsystemen. Aus diesem Grund wird von Anfang an vom komplexwertigen Fall ausgegangen.

Die asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion beruht auf der Taylorentwicklung der Kernfunktion $Q(\cdot)$. Als Voraussetzung an eine Kernfunktion $Q(\cdot)$ mit Definitionsbereich \mathbb{R}_+ soll gefordert werden, daß für ein $N \in \mathbb{N}_0$ die folgenden Bedingungen auf \mathbb{R}_+ erfüllt sind.

Annahme 4.2

- $Q(\cdot)$ ist für $N \geq 1$ N -mal stetig differenzierbar,

- $Q^{(N)}(\cdot)$ ist absolutstetig,
- $Q^{(k)}(\cdot) \in L_1 \cap L_2$, $k = 0, \dots, N + 1$.

Die Ableitung $Q^{(N+1)}(\cdot)$ der absolutstetigen Funktion $Q^{(N)}(\cdot)$ existiert fast überall (siehe zum Beispiel [15] oder [42]). Während die Funktionen $Q^{(k)}(\cdot)$ für $k = 0, \dots, N$ auf Grund obiger Annahme beschränkt sind, wird diese Eigenschaft für $Q^{(N+1)}(\cdot)$ zunächst nicht gefordert.

Die Annahme 4.2 ist hinreichend für eine Entwicklung der Kernfunktion bis zur Ordnung N

$$Q(t_0 + t) = \sum_{j=0}^N \frac{t^j}{j!} Q^{(j)}(t_0) + \varrho_Q^{N+1}(t_0, t), \quad t, t_0 \in \mathbb{R}_+$$

mit dem Restglied in Integralform

$$\varrho_Q^{N+1}(t_0, t) = \frac{1}{N!} \int_{t_0}^{t_0+t} Q^{(N+1)}(u) (t_0 + t - u)^N du.$$

Definition 4.3

Die Menge aller auf \mathbb{R}_+ definierten Funktionen $Q(\cdot)$, die Annahme 4.2 erfüllen, sei mit \mathfrak{G}^N bezeichnet:

$$\mathfrak{G}^N := \{Q(\cdot) : Q(\cdot) \text{ erfüllt Annahme 4.2}\}.$$

Dabei wird im Zusammenhang der Verwendung klar, ob die Werte von $Q(\cdot)$ in \mathbb{R} , $\mathbb{R}^{m \times n}$, \mathbb{C} oder $\mathbb{C}^{m \times n}$ liegen.

$Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ wird sich als geeignete Bedingung für eine „zulässige“ Kernfunktion bei der asymptotischen Entwicklung der Korrelationsfunktion des Integralfunktionals (4.1) bis zur Ordnung N erweisen. Die Forderung $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$ wird die Voraussetzung für eine Entwicklung der Korrelationsfunktion der Ableitung

$$\dot{x}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q'(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds + Q(0) \varepsilon f(t, \omega) \quad (4.2)$$

bis zur Ordnung N sein.

Ist $Q(0) = 0$, dann ist die Ableitung $\dot{x}(t, \omega)$ ein Integralfunktional vom Typ (4.1) und die gesuchte Korrelationsfunktion ist auf analogem Wege zu bestimmen. Ziel dieses Kapitels ist unter anderem, die Korrelationsfunktion von (4.2) zu bestimmen, wenn $Q(0)$ nicht verschwindet.

4.1 Entwicklungssatz für die Korrelationsfunktion

Zunächst sollen die gemischten zweiten Momente von Integralfunktionalen mit möglicherweise verschiedenen Kernfunktionen untersucht werden. Die Herleitung basiert auf [31] und [41].

Betrachtet man die Prozesse

$$x_k(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q_k(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds, \quad k = 1, 2 \quad (4.3)$$

ergibt sich die Erwartungswertfunktion $\mathbf{E}\{x_k(t)\} = 0$ und die (Kreuz-)Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{x_k(t)x_l^*(t+\tau)\} &= \mathbf{E}\left\{\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} Q_k(t-u) \varepsilon f(u) \varepsilon f^*(v) Q_l^*(t+\tau-v) dv du\right\} \\ &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} Q_k(t-u) R_{\varepsilon f \varepsilon f^*}(v-u) Q_l^*(t+\tau-v) dv du \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q_k(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f^*}(u+\tau-v) Q_l^*(v) dv du \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q_k(u) R\left(\frac{u+\tau-v}{\varepsilon}\right) Q_l^*(v) dv du \\ &= R_{x_k x_l}(\tau). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mittels der Variablentransformation $u' = u$, $v' = \frac{u+\tau-v}{\varepsilon}$ mit der Umkehrabbildung $v = \tau + u - \varepsilon v'$ und dem Betrag der Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} \right| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -\varepsilon \end{array} \right\| = \varepsilon$$

berechnet man

$$\begin{aligned} R_{x_k x_l}(\tau) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_0^{\infty} Q_k(u') R(v') Q_l^*(u' + \tau - \varepsilon v') du' dv' \\ &\quad + \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \int_{\varepsilon v' - \tau}^{\infty} Q_k(u') R(v') Q_l^*(u' + \tau - \varepsilon v') du' dv' \\ &= \varepsilon \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} Q_k(u) R(v) Q_l^*(u + \tau - \varepsilon v) dv du \\ &\quad + \varepsilon \int_0^{\infty} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} Q_k(u - \tau + \varepsilon v) R(v) Q_l^*(u) dv du. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Im weiteren wird $\tau \geq 0$ angenommen, der Fall $\tau < 0$ folgt aus der Beziehung

$$\begin{aligned} R_{x_k x_l}(\tau) &= \mathbf{E} \{x_k(t)x_l^*(t+\tau)\} = \mathbf{E} \{x_l(t+\tau)x_k^*(t)\}^* = \mathbf{E} \{x_l(t)x_k^*(t-\tau)\}^* \\ &= R_{x_l x_k}^*(-\tau). \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung der Funktionen $Q_l(u+\tau-\varepsilon v)$ und $Q_k(u-\tau+\varepsilon v)$ an der Stelle $u+\tau$ ergibt

$$Q_l(u+\tau-\varepsilon v) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} Q_l^{(j)}(u+\tau)(-\varepsilon v)^j + \tilde{\varrho}_l^{N+1}(\tau, u, \varepsilon v)$$

und

$$Q_k(u-\tau+\varepsilon v) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} Q_k^{(j)}(u+\tau)(-2\tau+\varepsilon v)^j + \hat{\varrho}_k^{N+1}(\tau, u, \varepsilon v)$$

mit den Restgliedern

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}_l^{N+1}(\tau, u, \varepsilon v) &= \frac{1}{N!} \int_{u+\tau}^{u+\tau-\varepsilon v} Q_l^{(N+1)}(s)(\tau+u-\varepsilon v-s)^N ds \\ &= \frac{1}{N!} \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} Q_l^{(N+1)}(u+s)(\tau-\varepsilon v-s)^N ds \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}_k^{N+1}(\tau, u, \varepsilon v) &= \frac{1}{N!} \int_{u+\tau}^{u-\tau+\varepsilon v} Q_k^{(N+1)}(s)(u-\tau+\varepsilon v-s)^N ds \\ &= \frac{1}{N!} \int_{\tau}^{\varepsilon v-\tau} Q_k^{(N+1)}(u+s)(\varepsilon v-\tau-s)^N ds. \end{aligned}$$

Setzt man diese Entwicklungen ein, folgt die Darstellung

$$\begin{aligned} R_{x_k x_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \int_0^{\infty} Q_k(u) \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v)(-v)^j dv Q_l^{(j)*}(u+\tau) du \\ &\quad + \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \int_0^{\infty} Q_k^{(j)}(u+\tau) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \left(v - \frac{2\tau}{\varepsilon}\right)^j R(v) dv Q_l^*(u) du + \varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$\begin{aligned} \varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} Q_k(u) R(v) \tilde{\varrho}_l^{N+1*}(\tau, u, \varepsilon v) dv du \\ &\quad + \varepsilon \int_0^{\infty} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \hat{\varrho}_k^{N+1}(\tau, u, \varepsilon v) R(v) Q_l^*(u) dv du. \end{aligned}$$

Die Entwicklung der Korrelationsfunktion wird mit dem Einsetzen der Korrelationsmomente und deren Korrekturterme übersichtlicher gestaltet, insbesondere folgt aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v)(-v)^j dv &= \int_{-\infty}^{\infty} (-v)^j R(v) dv - \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} (-v)^j R(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v^j R^*(v) dv + (-1)^{j+1} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} v^j R(v) dv = \mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

die Formulierung

$$\begin{aligned} R_{x_k x_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \int_0^{\infty} Q_k(u) \left[\mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] Q_l^{(j)*}(u + \tau) du \\ &\quad + \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \int_0^{\infty} Q_k^{(j)}(u + \tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l^*(u) du + \varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon). \end{aligned}$$

Für $\tau = 0$ gilt aufgrund der Eigenschaften der Korrelationsmomente und $\kappa_{0,j}(0) = \kappa_{2,j}(0) = \kappa_j$ (siehe (3.1)) die Vereinfachung

$$\mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}(0) = \kappa_j^* + (-1)^j \kappa_j + (-1)^{j+1} \kappa_j = \kappa_j^*. \quad (4.6)$$

Bevor die bisherigen Ergebnisse in einem Satz zusammengefaßt werden, soll eine Notation für Ausdrücke der Art

$$\int_0^{\infty} Q_k(u) \mu_j^* Q_l^{(j)*}(u + \tau) du$$

eingeführt werden. Dabei handelt es sich um ein Integral über ein Produkt von drei matrixwertigen Funktionen, wobei die mittlere Funktion nicht von der Integrationsvariable abhängt, aber aufgrund der Nichtkommutativität der Matrixmultiplikation im Integral verbleiben muß. Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird eine Abbildung

$$\langle q_{kl}^j(\tau), B \rangle := \int_0^{\infty} Q_k(u) B Q_l^{(j)*}(u + \tau) du$$

definiert, wenn B eine Matrix (passender Dimension) ist, die nicht von u abhängt. Dabei sei die Funktion $q_{kl}^j(\tau)$ selbst durch

$$q_{kl}^j(\tau) := \langle q_{kl}^j(\tau), I \rangle = \int_0^{\infty} Q_k(u) Q_l^{(j)*}(u + \tau) du$$

bestimmt. Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned}\langle q_{kl}^j(\tau), B_1 + B_2 \rangle &= \langle q_{kl}^j(\tau), B_1 \rangle + \langle q_{kl}^j(\tau), B_2 \rangle \\ (\langle q_{kl}^j(\tau), B \rangle)^* &= \langle q_{kl}^{j*}(\tau), B^* \rangle.\end{aligned}$$

Die eingeführte Schreibweise ermöglicht eine einheitliche Verwendung der Bezeichnung der Funktionen $q_{kl}^j(\tau)$ und wird sich später als praktikabel erweisen. Für Zahlen B zerfällt die Abbildung in das Produkt

$$\langle q_{kl}^j(\tau), B \rangle = q_{kl}^j(\tau)B.$$

Satz 4.4

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$. Dann gelten für die Korrelationsfunktionen $R_{x_k x_l}(\tau)$ für $\tau \geq 0$ die gleichmäßigen asymptotischen Entwicklungen

$$R_{x_k x_l}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} [\langle q_{kl}^j(\tau), \mu_j^* \rangle + \mathbf{1}_{[0, \varepsilon)}(\tau) c_{kl}^j(\tau, \varepsilon)] + \varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)$$

mit

$$c_{kl}^j(\tau, \varepsilon) := (-1)^{j+1} \left\langle q_{kl}^j(\tau), \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle + \left\langle q_{lk}^{j*}(\tau), \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \quad (4.7)$$

und dem Restglied

$$\begin{aligned}\varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_\tau^{\tau - \varepsilon v} Q_k(u) R(v) Q_l^{(N+1)*}(u+s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv du \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty \int_\tau^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+1)}(u+s) R(v) Q_l^*(u) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv du \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}),\end{aligned}$$

wobei $j = 0, \dots, N$ und $k, l = 1, 2$ sind. Die Werte für $\tau \leq 0$ ermittelt man aus der Beziehung

$$R_{x_k x_l}(\tau) = R_{x_l x_k}^*(-\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} [\langle q_{lk}^{j*}(-\tau), \mu_j \rangle + \mathbf{1}_{[0, \varepsilon)}(-\tau) c_{lk}^{j*}(-\tau, \varepsilon)] + \varrho_{x_l x_k}^{N+1*}(-\tau, \varepsilon).$$

Für $\tau = 0$ gilt speziell

$$R_{x_k x_l}(0) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} [\langle q_{kl}^j(0), \kappa_j^* \rangle + \langle q_{lk}^{j*}(0), \kappa_j \rangle] + \varrho_{x_k x_l}^{N+1}(0, \varepsilon).$$

Bemerkung 4.5 Die Schreibweise $c_{kl}^j(\tau, \varepsilon) = \mathbf{1}_{[0, \varepsilon)}(\tau) c_{kl}^j(\tau, \varepsilon)$ soll verdeutlichen, daß die Funktionen $c_{kl}^j(\tau, \varepsilon)$, die im weiteren Korrekturterme der Entwicklungskoeffizienten genannt werden, für $|\tau| > \varepsilon$ keinen Beitrag zur Entwicklung liefern. Die Ursache liegt in den Eigenschaften der vorkommenden Korrekturterme der Korrelationsmomente begründet. Für diese gilt ebenfalls $\kappa_{i,j}(\frac{\tau}{\varepsilon}) = \mathbf{1}_{[0, \varepsilon)}(\tau) \kappa_{i,j}(\frac{\tau}{\varepsilon})$ (vergleiche Bemerkung 3.6). Die Funktionen $\langle q_{kl}^j(\tau), \mu_j^* \rangle$ und $\langle q_{kl}^j(0), \kappa_j^* \rangle$ erhalten die Bezeichnung Entwicklungskoeffizienten.

Beweis.

Es ist zu zeigen, daß die im Satz angegebene Darstellung der Korrelationsfunktion eine bezüglich τ gleichmäßige asymptotische Entwicklung zu den Potenzen $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{N+1}$ im Sinne der Definition 2.2 ist, das heißt daß

$$\langle q_{kl}^j(\tau), \mu_j^* \rangle + c_{kl}^j(\tau, \varepsilon) = \mathcal{O}(1), \quad j = 0, \dots, N \quad \text{und} \quad \varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

gleichmäßig bezüglich τ gilt.

Bei Grenzwertbetrachtungen läßt sich der komplexe, matrixwertige Fall auf den reellen, eindimensionalen Fall reduzieren, indem man die Matrizenprodukte ausmultipliziert sowie den Realteil und den Imaginärteil elementweise untersucht. Die Funktionen $Q_1(\cdot)$, $Q_2(\cdot)$ und $R(\cdot)$ werden also der Einfachheit halber reellwertig angenommen, wobei $R(\cdot)$ ein Element einer matrixwertigen Korrelationsfunktion darstellt.

Wegen $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ ist die gestellte Forderung an die Entwicklungskoeffizienten und deren Korrekturterme erfüllt, da die Funktionen $R(\cdot)$ und $q_{kl}^j(\tau)$ für $\tau \in \mathbb{R}_+$ durch entsprechende Konstanten

$$|q_{kl}^j(\tau)| = \left| \int_0^\infty Q_k(u) Q_l^{(j)}(u + \tau) du \right| \leq C_{kl,j}, \quad j = 0, \dots, N + 1$$

beschränkt sind. Es verbleibt der Nachweis für die beiden Summanden des Restgliedes. Zum einen zeigt man

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_{\tau}^{\tau - \varepsilon v} Q_k(u) R(v) Q_l^{(N+1)}(u + s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv du \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{N!} \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \left| \int_{\tau}^{\tau - \varepsilon v} |R(v)| |(\tau - \varepsilon v - s)^N| \left| \int_0^\infty Q_k(u) Q_l^{(N+1)}(u + s) du \right| ds \right| dv \\ & \leq C_{kl, N+1} \frac{\varepsilon}{N!} \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} |R(v)| \left| \int_{\tau}^{\tau - \varepsilon v} |\tau - \varepsilon v - s|^N ds \right| dv \\ & \leq C_{kl, N+1} \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+1)!} \int_{-1}^1 |R(v)| |v|^{N+1} dv, \end{aligned}$$

wenn

$$\left| \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} |\tau - \varepsilon v - s|^N ds \right| = \left| \int_{-\varepsilon v}^0 |s|^N ds \right| = \frac{|\varepsilon v|^{N+1}}{N+1}$$

verwendet wird. Zum anderen ist

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^{\infty} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+1)}(u+s) R(v) Q_l(u) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv du \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \left| \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} |R(v)| |(\varepsilon v - \tau - s)^N| \left| \int_0^{\infty} Q_l(u) Q_k^{(N+1)}(u+s) du \right| ds \right| dv \\ & \leq C_{lk, N+1} \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} |R(v)| \left| \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} |\varepsilon v - \tau - s|^N ds \right| dv \\ & \leq C_{lk, N+1} \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+1)!} \int_0^1 |R(v)| v^{N+1} dv \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\left| \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} |\varepsilon v - \tau - s|^N ds \right| = \left| \int_{\varepsilon v - 2\tau}^0 |s|^N ds \right| = \frac{|\varepsilon v - 2\tau|^{N+1}}{(N+1)} \leq \frac{(\varepsilon v)^{N+1}}{(N+1)},$$

da im vorliegenden Fall $0 \leq \tau \leq \varepsilon v$ die Ungleichung $|\varepsilon v - 2\tau| \leq \varepsilon v$ gilt. \square

Die Vorgehensweise im Beweis, die Matrizen auszumultiplizieren, bietet sich für die Angabe einer konkreten Abschätzung für das Restglied $\varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)$ nicht an. Stattdessen soll von nun an $|\cdot|$ für Matrizen eine Matrixnorm bezeichnen, für die gilt $|AB| \leq |A||B|$ und die mit einer Vektornorm $|\cdot|$ verträglich (oder auch konsistent) ist, d. h. $|Ax| \leq |A||x|$. Beispiele sind induzierte Matrixnormen, auch Operatornorm genannt (siehe [23, 44]).

Die Korrelationsfunktion des 1-korrelierten Prozesses sei durch die Konstante C_R beschränkt

$$|R(\tau)| \leq C_R \mathbf{1}_{[-1,1]}(\tau).$$

Weiterhin gibt es aufgrund der Annahme 4.2 für Kernfunktionen $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ Konstanten, so daß

$$|Q^{(j)}(t)| \leq C_{Q^{(j)}}, \quad j = 0, \dots, N, \quad t \in [0, \infty)$$

gilt. Für die Abschätzung des Restgliedes wird zusätzlich gefordert, daß $Q^{(N+1)}(\cdot)$ fast überall beschränkt ist, d. h.

$$|Q^{(N+1)}(t)| \leq C_{Q^{(N+1)}} \text{ für fast alle } t \in [0, \infty). \quad (4.8)$$

Ein ähnliches Vorgehen wie im Beweis

$$\begin{aligned}
|\varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \left| \int_\tau^{\tau-\varepsilon v} |Q_k(u)| |R(v)| |Q_l^{(N+1)*}(u+s)| |\tau - \varepsilon v - s|^N ds \right| dv du \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty \left| \int_\tau^{\varepsilon v - \tau} |Q_k^{(N+1)}(u+s)| |R(v)| |Q_l^*(u)| |\varepsilon v - \tau - s|^N ds \right| dv du \\
&\leq C_{Q_l^{(N+1)*}} \frac{\varepsilon}{N!} \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} |R(v)| \left| \int_\tau^{\tau-\varepsilon v} |\tau - \varepsilon v - s|^N ds \right| dv \int_0^\infty |Q_k(u)| du \\
&\quad + C_{Q_k^{(N+1)}} \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty |R(v)| \left| \int_\tau^{\varepsilon v - \tau} |\varepsilon v - \tau - s|^N ds \right| dv \int_0^\infty |Q_l^*(u)| du \\
&\leq C_{Q_l^{(N+1)*}} C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+1)!} \int_{-1}^1 |v|^{N+1} dv \int_0^\infty |Q_k(u)| du \\
&\quad + C_{Q_k^{(N+1)}} C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+1)!} \int_0^1 v^{N+1} dv \int_0^\infty |Q_l^*(u)| du
\end{aligned}$$

führt zur Abschätzung

$$|\varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \leq C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} \left[2C_{Q_l^{(N+1)*}} \int_0^\infty |Q_k(u)| du + C_{Q_k^{(N+1)}} \int_0^\infty |Q_l^*(u)| du \right]. \quad (4.9)$$

Die asymptotische Entwicklung in Satz 4.4 gilt gleichmäßig bezüglich τ für $\varepsilon \rightarrow 0$, d. h. die Forderungen (2.10) und (2.11) sind unabhängig von τ erfüllt. Betrachtet man die Entwicklung jedoch punktweise, d. h. für feste τ und $\varepsilon \rightarrow 0$, so kann man für $\tau \neq 0$ annehmen, daß $|\tau| \geq \varepsilon$ gilt und die Korrekturterme $\mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(\tau) c_{kl}^j(\tau, \varepsilon)$ beziehungsweise $\mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(-\tau) c_{lk}^{j*}(-\tau, \varepsilon)$ verschwinden. Die Korrekturterme sind dann von beliebig hoher Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^j)$ und werden zum Restglied hinzugefügt.

Korollar 4.6

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$. Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.4 gilt für festes τ und $\varepsilon \rightarrow 0$ die punktweise asymptotische Entwicklung

$$R_{x_k x_l}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \begin{cases} \langle q_{kl}^j(\tau), \mu_j^* \rangle & \tau > 0 \\ \langle q_{kl}^j(0), \kappa_j^* \rangle + \langle q_{lk}^{j*}(0), \kappa_j \rangle & \tau = 0 \\ \langle q_{lk}^{j*}(-\tau), \mu_j \rangle & \tau < 0 \end{cases} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Die punktweise Entwicklung nach Korollar 4.6 ist eine Entwicklung in eine Potenzreihe von ε . Der Vorteil gegenüber der gleichmäßigen Entwicklung nach Satz 4.4 liegt zum einen in der Eindeutigkeit der Entwicklungskoeffizienten und zum anderen in der einfacheren Berechnung.

Die Approximation einzelner Werte der Korrelationsfunktion ist mit der punktweisen Entwicklung möglich. Diese ist als Funktion von τ im allgemeinen im Punkt $\tau = 0$ unstetig. Die Korrekturterme $c_{kl}^j(\tau, \varepsilon)$ der Entwicklung nach Satz 4.4 beheben diese Unstetigkeit, worin auch die Namensgebung „Korrekturterm“ begründet liegt. Für die Approximation der Korrelationsfunktion als Funktion von τ bevorzugt man die gleichmäßige Entwicklung, da die zu approximierenden Korrelationsfunktionen stetiger Prozesse ebenfalls stetig sind. Beide Varianten unterscheiden sich nur für $0 < |\tau| < \varepsilon$.

Jeweils im Anschluß an jeden der folgenden Entwicklungssätze wird ein Korollar formuliert, das die Entwicklung im Sinne von Korollar 4.6 angibt.

Beispiel 4.7 Zur Illustration soll die Entwicklung der Korrelationsfunktion eines Integralfunctionals (4.1) mit Kernfunktion $Q(\cdot)$ dienen. Im reellen eindimensionalen Fall mit $Q_1(\cdot) = Q_2(\cdot) = Q(\cdot)$ vereinfacht sich die Darstellung der Entwicklung nach Satz 4.4. Mit $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ gilt für $\tau \in \mathbb{R}$

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_j(|\tau|) \left[\mu_j + \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(\tau) \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \varrho_{xx}^{N+1}(|\tau|, \varepsilon) \quad (4.10)$$

mit den Funktionen

$$q_j(\tau) = \int_0^{\infty} Q(u) Q^{(j)}(u + \tau) du$$

und den zusammengefaßten Korrekturtermen der Korrelationsmomente

$$\tilde{\kappa}_j(\alpha) := \kappa_{2,j}(\alpha) + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}(\alpha).$$

Aufgrund der Eigenschaft (3.2) der Korrekturterme gilt für jede 1-korrelierte Korrelationsfunktion

$$\tilde{\kappa}_0(\alpha) = \kappa_{2,0}(\alpha) - \kappa_{0,0}(\alpha) = 0.$$

Folglich enthält die Approximation für $N = 0$ keinen Korrekturterm und stimmt mit dem Ergebnis einer punktweisen Entwicklung überein. Für $N \in \mathbb{N}_0$ hat die punktweise Approximation die Darstellung

$${}^N \hat{R}_{xx}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_j(|\tau|) \begin{cases} \mu_j & \tau \neq 0 \\ \nu_j & \tau = 0 \end{cases},$$

wobei $\mu_{2j+1} = 0$ für $j = 0, 1, \dots$ zu beachten ist. Die Approximation ${}^0 \hat{R}_{xx}(\tau) = {}^0 R_{xx}(\tau)$ ist die Korrelationsfunktion des Integralfunctionals mit Kernfunktion $Q(\cdot)$ und eines Zufallsprozesses (im verallgemeinerten Sinn), der die Korrelationsfunktion $R(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$ mit der Diracschen δ -Distribution und dem Parameter $\sigma^2 = \varepsilon \mu_0$ besitzt.

Ein einfaches Beispiel (siehe auch [37]) ist das Integralfunktional

$$x(t, \omega) = \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} \varepsilon f(s, \omega) ds$$

mit der Kernfunktion $Q(t) = e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$. Diese Kernfunktion ist beliebig oft stetig differenzierbar und erfüllt somit die Annahme 4.2 für beliebiges N . $(\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ sei die Familie der Bachelier-Wiener-Prozesse, d. h. stationäre ε -korrelierte Prozesse mit der Korrelationsfunktion des 1-korrelierten Prozesses aus Beispiel 3.8

$$R(\tau) = (1 - |\tau|)_+.$$

Für die asymptotische Entwicklung sind zum einen die nur von der Korrelationsfunktion von $(\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ abhängigen Korrekturterme der Korrelationsmomente

$$\tilde{\kappa}_j(\alpha) = \frac{-2(1-\alpha)(-\alpha)^{j+1}}{j+1} + \frac{(1-2\alpha)^{j+2} - (-1)^j}{(j+1)(j+2)}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

zu ermitteln, speziell

$$\tilde{\kappa}_1(\alpha) = \frac{1}{3}(1-\alpha)_+^3 \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}_2(\alpha) = -\frac{2}{3}\alpha(1-\alpha)_+^3.$$

Zum anderen berechnet man die nur von der Kernfunktion des Integralfunktionals abhängigen Entwicklungskoeffizienten

$$q_j(\tau) = \int_0^\infty e^{-\gamma u} (-\gamma)^j e^{-\gamma(u+\tau)} du = -\frac{1}{2}(-\gamma)^{j-1} e^{-\gamma\tau}.$$

Die gleichmäßige Approximation für $N = 2$ hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} {}^2R_{xx}(\tau) &= \varepsilon q_0(|\tau|)\mu_0 + \varepsilon^2 q_1(|\tau|)\tilde{\kappa}_1\left(\frac{|\tau|}{\varepsilon}\right) + \frac{\varepsilon^3}{2} q_2(|\tau|) \left[\mu_2 + \tilde{\kappa}_2\left(\frac{|\tau|}{\varepsilon}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-\gamma|\tau|} \left\{ \frac{\varepsilon}{\gamma} - \frac{\varepsilon^2}{3} \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right)_+^3 + \frac{\varepsilon^3 \gamma}{6} \left[\frac{1}{2} - 2 \frac{|\tau|}{\varepsilon} \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right)_+^3 \right] \right\}. \end{aligned}$$

In dieser Darstellung wurden die Terme nicht weiter zusammengefaßt, damit es möglich ist, auch die Approximationen ${}^0R_{xx}(\tau)$ und ${}^1R_{xx}(\tau)$ abzulesen.

Dieses Beispiel wird später fortgesetzt, graphische Darstellungen befinden sich am Ende von Abschnitt 4.4.

4.2 Kreuzkorrelationsfunktion von Integralfunktional und Ableitung

Nun soll die asymptotische Entwicklung der Kreuzkorrelationsfunktion von einem Integralfunktional (4.1) und dessen Ableitung (4.2) hergeleitet werden. Es wird analog zum letzten Abschnitt der allgemeinere Fall verschiedener Kernfunktionen (4.3) behandelt.

Die Kreuzkorrelationsfunktion

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \{x_k(t)\dot{x}_l^*(t+\tau)\} \\
&= \mathbf{E} \left\{ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} Q_k(t-u) \varepsilon f(u) \varepsilon f^*(v) Q_l'^*(t+\tau-v) dv du \right\} \\
&+ \mathbf{E} \left\{ \int_{-\infty}^t Q_k(t-u) \varepsilon f(u) \varepsilon f^*(t+\tau) du \right\} Q_l^*(0) \\
&= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} Q_k(t-u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(v-u) Q_l'^*(t+\tau-v) dv du \\
&+ \int_{-\infty}^t Q_k(t-u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(t+\tau-u) du Q_l^*(0) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty Q_k(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau+u-v) Q_l'^*(v) dv du + \int_0^\infty Q_k(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau+u) du Q_l^*(0) \\
&= R_{x_k \dot{x}_l}(\tau)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

besteht aus zwei Summanden, wobei sich der erste nach Satz 4.4 entwickeln läßt. Infolge dessen interessieren hier insbesondere Entwicklungen des zweiten Summanden, d. h. von Integralen der Form

$$I(\tau) = \int_0^\infty Q(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau+u) du = \int_0^\infty Q(u) R\left(\frac{\tau+u}{\varepsilon}\right) du = \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty Q(\varepsilon u - \tau) R(u) du.$$

Dabei ist zu erkennen, daß $I(\tau) = 0$ ist für $\tau \geq \varepsilon$. Das Vorgehen für $\tau < \varepsilon$ basiert auf der Entwicklung von $Q(\varepsilon u - \tau)$ an der Stelle $|\tau|$. Hiermit ist gemeint, daß die Funktion für $\tau > 0$ an der Stelle τ und für $\tau \leq 0$ an der Stelle $-\tau$ entwickelt wird. Unter den Voraussetzungen $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ und $\varepsilon u - \tau \geq 0$, d. h. $\varepsilon u \geq \tau$, gilt

$$Q(\varepsilon u - \tau) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} Q^{(j)}(|\tau|) (\varepsilon u - \tau - |\tau|)^j + \varrho_Q^{N+1}(\tau, \varepsilon u),$$

wobei

$$\varrho_Q^{N+1}(\tau, \varepsilon u) = \frac{1}{N!} \int_{|\tau|}^{\varepsilon u - \tau} Q^{(N+1)}(v) (\varepsilon u - \tau - v)^N dv$$

das Restglied der Taylorentwicklung in Integralform ist.

Durch Einsetzen der Entwicklung erhält man

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} Q^{(j)}(|\tau|) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \left(u - \frac{\tau + |\tau|}{\varepsilon}\right)^j R(u) du + \varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon) \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} Q^{(j)}(|\tau|) \begin{cases} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \left(u - \frac{2\tau}{\varepsilon}\right)^j R(u) du & \tau > 0 \\ \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} u^j R(u) du & \tau \leq 0 \end{cases} + \varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon) \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$\varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \varrho_Q^{N+1}(\tau, \varepsilon u) R(u) du.$$

Wird für $\tau \leq 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} u^j R(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} u^j R(u) du - \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} u^j R(u) du = \mu_j - \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} (-u)^j R(-u) du \\ &= \mu_j - (-1)^j \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} u^j R^*(u) du = \mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^* \left(-\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

berücksichtigt, ergibt sich folgender Satz.

Satz 4.8

Sei $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$. Dann gilt die gleichmäßige asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \int_0^{\infty} Q(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau + u) du \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} Q^{(j)}(|\tau|) \begin{cases} \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) & \tau > 0 \\ \mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^* \left(-\frac{\tau}{\varepsilon}\right) & \tau \leq 0 \end{cases} + \varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon) \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$\varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \int_{|\tau|}^{\varepsilon u - \tau} Q^{(N+1)}(v) (\varepsilon u - \tau - v)^N R(u) dv du = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

und speziell für $\tau = 0$

$$I(0) = \int_0^{\infty} Q(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(u) du = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} Q^{(j)}(0) \kappa_j + \varrho_I^{N+1}(0, \varepsilon).$$

Beweis.

Der Nachweis $\varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$ wird im Beweis des folgenden Satzes 4.11 geführt, da sich dort die Aussage als Folgerung ergibt. □

Bemerkung 4.9 Aufgrund der Beziehung $\kappa_j = \kappa_{2,j}(0) = \mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^*(0)$ sind die Approximationen des Integrals $I(\tau)$ stetig für $\tau = 0$. Die Entwicklung kann auch in der Form

$$\begin{aligned} I(\tau) - \varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} Q^{(j)}(|\tau|) \left[\mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(\tau) \mu_j + \mathbf{1}_{(-\varepsilon, 0]}(\tau) (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^* \left(-\frac{\tau}{\varepsilon} \right) + \mathbf{1}_{(0, \varepsilon)}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} Q^{(j)}(|\tau|) \left[\mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(\tau) \mu_j + \mathbf{1}_{(-\varepsilon, 0)}(\tau) (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^* \left(-\frac{\tau}{\varepsilon} \right) + \mathbf{1}_{[0, \varepsilon)}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] \end{aligned}$$

angegeben werden.

Nun soll unter der Voraussetzung (4.8), der Beschränktheit der Funktion $Q^{(N+1)}(\cdot)$, eine Abschätzung des Restgliedes angegeben werden.

Im Fall $\tau \geq \varepsilon$ gilt wegen $1 \leq \frac{\tau}{\varepsilon} \leq u$ für das Restglied $\varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon) = \mathcal{O}$. Im Fall $\tau < \varepsilon$ ist bezüglich u über $\frac{\tau}{\varepsilon} \leq u \leq \infty$ zu integrieren und es gilt

$$\begin{aligned} |\varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \left| \int_{|\tau|}^{\varepsilon u - \tau} |Q^{(N+1)}(v)| |(\varepsilon u - \tau - v)^N| |R(u)| dv \right| du \\ &\leq C_{Q^{(N+1)}} \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} |R(u)| \left| \int_{|\tau|}^{\varepsilon u - \tau} |(\varepsilon u - \tau - v)^N| dv \right| du. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man weiterhin

$$\left| \int_{|\tau|}^{\varepsilon u - \tau} |(\varepsilon u - \tau - v)^N| dv \right| = \left| \int_{\varepsilon u - \tau - |\tau|}^0 |v|^N dv \right| = \frac{|\varepsilon u - \tau - |\tau||^{N+1}}{(N+1)} \leq \frac{|\varepsilon u|^{N+1}}{(N+1)},$$

da für $\tau \leq \varepsilon u$ gilt $|\varepsilon u - \tau - |\tau|| \leq |\varepsilon u|$, so folgt

$$\begin{aligned} |\varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon)| &\leq C_{Q^{(N+1)}} \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+1)!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} |R(u)| |u|^{N+1} du \\ &\leq C_{Q^{(N+1)}} \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+1)!} \int_{-1}^1 |R(u)| |u|^{N+1} du \leq 2C_{Q^{(N+1)}} C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!}. \end{aligned}$$

Für $\tau \geq 0$ gilt die Abschätzung sogar ohne den Faktor 2.

Korollar 4.10

Sei $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$. Dann gilt die punktweise asymptotische Entwicklung

$$I(\tau) = \int_0^\infty Q(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau + u) du = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} Q^{(j)}(|\tau|) \begin{cases} 0 & \tau > 0 \\ \kappa_j & \tau = 0 \\ \mu_j & \tau < 0 \end{cases} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Nun ist es möglich, die Entwicklung der Kreuzkorrelationsfunktion (4.11) herzuleiten. Für $\tau \geq 0$ gilt mit Hilfe der Sätze 4.4 und 4.8

$$\begin{aligned} R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ \int_0^\infty Q_k(u) \mu_j^* Q_l^{(j+1)*}(u + \tau) du \right. \\ &\quad + (-1)^{j+1} \int_0^\infty Q_k(u) \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l^{(j+1)*}(u + \tau) du \\ &\quad \left. + \int_0^\infty Q_k^{(j)}(u + \tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l'^*(u) du + Q_k^{(j)}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l'^*(0) \right\} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_{\tau}^{\tau - \varepsilon v} Q_k(u) R(v) Q_l^{(N+2)*}(u + s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv du \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+1)}(u + s) R(v) Q_l'^*(u) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv du \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+1)}(s) (\varepsilon v - \tau - s)^N R(v) ds dv Q_l'^*(0) \end{aligned}$$

Unter Anwendung der partiellen Integration,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty Q_k^{(j)}(u + \tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l'^*(u) du \\ &= -Q_k^{(j)}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l'^*(0) - \int_0^\infty Q_k^{(j+1)}(u + \tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l'^*(u) du \end{aligned} \tag{4.12}$$

und

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty \int_\tau^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+1)}(u+s) R(v) Q_l'^*(u) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv du \\
&= - \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty \int_\tau^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+1)}(s) (\varepsilon v - \tau - s)^N R(v) ds dv Q_l^*(0) \\
&\quad - \int_0^\infty \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty \int_\tau^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+2)}(u+s) R(v) Q_l^*(u) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv du
\end{aligned} \tag{4.13}$$

sowie der Berücksichtigung der Beziehung

$$R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = -R_{\dot{x}_k x_l}(\tau) = -R_{x_l \dot{x}_k}^*(-\tau)$$

läßt sich diese Darstellung vereinfachen.

Satz 4.11

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$. Dann gilt die gleichmäßige asymptotische Entwicklung für $\tau \geq 0$

$$R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} [\langle q_{kl}^{j+1}(\tau), \mu_j^* \rangle + \mathbf{1}_{[0, \varepsilon)}(\tau) c_{kl}^{j,1}(\tau, \varepsilon)] + \varrho_{x_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)$$

mit den den Korrekturtermen

$$c_{kl}^{j,i}(\tau, \varepsilon) := (-1)^{j+1} \left\langle q_{kl}^{j+i}(\tau), \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle + (-1)^i \left\langle q_{lk}^{j+i*}(\tau), \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \tag{4.14}$$

und dem Restglied

$$\begin{aligned}
\varrho_{x_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_\tau^{\tau - \varepsilon v} Q_k(u) R(v) Q_l^{(N+2)*}(u+s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv du \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty \int_\tau^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+2)}(u+s) R(v) Q_l^*(u) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv du \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).
\end{aligned}$$

Die Entwicklung für $\tau \leq 0$ ergibt sich aus der Beziehung

$$R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = -R_{x_l \dot{x}_k}^*(-\tau)$$

und speziell für $\tau = 0$ gilt

$$R_{x_k \dot{x}_l}(0) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} [\langle q_{kl}^{j+1}(0), \kappa_j^* \rangle - \langle q_{lk}^{j+1*}(0), \kappa_j \rangle] + \varrho_{x_k \dot{x}_l}^{N+1}(0, \varepsilon).$$

Beweis.

Unter den gemachten Voraussetzungen sind analog zum Beweis von Satz 4.4 die Forderungen an eine gleichmäßige asymptotische Entwicklung erfüllt, speziell auch

$$\varrho_{x_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Insbesondere sind die in der Beziehung (4.13) vorkommenden Dreifachintegrale von dem Typ, der Bestandteil des Restgliedes $\varrho_{x_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)$ ist. Die Folge ist, daß das Doppelintegral die gleiche Ordnung für $\varepsilon \rightarrow 0$ hat, d. h. für das Restglied aus Satz 4.8 gilt ebenfalls

$$\varrho_I^{N+1}(\tau, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

□

Bemerkung 4.12 Die Bezeichnung der Korrekturterme (4.14) aus Satz 4.11 stellt eine Erweiterung zu (4.7) aus Satz 4.4 dar, denn es ist

$$c_{kl}^j(\tau, \varepsilon) = c_{kl}^{j,0}(\tau, \varepsilon).$$

Für das Restglied aus Satz 4.11 findet man die Abschätzung

$$|\varrho_{x_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \leq C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} \left[2C_{Q_i^{(N+2)*}} \int_0^\infty |Q_k(u)| du + C_{Q_k^{(N+2)}} \int_0^\infty |Q_l^*(u)| du \right].$$

Korollar 4.13

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$. Dann gilt die punktweise asymptotische Entwicklung

$$R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \begin{cases} \langle q_{kl}^{j+1}(\tau), \mu_j^* \rangle & \tau > 0 \\ \langle q_{kl}^{j+1}(0), \kappa_j^* \rangle - \langle q_{lk}^{j+1*}(0), \kappa_j \rangle & \tau = 0 \\ -\langle q_{lk}^{j+1*}(-\tau), \mu_j \rangle & \tau < 0 \end{cases} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Fortsetzung des Beispiels 4.7 Im skalaren reellwertigen Fall mit $Q_1(\cdot) = Q_2(\cdot) = Q(\cdot)$ kann Satz 4.11 in folgender Weise formuliert werden.

Sei $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$. Dann gilt für $\tau \in \mathbb{R}$ die gleichmäßige asymptotische Entwicklung

$$R_{x \dot{x}}(\tau) = \text{sign}(\tau) \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+1}(|\tau|) \left[\mu_j - \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(\tau) \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \varrho_{x \dot{x}}^{N+1}(|\tau|, \varepsilon) \quad (4.15)$$

mit den Korrekturtermen

$$\tilde{\kappa}_j(\alpha) := \kappa_{2,j}(\alpha) + (-1)^j \kappa_{0,j}(\alpha).$$

Für $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ ergeben sich die Korrekturterme

$$\tilde{\kappa}_j(\alpha) = \frac{(1 - 2\alpha)^{j+2} - 2(-\alpha)^{j+2} + (-1)^j}{(j+1)(j+2)}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

und speziell

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_0(\alpha) &= (1 - \alpha)_+^2 \\ \tilde{\kappa}_1(\alpha) &= -\alpha(1 - \alpha)_+^2 \\ \tilde{\kappa}_2(\alpha) &= \frac{1}{6}(7\alpha^2 - 2\alpha + 1)(1 - \alpha)_+^2. \end{aligned}$$

Eine Definition der Funktion $\text{sign}(\tau)$ an der Stelle $\tau = 0$ ist nicht wesentlich, da mit $\mu_j - \tilde{\kappa}_j(0) = 0$ auch ${}^N R_{x\dot{x}}(0) = 0 = R_{x\dot{x}}(0)$ ist.

Mit der Kernfunktion $Q(t) = e^{-\gamma t}$ ergibt sich die Approximation der Ordnung $N = 2$

$$\begin{aligned} {}^2 R_{x\dot{x}}(\tau) &= \text{sign}(\tau) \left\{ \varepsilon q_1(|\tau|) \left[\mu_0 - \tilde{\kappa}_0 \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] - \varepsilon^2 q_2(|\tau|) \tilde{\kappa}_1 \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^3}{2} q_3(|\tau|) \left[\mu_2 - \tilde{\kappa}_2 \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] \right\} \\ &= \text{sign}(\tau) e^{-\gamma|\tau|} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon} \right)_+^2 \right] + \frac{\varepsilon^2 \gamma}{2} \frac{|\tau|}{\varepsilon} \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon} \right)_+^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon^3 \gamma^2}{24} \left[1 - \left(7 \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} - 2 \frac{|\tau|}{\varepsilon} + 1 \right) \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon} \right)_+^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Da der führende Term ${}^0 R_{x\dot{x}}(\tau)$ für $\tau > 0$ negativ ist, wird in den Abbildungen meist $R_{\dot{x}x}(\tau) = -R_{x\dot{x}}(\tau)$ dargestellt.

4.3 Korrelationsfunktion der Ableitung

Ergebnis dieses Abschnittes ist die asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion der Ableitung (4.2) eines Integralfunktionals. Analog zu den vorangegangenen Überlegungen ermittelt man im allgemeineren Fall verschiedener Kernfunktionen in (4.3)

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \{ \dot{x}_k(t) \dot{x}_l^*(t + \tau) \} \\ &= \mathbf{E} \left\{ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} Q'_k(t-u) {}^\varepsilon f(u) {}^\varepsilon f^*(v) Q'_l(t+\tau-v) dv du \right\} \\ &\quad + \mathbf{E} \left\{ \int_{-\infty}^t Q'_k(t-u) {}^\varepsilon f(u) {}^\varepsilon f^*(t+\tau) du \right\} Q_l^*(0) \\ &\quad + Q_k(0) \mathbf{E} \left\{ \int_{-\infty}^{t+\tau} {}^\varepsilon f(t) {}^\varepsilon f^*(u) Q'_l(t+\tau-u) du \right\} + Q_k(0) \mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(t) {}^\varepsilon f^*(t+\tau) \} Q_l^*(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} Q'_k(t-u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(v-u) Q'_l{}^*(t+\tau-v) dv du \\
&\quad + \int_{-\infty}^t Q'_k(t-u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(t+\tau-u) du Q_l{}^*(0) \\
&\quad + Q_k(0) \int_{-\infty}^{t+\tau} R_{\varepsilon f \varepsilon f}(u-t) Q'_l{}^*(t+\tau-u) du + Q_k(0) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau) Q_l{}^*(0) \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q'_k(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau+u-v) Q'_l{}^*(v) dv du + \int_0^{\infty} Q'_k(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau+u) du Q_l{}^*(0) \\
&\quad + Q_k(0) \int_0^{\infty} R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau-u) Q'_l{}^*(u) du + Q_k(0) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau) Q_l{}^*(0) \\
&= R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Der erste Summand in der Darstellung (4.16) läßt sich unter der Voraussetzung an die Kernfunktionen $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$ nach Satz 4.4 entwickeln, der zweite Summand unter Anwendung des Satzes 4.8. Der dritte Summand wird mittels

$$\int_0^{\infty} R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau-u) Q'_l{}^*(u) du = \int_0^{\infty} R_{\varepsilon f \varepsilon f}^*(u-\tau) Q'_l{}^*(u) du = \left(\int_0^{\infty} Q'_l(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(u-\tau) du \right)^*$$

in die Form von $I^*(-\tau)$ gebracht. Das Einsetzen der Entwicklungen ergibt unter Berücksichtigung von Bemerkung 4.9 und unter Anwendung der partiellen Integration (vergleiche (4.12)) für $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned}
R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ \int_0^{\infty} Q'_k(u) \left[\mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] Q_l^{(j+1)*}(u+\tau) du \right. \\
&\quad + Q_k(0) \left[\mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] Q_l^{(j+1)*}(\tau) \\
&\quad + \int_0^{\infty} Q_k^{(j+1)}(u+\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q'_l{}^*(u) du \\
&\quad \left. + Q_k^{(j+1)}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l{}^*(0) \right\} \\
&\quad + Q_k(0) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau) Q_l{}^*(0) + \varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ - \int_0^{\infty} Q_k(u) \left[\mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] Q_l^{(j+2)*}(u + \tau) du \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\infty} Q_k^{(j+2)}(u + \tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l^*(u) du \right\} \\
&\quad + Q_k(0) R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l^*(0) + \varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Satz 4.14

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$. Dann gilt die gleichmäßige asymptotische Entwicklung für $\tau \geq 0$

$$R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) = Q_k(0) R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) Q_l^*(0) - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[\langle q_{kl}^{j+2}(\tau), \mu_j^* \rangle + \mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(\tau) c_{kl}^{j,2}(\tau, \varepsilon) \right] + \varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)$$

mit den Korrekturtermen $c_{kl}^{j,i}(\tau, \varepsilon)$ gemäß (4.14) und dem Restglied

$$\begin{aligned}
\varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{N!} \left\{ \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} Q'_k(u) R(v) Q_l^{(N+2)*}(u + s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv du \right. \\
&\quad + \int_0^{\infty} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+2)}(u + s) R(v) Q_l^*(u) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv du \\
&\quad + Q_k(0) \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} R(v) Q_l^{(N+2)*}(s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv \\
&\quad \left. + \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+2)}(s) R(v) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv Q_l^*(0) \right\} \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).
\end{aligned}$$

Für die Kovarianzmatrix ($\tau = 0$) gilt

$$R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(0) = Q_k(0) R(0) Q_l^*(0) - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[\langle q_{kl}^{j+2}(0), \kappa_j^* \rangle + \langle q_{lk}^{j+2*}(0), \kappa_j \rangle \right] + \varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^{N+1}(0, \varepsilon).$$

Die Werte für $\tau < 0$ werden aus der Beziehung $R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) = R_{\dot{x}_l \dot{x}_k}^*(-\tau)$ ermittelt.

Beweis.

Die Ordnung des Restgliedes ist eine Folgerung aus den Sätzen 4.4 und 4.8. □

Das Restglied läßt sich mittels

$$|\varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \leq C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} \left(2C_{Q_i^{(N+2)*}} \left[1 + \int_0^\infty |Q'_k(u)| du \right] + C_{Q_k^{(N+2)}} \left[1 + \int_0^\infty |Q'_l^*(u)| du \right] \right)$$

abschätzen.

Bemerkung 4.15 Unter der stärkeren Voraussetzung $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+2}$ kann man das Restglied mittels partieller Integration (siehe auch (4.13)) in die Form

$$\begin{aligned} \varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) &= -\frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \int_\tau^{\tau-\varepsilon v} Q_k(u) R(v) Q_l^{(N+3)*}(u+s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv du \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{N!} \int_0^\infty \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty \int_\tau^{\varepsilon v - \tau} Q_k^{(N+3)}(u+s) R(v) Q_l^*(u) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv du \end{aligned}$$

überführen.

Korollar 4.16

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$. Dann gilt die punktweise asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned} R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) &= -\sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \begin{cases} \langle q_{kl}^{j+2}(\tau), \mu_j^* \rangle & \tau > 0 \\ \langle q_{kl}^{j+2}(0), \kappa_j^* \rangle + \langle q_{lk}^{j+2*}(0), \kappa_j \rangle & \tau = 0 \\ \langle q_{lk}^{j+2*}(-\tau), \mu_j \rangle & \tau < 0 \end{cases} \\ &\quad + \mathbf{1}_{\{0\}}(\tau) Q_k(0) R(0) Q_l^*(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}). \end{aligned}$$

Wie das folgende Beispiel zeigen wird, ist die punktweise Approximation der Korrelationsfunktion der Ableitung eines Integralfunktionals einer Kernfunktion mit $Q(0) \neq 0$ nicht immer empfehlenswert.

Fortsetzung des Beispiels 4.7 Im eindimensionalen reellwertigen Fall mit $Q_1(\cdot) = Q_2(\cdot) = Q(\cdot)$ formuliert sich Satz 4.14 in folgender Weise.

Für $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$ gilt

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = Q^2(0) R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+2}(|\tau|) \left[\mu_j + \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(\tau) \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \varrho_{\dot{x}\dot{x}}^{N+1}(|\tau|, \varepsilon). \quad (4.17)$$

Mit einer Kernfunktion $Q(t) = e^{-\gamma t}$ erhält man wegen der Beziehung $q_{j+2}(\tau) = \gamma^2 q_j(\tau)$ die Approximation der Ordnung N

$${}^N R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = Q^2(0)R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \gamma^2 {}^N R_{xx}(\tau).$$

Die punktweise Approximation

$${}^N \hat{R}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+2}(|\tau|) \begin{cases} \mu_j & \tau \neq 0 \\ \nu_j & \tau = 0 \end{cases} + \mathbf{1}_{\{0\}}(\tau) Q^2(0)R(0)$$

ist im vorliegenden Fall ungeeignet. Die Korrelationsfunktion wird bis auf den Punkt $\tau = 0$ durch

$${}^N \hat{R}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = -\gamma^2 {}^N \hat{R}_{xx}(\tau)$$

approximiert, d. h. abgesehen vom Faktor γ^2 durch das Negative der Approximation der Korrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$. Für $N = 0$ wird dieses Problem besonders deutlich, da ${}^0 \hat{R}_{xx}(\tau)$ selbst eine Korrelationsfunktion ist.

4.4 Konvergenz der Folge der Approximationen

Die Entwicklungssätze in den Abschnitten 4.1, 4.2 und 4.3 gelten unter der hinreichenden Bedingung, daß die Kernfunktionen für ein gewisses $N \in \mathbb{N}_0$ aus \mathfrak{G}^N sind. Nun soll vorausgesetzt werden, daß die Bedingungen der Annahme 4.2 für beliebig großes N gelten. Folgerichtig zur Definition 4.3 wird die Menge aller Kernfunktionen, die diesen Forderungen genügen, mit \mathfrak{G}^∞ bezeichnet. Stellvertretend hat dann die asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion $R_{x_k x_l}(\tau)$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$ die Gestalt

$$R_{x_k x_l}(\tau) = {}^N R_{x_k x_l}(\tau) + \varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon),$$

wobei ${}^N R_{x_k x_l}(\tau)$ die Approximation der Ordnung N ist. Die formale Reihe ${}^\infty R_{x_k x_l}(\tau)$ heißt auch asymptotische Entwicklung für $N = \infty$. In Abschnitt 2.3 wurde bereits diskutiert, daß aus der Existenz einer asymptotischen Entwicklung für beliebig großes N im allgemeinen nicht folgt, daß der Grenzwert der Folge der Approximationen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} {}^N R_{x_k x_l}(\tau)$$

existiert. Sollte dieser Grenzwert für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existieren, stellt sich die Frage nach Bedingungen, unter denen dieser mit $R_{x_k x_l}(\tau)$ übereinstimmt. Außerdem soll untersucht werden, ob diese Konvergenz für festes ε gleichmäßig bezüglich τ erfolgt.

Grundsätzlich ist die Konvergenz der Folge von Approximationen gleichbedeutend mit der Konvergenz des Restliedes gegen 0, d. h.

$$|R_{x_k x_l}(\tau) - {}^N R_{x_k x_l}(\tau)| = |\varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Es besteht die Möglichkeit, die Reihen ${}^\infty R_{x_k x_l}(\tau)$, ${}^\infty R_{x_k \dot{x}_l}(\tau)$ und ${}^\infty R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau)$ mit den klassischen Mitteln der Analysis zur gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenreihen zu untersuchen. Das in den meisten Fällen anwendbare Weierstraßsche Kriterium für gleichmäßige Konvergenz fordert, daß die betreffende Reihe durch eine konvergente Reihe majorisiert wird, deren Glieder nicht von τ abhängen (siehe z. B. [10]). Eine Abschätzung der Entwicklungsglieder z. B. von $R_{x_k x_l}(\tau)$ im reellen eindimensionalen Fall führt zu

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^j(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] + q_{lk}^j(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \right| \\ & \leq C_R \frac{\varepsilon^{j+1}}{(j+1)!} \left[2 |q_{kl}^j(\tau)| + |q_{lk}^j(\tau)| \right] \\ & \leq C_R \frac{\varepsilon^{j+1}}{(j+1)!} \left[2 C_{Q_l^{(j)}} \int_0^\infty |Q_k(u)| du + C_{Q_k^{(j)}} \int_0^\infty |Q_l(u)| du \right]. \end{aligned}$$

Konvergiert einer Reihe mit diesen Gliedern, dann ist auch die gleichmäßige Konvergenz bei Verwendung der Abschätzung (4.9) des Restgliedes

$$|\varrho_{x_k x_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \leq C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} \left[2 C_{Q_l^{(N+1)}} \int_0^\infty |Q_k(u)| du + C_{Q_k^{(N+1)}} \int_0^\infty |Q_l(u)| du \right] \rightarrow 0$$

gesichert. In jedem Fall ist folgende Bedingung hinreichend, die auch für vektorielle Integralfunktionale anwendbar ist.

Korollar 4.17

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^\infty$. Existieren nichtnegative Konstanten C_1, C_2 und N_0 , so daß

$$|Q_k^{(N)}(t)| \leq C_{Q_k^{(N)}} \leq N^{C_1} C_2^N, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad k = 1, 2, \quad \text{für } N \geq N_0 \quad (4.18)$$

gilt, dann konvergieren für jedes $\varepsilon > 0$ die Folgen der Approximationen ${}^N R_{x_k x_l}(\tau)$, ${}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau)$ und ${}^N R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau)$ für $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf \mathbb{R} gegen die exakten Funktionen, d. h. es gilt

$$\begin{aligned} R_{x_k x_l}(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} {}^N R_{x_k x_l}(\tau), \\ R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} {}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) \text{ und} \\ R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} {}^N R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau). \end{aligned}$$

Die gestellte Forderung erweist sich für die Anwendungen im Kapitel 6 als geeignet, obwohl noch Abschwächungen denkbar wären.

Eine Bedingung an die Kernfunktionen (beziehungsweise an die Entwicklungskoeffizienten), die mit der konkreten Gestalt der asymptotischen Entwicklung für Korrelationsfunktionen verbunden ist und ohne Kenntnis des Restgliedes beziehungsweise einer Abschätzung dafür auskommt, hat Aussagen zur punktweisen Konvergenz zur Folge. Die Herleitung erfolgt aufgrund der Übersichtlichkeit im reellen, eindimensionalen Fall. Durch elementweise Betrachtung lassen sich die Aussagen verallgemeinern.

Die Approximationen, die mit den gleichmäßigen asymptotischen Entwicklungen aus den Sätzen 4.4, 4.11 und 4.14 erhalten werden, haben für $\tau \geq 0$ die Gestalt

$$\begin{aligned}
{}^N R_{x_k x_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^j(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] + q_{lk}^j(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\
{}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+1}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] - q_{lk}^{j+1}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\
{}^N R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) &= - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+2}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] + q_{lk}^{j+2}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\
&\quad + Q_k(0) Q_l(0) R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Satz 4.18

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^\infty$. Konvergieren die Taylorreihen

$$q_{kl}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{kl}^{(j)}(\tau_0) \frac{(\tau - \tau_0)^j}{j!} \quad \forall \tau, \tau_0 \in \mathbb{R}_+,$$

dann konvergieren für jedes $\varepsilon > 0$ und $\tau \in \mathbb{R}$ die Folgen der Approximationen ${}^N R_{x_k x_l}(\tau)$, ${}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau)$ und ${}^N R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau)$ für $N \rightarrow \infty$ gegen die exakten Werte.

Beweis.

Aus der Voraussetzung $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^\infty$ folgt, daß die Funktionen $Q_k^{(j)}(\cdot)$ beschränkt sind, d. h.

$$|Q_k^{(j)}(\tau)| \leq C_{Q_k^{(j)}}, \quad k = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Somit existiert für jedes j eine von τ unabhängige, integrierbare obere Schranke für den Integranden des Entwicklungskoeffizienten $q_{kl}^j(\tau)$

$$|Q_k(u) Q_l^{(j)}(u + \tau)| \leq |Q_k(u)| C_{Q_l^{(j)}}.$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz kann die Differentiation und die Integration vertauscht werden, es gilt für alle $j = 0, 1, 2, \dots$

$$q_{kl}^{(j)}(\tau) = \frac{d^j}{d\tau^j} \int_0^\infty Q_k(u) Q_l(u + \tau) du = \int_0^\infty Q_k(u) Q_l^{(j)}(u + \tau) du = q_{kl}^j(\tau).$$

Keht man zur Herleitung der Entwicklung von Satz 4.4 zurück, hat die Korrelationsfunktion im hier betrachteten Fall analog zu (4.5) die Darstellung

$$\begin{aligned}
R_{x_k x_l}(\tau) &= \varepsilon \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) Q_k(u) Q_l(u + \tau - \varepsilon v) dv du \\
&\quad + \varepsilon \int_0^{\infty} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) Q_k(u - \tau + \varepsilon v) Q_l(u) dv du \\
&= \varepsilon \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) q_{kl}(\tau - \varepsilon v) dv + \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) q_{lk}(\varepsilon v - \tau) dv.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Aufgrund der Voraussetzung an die Entwicklungskoeffizienten konvergiert für jedes $\tau \geq 0$ und $\tau - \varepsilon v \geq 0$ die Reihendarstellung

$$q_{kl}(\tau - \varepsilon v) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{kl}^j(\tau) \frac{(-\varepsilon v)^j}{j!}$$

in eine Potenzreihe von $-\varepsilon v$ gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall aus $[-\tau, \infty)$ (siehe zum Beispiel [10]), insbesondere für festes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig bezüglich v auf $[-1, 1] \cap (-\infty, \frac{\tau}{\varepsilon}]$. Analog konvergiert für jedes $\tau \geq 0$ und $-\tau + \varepsilon v \geq 0$ die Reihendarstellung

$$q_{lk}(\varepsilon v - \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{lk}^j(\tau) \frac{(\varepsilon v - 2\tau)^j}{j!}$$

gleichmäßig bezüglich v auf $[-1, 1] \cap [\frac{\tau}{\varepsilon}, \infty)$. Die gleichmäßige Konvergenz und die Stetigkeit der Reihenglieder sowie der Korrelationsfunktion erlauben nach dem Einsetzen der Reihendarstellungen in die Integrale, die Summation der Reihen und die Integration zu vertauschen, man erhält die gesuchte Reihendarstellung der Korrelationsfunktion für $\tau \geq 0$

$$R_{x_k x_l}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[q_{kl}^j(\tau) \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j dv + q_{lk}^j(\tau) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - \frac{2\tau}{\varepsilon} \right)^j dv \right].$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion (4.11)

$$\begin{aligned}
R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty Q_k(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau + u - v) Q'_l(v) \, dv du + \int_0^\infty Q_k(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau + u) \, du Q_l(0) \\
&= \varepsilon \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) \int_0^\infty Q_k(u) Q'_l(u + \tau - \varepsilon v) \, dudv + \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty R(v) \int_0^\infty Q_k(u - \tau + \varepsilon v) Q'_l(u) \, dudv \\
&\quad + \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty R(v) Q_k(\varepsilon v - \tau) \, dv Q_l(0)
\end{aligned}$$

hat nach der Anwendung der partiellen Integration

$$\int_0^\infty Q_k(u - \tau + \varepsilon v) Q'_l(u) \, du = -Q_k(\varepsilon v - \tau) Q_l(0) - \int_0^\infty Q'_k(u - \tau + \varepsilon v) Q_l(u) \, du$$

die Gestalt

$$R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) q_{kl}^1(\tau - \varepsilon v) \, dv - \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty R(v) q_{lk}^1(\varepsilon v - \tau) \, dv.$$

Die gleiche Argumentation wie im Fall $R_{x_k x_l}(\tau)$ führt für $\tau \geq 0$ zur Reihendarstellung

$$R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[q_{kl}^{j+1}(\tau) \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j \, dv - q_{lk}^{j+1}(\tau) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^\infty R(v) \left(v - \frac{2\tau}{\varepsilon} \right)^j \, dv \right].$$

Ausgehend von (4.16) hat eine analoge Vorgehensweise

$$\begin{aligned}
R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty Q'_k(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau + u - v) Q'_l(v) \, dv du + \int_0^\infty Q'_k(u) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau + u) \, du Q_l(0) \\
&\quad + Q_k(0) \int_0^\infty R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau - u) Q'_l(u) \, du + Q_k(0) R_{\varepsilon f \varepsilon f}(\tau) Q_l(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) \int_0^{\infty} Q'_k(u) Q'_l(u + \tau - \varepsilon v) \, dudv + \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \int_0^{\infty} Q'_k(u - \tau + \varepsilon v) Q'_l(u) \, dudv \\
&\quad + Q_k(0) \varepsilon \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) Q'_l(\tau - \varepsilon v) \, dv + \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) Q'_k(\varepsilon v - \tau) \, dv Q_l(0) \\
&\quad + Q_k(0) Q_l(0) R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \\
&= Q_k(0) Q_l(0) R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) q_{kl}^2(\tau - \varepsilon v) \, dv - \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) q_{lk}^2(\varepsilon v - \tau) \, dv
\end{aligned}$$

die Reihendarstellung

$$\begin{aligned}
R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) &= - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[q_{kl}^{j+2}(\tau) \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j \, dv + q_{lk}^{j+2}(\tau) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - \frac{2\tau}{\varepsilon}\right)^j \, dv \right] \\
&\quad + Q_k(0) Q_l(0) R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

für $\tau \geq 0$ als Resultat. □

Bemerkung 4.19 Werden im Beweis statt der Reihendarstellungen der Funktionen $q_{kl}^j(\tau)$ die endlichen Taylorreihen mit entsprechendem Restglied eingesetzt, macht es den Anschein, als ob die angewandte Methode und die Herleitung der Entwicklungssätze 4.4, 4.11 und 4.14 gleichwertig sind. Bei genauer Analyse liegen die Unterschiede im Fall von $R_{x_k \dot{x}_l}(\tau)$ und $R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau)$ in der Reihenfolge der Anwendung der partiellen Integrationen und der Entwicklung der Kernfunktionen beziehungsweise entsprechend der Funktionen $q_{kl}^j(\tau)$. Während in (4.11) und (4.16) die Einfachintegrale vom Typ $I(\tau)$ nach Satz 4.8 entwickelt und anschließend die Entwicklungsglieder mit partieller Integration zusammengefaßt werden, ist die Vorgehensweise hier genau umgekehrt, eine Entwicklung für Funktionen $I(\tau)$ würde sich prinzipiell erübrigen. Für die Aussage des Satzes 4.11 ist das richtig, jedoch nicht für Satz 4.14. Bei dieser Vorgehensweise muß man analog zu Bemerkung 4.15 die stärkere Voraussetzung $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+2}$ fordern, um eine Darstellung des Restgliedes zu erhalten.

Die Folgen der Approximationen in Satz 4.18 konvergieren für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\tau \in \mathbb{R}$, also punktweise bezüglich τ . Gleichmäßige Konvergenz kann mit der Vorgehensweise im Beweis nicht gefolgert werden.

Fortsetzung des Beispiels 4.7 Die Kernfunktion $Q(t) = e^{-\gamma t}$ und der Entwicklungskoeffizient $q_0(\tau) = \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma\tau}$ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 4.18, die asymptotischen Entwicklungen für $N = \infty$ liefern die exakten Darstellungen der Korrelationsfunktionen.

Bei Verwendung der Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ berechnet man für die in den Entwicklungen vorkommenden unendlichen Reihen

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j)!} q_{2j}(\tau) \mu_{2j} &= e^{-\gamma\tau} \frac{\cosh(\varepsilon\gamma) - 1}{\varepsilon\gamma^3}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_j(\tau) \tilde{\kappa}_j\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) &= \frac{\gamma(\varepsilon - \tau) - \sinh(\gamma(\varepsilon - \tau))}{\varepsilon\gamma^3}, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+1}(\tau) \tilde{\kappa}_j\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) &= -\frac{\cosh(\gamma(\varepsilon - \tau)) - 1}{\varepsilon\gamma^2}. \end{aligned}$$

Die exakten Funktionen haben die Darstellung

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j)!} q_{2j}(|\tau|) \mu_{2j} + \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_j(|\tau|) \tilde{\kappa}_j\left(\frac{|\tau|}{\varepsilon}\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon\gamma^3} \begin{cases} \gamma(\varepsilon - |\tau|) - e^{-\gamma|\tau|} + \frac{1}{2}(e^{-\gamma(\varepsilon+|\tau|)} + e^{-\gamma(\varepsilon-|\tau|)}) & 0 \leq |\tau| < \varepsilon \\ e^{-\gamma|\tau|}(\cosh(\varepsilon\gamma) - 1) & |\tau| \geq \varepsilon \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) &= \text{sign}(-\tau) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j)!} q_{2j+1}(|\tau|) \mu_{2j} - \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(\tau) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+1}(|\tau|) \tilde{\kappa}_j\left(\frac{|\tau|}{\varepsilon}\right) \right) \\ &= \frac{\text{sign}(\tau)}{\varepsilon\gamma^2} \begin{cases} 1 - e^{-\gamma|\tau|} + \frac{1}{2}(e^{-\gamma(\varepsilon+|\tau|)} - e^{-\gamma(\varepsilon-|\tau|)}) & 0 \leq |\tau| < \varepsilon \\ e^{-\gamma|\tau|}(\cosh(\varepsilon\gamma) - 1) & |\tau| \geq \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) &= R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) - \gamma^2 R_{xx}(\tau) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon\gamma} \begin{cases} -e^{-\gamma|\tau|} + \frac{1}{2}(e^{-\gamma(\varepsilon+|\tau|)} + e^{-\gamma(\varepsilon-|\tau|)}) & 0 \leq |\tau| < \varepsilon \\ e^{-\gamma|\tau|}(\cosh(\varepsilon\gamma) - 1) & |\tau| \geq \varepsilon \end{cases}. \end{aligned}$$

Die Konvergenz der Folge der Approximationen erfolgt gleichmäßig auf \mathbb{R} , da mit der Ungleichung $|q_j(\tau)| = |-\frac{1}{2}(-\gamma)^{j-1} e^{-\gamma\tau}| \leq \frac{1}{2}\gamma^{j-1}$ die Abschätzungen der Restglieder

$$|\varrho_{xx}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \leq 3C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} |q_{N+1}(\tau)| \leq \frac{3C_R \varepsilon^{N+2} \gamma^N}{2(N+2)!},$$

$$|\varrho_{\dot{x}\dot{x}}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \leq 3C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} |q_{N+2}(\tau)| \quad \text{und} \quad |\varrho_{\ddot{x}\ddot{x}}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \leq 3C_R \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} |q_{N+3}(\tau)|$$

unabhängig von τ für $N \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren.

Zusammenfassend für dieses Beispiel werden in Abbildung 4.1 die Approximationen der Ordnungen $N = 0, 1, 2$ mit den exakten Korrelationsfunktionen für $\varepsilon = 0.5$ und $\varepsilon = 1.5$ verglichen. Die exakten Korrelationsfunktionen sind für $\gamma = 1$ auch in Abhängigkeit von ε in der Abbildung 4.2 dargestellt.

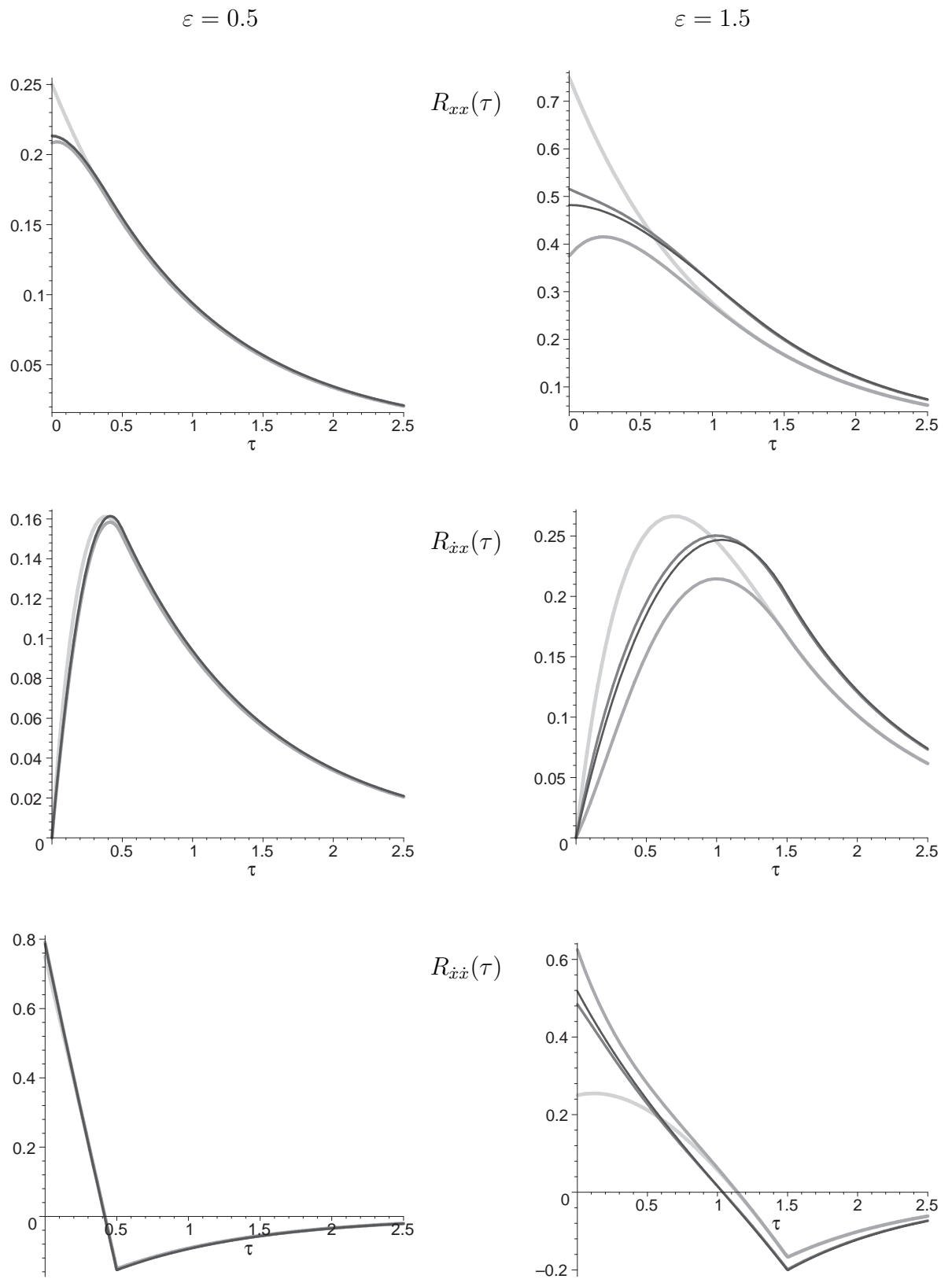


Abbildung 4.1: Gleichmäßige Approximationen für $N = 0, 1, 2$ und exakte Korrelationsfunktionen (von hell nach dunkel) für Beispiel 4.7 mit $\gamma = 1$

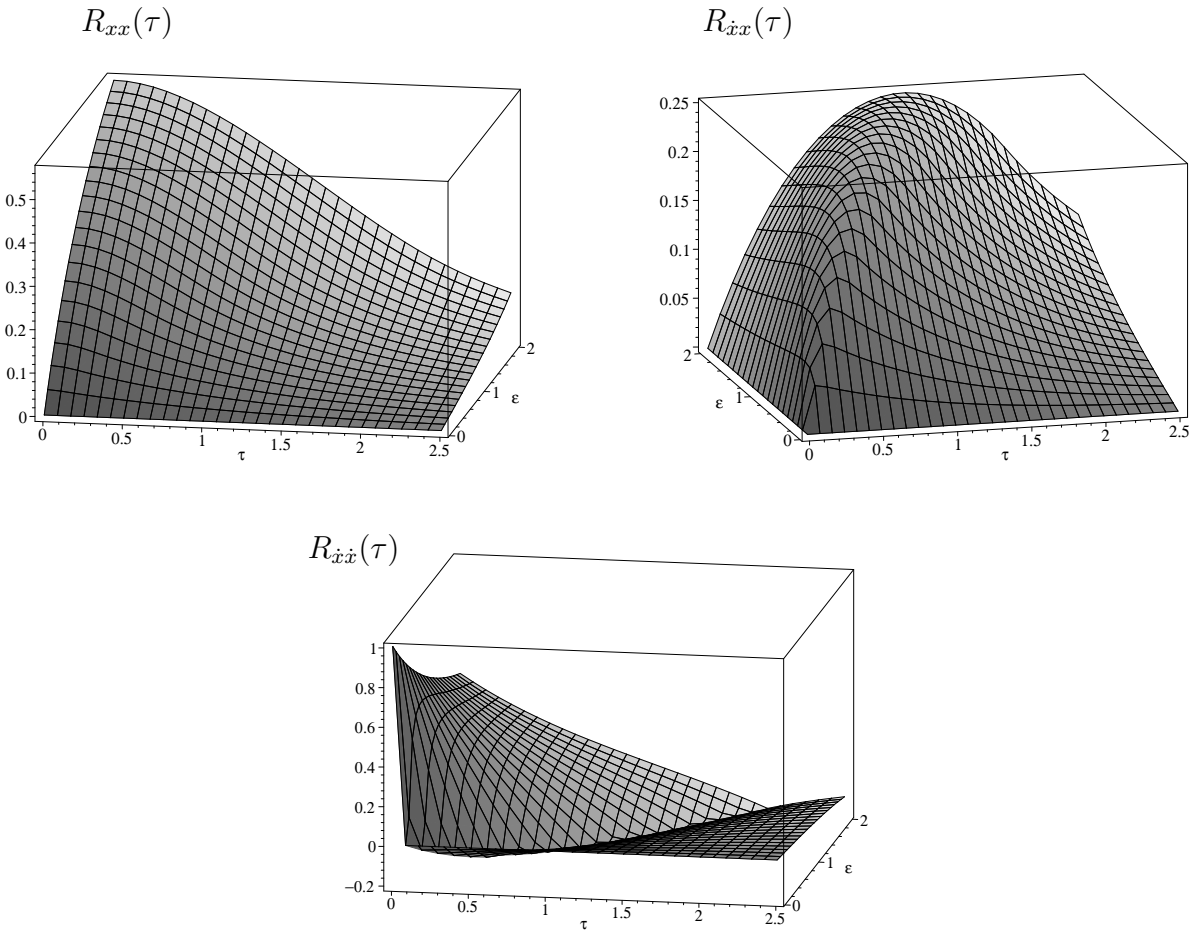


Abbildung 4.2: Exakte Korrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau)$, $R_{\dot{x}x}(\tau)$ und $R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau)$

4.5 Differentiation der asymptotischen Entwicklung

Der Ursprung der folgenden Überlegungen liegt in dem Ziel einer möglichst effektiven numerischen Umsetzung der Bestimmung von Approximationen der Korrelationsfunktion eines Integralfunktionals und dessen Ableitung. Das kann auf der Basis der Entwicklungssätze geschehen. Eine (möglicherweise sogar effektivere) alternative Methode besteht darin, die Approximation für das Integralfunktional zu bestimmen und mittels (numerischer) Differentiation eine Näherung der Korrelationsfunktion der Ableitung zu berechnen. Die Frage ist, in welchem Sinn die erhaltene Funktion eine gute Näherung für die gesuchte Korrelationsfunktion ist.

Aus den vorangegangenen Abschnitten ist bekannt, daß Integralfunktionale (4.1) schwach stationäre, im quadratischen Mittel differenzierbare Prozesse sind, für die

$$R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = R'_{x_k x_l}(\tau) \quad \text{und} \quad R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) = -R'_{x_k \dot{x}_l}(\tau) \quad (4.21)$$

gilt. Dabei bezeichnet $R'_{x_k x_l}(\tau) = \frac{dR_{x_k x_l}(\tau)}{d\tau}$ die Ableitung nach τ , wobei ϵ als fester Parameter aufgefaßt wird. Außerdem wurde gezeigt, daß die Voraussetzung $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in$

\mathfrak{G}^{N+1} für ein $N \geq 0$ die Existenz der auf ganz \mathbb{R} gleichmäßigen asymptotischen Entwicklungen von $R_{x_k x_l}(\tau)$ der Ordnung $N + 1$ sowie von $R_{x_k \dot{x}_l}(\tau)$ und $R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau)$ der Ordnung N sichert, die für $\tau \geq 0$ von der Gestalt

$$R_{x_k x_l}(\tau) = {}^{N+1}R_{x_k x_l}(\tau) + \varrho_{x_k x_l}^{N+2}(\tau, \varepsilon),$$

$$R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = {}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) + \varrho_{x_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)$$

und

$$R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) = {}^N R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) + \varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon)$$

sind. Die Restglieder haben die Ordnungen

$$\varrho_{x_k x_l}^{N+2}(\tau, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+3}), \quad \varrho_{x_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}) \quad \text{und} \quad \varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Falls die Approximationen ${}^{N+1}R_{x_k x_l}(\tau)$ und ${}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau)$ auf \mathbb{R}_+ differenzierbar sind, wobei für $\tau = 0$ die einseitige Ableitung für $\tau \downarrow 0$ gemeint ist, stellt sich die Frage, ob für die Approximationen ebenfalls Gleichungen der Art (4.21) gelten, d. h.

$${}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = {}^{N+1}R'_{x_k x_l}(\tau) \quad \text{und} \quad {}^N R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) = -{}^N R'_{x_k \dot{x}_l}(\tau) \quad (4.22)$$

oder ob durch das Differenzieren zumindest asymptotische Entwicklungen der jeweiligen Ableitung entstehen, d. h.

$${}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = {}^{N+1}R'_{x_k x_l}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}) \quad \text{und} \quad {}^N R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) = -{}^N R'_{x_k \dot{x}_l}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Mit ${}^N R'_{x_k x_l}(\tau) = ({}^N R_{x_k x_l}(\tau))' = \frac{d {}^N R_{x_k x_l}(\tau)}{d\tau}$ ist dabei die Ableitung der Approximation und nicht die Approximation der Ableitung gemeint, die mit ${}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau)$ dargestellt werden kann.

Die Differentiation der Approximation ${}^{N+1}R_{x_k x_l}(\tau)$ (vergleiche mit (4.19)) führt zur Beziehung

$$\begin{aligned} {}^{N+1}R'_{x_k x_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^{N+1} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \frac{d}{d\tau} \left\{ q_{kl}^j(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] + q_{lk}^j(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{N+1} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+1}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] + q_{lk}^{j+1}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{N+1} \frac{\varepsilon^j}{j!} \left\{ q_{kl}^j(\tau) (-1)^{j+1} \kappa'_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) + q_{lk}^j(\tau) \kappa'_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Korrekturterme gilt ($\alpha \in [0, 1]$)

$$\begin{aligned} \kappa'_{i,j}(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \int_{\alpha}^1 (u - i\alpha)^j R(u) du = -ij \int_{\alpha}^1 (u - i\alpha)^{j-1} R(u) du - (\alpha - i\alpha)^j R(\alpha) \\ &= -ij \kappa_{i,j-1}(\alpha) - [(1-i)\alpha]^j R(\alpha), \end{aligned}$$

wenn man $\kappa_{i,-1}(\alpha) := 0$ setzt. Betrachtet man die Korrekturterme auf ganz \mathbb{R}_+ , dann ist der Punkt $\alpha = 1$ besonders zu berücksichtigen. Wegen

$$\lim_{\alpha \downarrow 1} \kappa'_{i,j}(\alpha) = \lim_{\alpha \uparrow 1} \kappa'_{i,j}(\alpha) = 0$$

sind die Korrekturterme stetig differenzierbar. Einsetzen von

$$\begin{aligned} \kappa'_{0,j}(\alpha) &= -\alpha^j R(\alpha) \\ \kappa'_{2,j}(\alpha) &= -2j\kappa_{2,j-1}(\alpha) + (-1)^{j+1}\alpha^j R(\alpha) \end{aligned}$$

und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned} {}^{N+1}R'_{x_k x_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^{N+1} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+1}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] + q_{lk}^{j+1}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{N+1} \frac{\varepsilon^j}{j!} \left\{ q_{kl}^j(\tau) (-1)^j \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^j R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + q_{lk}^j(\tau) \left[(-1)^{j+1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^j R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) - 2j\kappa_{2,j-1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{N+1} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+1}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] + q_{lk}^{j+1}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\ &\quad + R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \sum_{j=0}^{N+1} \frac{(-\tau)^j}{j!} [q_{kl}^j(\tau) - q_{lk}^j(\tau)] - 2 \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\varepsilon^j}{(j-1)!} q_{lk}^j(\tau) \kappa_{2,j-1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+1}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] - q_{lk}^{j+1}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+1)!} \left\{ q_{kl}^{N+2}(\tau) \left[\mu_{N+1} + (-1)^N \kappa_{0,N+1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] + q_{lk}^{N+2}(\tau) \kappa_{2,N+1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\ &\quad + R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \sum_{j=0}^{N+1} \frac{(-\tau)^j}{j!} [q_{kl}^j(\tau) - q_{lk}^j(\tau)] . \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung der Funktion $q_{kl}(\tau)$ führt zur Darstellung

$$\sum_{j=0}^{N+1} \frac{(-\tau)^j}{j!} q_{kl}^j(\tau) = q_{kl}(0) + \frac{1}{(N+1)!} \int_0^\tau q_{kl}^{N+2}(s) (-s)^{N+1} ds ,$$

so daß aus

$$\sum_{j=0}^{N+1} \frac{(-\tau)^j}{j!} [q_{kl}^j(\tau) - q_{lk}^j(\tau)] = \frac{1}{(N+1)!} \int_0^\tau [q_{kl}^{N+2}(s) - q_{lk}^{N+2}(s)] (-s)^{N+1} ds$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} {}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) &= {}^{N+1} R'_{x_k x_l}(\tau) - R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \frac{1}{(N+1)!} \int_0^\tau [q_{kl}^{N+2}(s) - q_{lk}^{N+2}(s)] (-s)^{N+1} ds \\ &\quad - \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+1)!} \left\{ q_{kl}^{N+2}(\tau) \left[\mu_{N+1} + (-1)^N \kappa_{0,N+1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right] + q_{lk}^{N+2}(\tau) \kappa_{2,N+1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right\}. \end{aligned}$$

folgt. Aus diesem Ergebnis lassen sich die folgenden Schlußfolgerungen ziehen.

1. Die Approximation von $R_{x_k x_l}(\tau)$ ist bis auf den Punkt $\tau = 0$ auf \mathbb{R} stetig differenzierbar, die Ableitung ${}^{N+1} R'_{x_k x_l}(\tau)$ stimmt jedoch im allgemeinen nicht mit der Approximation der Ableitung ${}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau)$ überein.
2. Die Ableitung der Approximation definiert eine asymptotische Entwicklung für die Ableitung der Korrelationsfunktion

$$R_{x \dot{x}}(\tau) = {}^N R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}) = {}^{N+1} R'_{xx}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}),$$

da die verbleibenden Terme aufgrund der Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left| R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \frac{1}{(N+1)!} \int_0^\tau [q_{kl}^{N+2}(s) - q_{lk}^{N+2}(s)] (-s)^{N+1} ds \right| \\ &\leq \left| R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right| \frac{C_q}{(N+1)!} \int_0^\tau s^{N+1} ds = \left| R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right| \frac{C_q}{(N+2)!} \tau^{N+2} \\ &\leq \frac{C_R C_q}{(N+2)!} \mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(\tau) \tau^{N+2} \leq \frac{C_R C_q}{(N+2)!} \varepsilon^{N+2} \end{aligned}$$

von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$ sind, wobei die Konstante C_q eine obere Schranke für $|q_{kl}^{N+2}(s) - q_{lk}^{N+2}(s)|$ bezeichnet.

Aufgrund der Beziehung

$$R_{x_k \dot{x}_l}(\tau) = {}^{N+1} R'_{x_k x_l}(\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \varrho_{x_k x_l}^{N+2}(\tau, \varepsilon)$$

muß außerdem

$$\begin{aligned} \varrho_{x_k \dot{x}_l}^{N+1}(\tau, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \varrho_{x_k x_l}^{N+2}(\tau, \varepsilon) + R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \frac{1}{(N+1)!} \int_0^\tau [q_{kl}^{N+2}(s) - q_{lk}^{N+2}(s)] (-s)^{N+1} ds \\ &\quad + \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+1)!} \left\{ q_{kl}^{N+2}(\tau) \left[\mu_{N+1} + (-1)^N \kappa_{0,N+1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right] + q_{lk}^{N+2}(\tau) \kappa_{2,N+1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right\} \end{aligned}$$

gelten.

Auf analoge Weise berechnet man ausgehend von (4.19)

$$\begin{aligned}
{}^N R'_{x_k \dot{x}_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \frac{d}{d\tau} \left\{ q_{kl}^{j+1}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] - q_{lk}^{j+1}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\
&= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+2}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] - q_{lk}^{j+2}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^j}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+1}(\tau) (-1)^j \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^j R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - q_{lk}^{j+1}(\tau) \left[(-1)^{j+1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^j R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) - 2j \kappa_{2,j-1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+2}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] - q_{lk}^{j+2}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\
&\quad + R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \sum_{j=0}^N \frac{(-\tau)^j}{j!} [q_{kl}^{j+1}(\tau) + q_{lk}^{j+1}(\tau)] + 2 \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon^j}{(j-1)!} q_{lk}^{j+1}(\tau) \kappa_{2,j-1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \\
&= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ q_{kl}^{j+2}(\tau) \left[\mu_j + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right] + q_{lk}^{j+2}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\} \\
&\quad - 2 \frac{\varepsilon^{N+1}}{N!} q_{lk}^{N+2}(\tau) \kappa_{2,N} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) + R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \sum_{j=0}^N \frac{(-\tau)^j}{j!} [q_{kl}^{j+1}(\tau) + q_{lk}^{j+1}(\tau)] .
\end{aligned}$$

Werden noch die Taylorentwicklungen von $q_{kl}^1(\tau)$ und $q_{lk}^1(\tau)$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^N \frac{(-\tau)^j}{j!} [q_{kl}^{j+1}(\tau) + q_{lk}^{j+1}(\tau)] &= q_{kl}^1(0) + q_{lk}^1(0) + \frac{1}{N!} \int_0^\tau [q_{kl}^{N+2}(s) + q_{lk}^{N+2}(s)] (-s)^N ds \\
&= -Q_k(0)Q_l(0) + \frac{1}{N!} \int_0^\tau [q_{kl}^{N+2}(s) + q_{lk}^{N+2}(s)] (-s)^N ds
\end{aligned}$$

eingesetzt, wobei

$$q_{kl}^1(0) = \int_0^\infty Q_k(u)Q_l'(u) du = -Q_k(0)Q_l(0) - \int_0^\infty Q_k'(u)Q_l(u) du = -Q_k(0)Q_l(0) - q_{lk}^1(0)$$

Berücksichtigung fand, erhält man abschließend die Gleichung

$$\begin{aligned}
{}^N R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) &= -{}^N R'_{x_k \dot{x}_l}(\tau) - 2 \frac{\varepsilon^{N+1}}{N!} q_{lk}^{N+2}(\tau) \kappa_{2,N} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \\
&\quad + R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \frac{1}{N!} \int_0^\tau [q_{kl}^{N+2}(s) + q_{lk}^{N+2}(s)] (-s)^N ds
\end{aligned}$$

beziehungsweise für das Restglied

$$\begin{aligned} \varrho_{\dot{x}_k \dot{x}_l}^N(\tau, \varepsilon) &= -\frac{\partial}{\partial \tau} \varrho_{x_k x_l}^N(\tau, \varepsilon) + 2 \frac{\varepsilon^{N+1}}{N!} q_{lk}^{N+2}(\tau) \kappa_{2,N} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \\ &\quad - R \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \frac{1}{N!} \int_0^\tau [q_{kl}^{N+2}(s) + q_{lk}^{N+2}(s)] (-s)^N ds. \end{aligned}$$

Die Schlußfolgerungen in diesem Fall sind

1. Die Approximation von $R_{x_k x_l}(\tau)$ ist ebenfalls bis auf den Punkt $\tau = 0$ auf \mathbb{R} stetig differenzierbar, die Ableitung $-{}^N R'_{x_k x_l}(\tau)$ stimmt jedoch im allgemeinen nicht mit der Approximation der Ableitung ${}^N \hat{R}'_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau)$ überein.

2. Die Differentiation der Approximation bildet lediglich eine asymptotische Entwicklung der Ableitung

$$R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) = -{}^N R'_{x_k x_l}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$$

mit einem Rest der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$.

3. Unter der stärkeren Voraussetzung $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+2}$ gilt

$$R_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) = -{}^{N+1} R'_{x_k x_l}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).$$

Bemerkung 4.20 Betrachtet man die Approximationen ${}^N \hat{R}_{x_k^{(i)} x_l^{(j)}}(\tau)$, $i, j = 0, 1$ entsprechend der punktweisen Entwicklung (Korollare 4.6, 4.13 und 4.16) auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, die außerdem mit den Approximationen entsprechend der gleichmäßigen Entwicklungen auf $\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ übereinstimmen, dann gelten die Formeln

$${}^N \hat{R}_{x_k x_l}(\tau) = {}^N \hat{R}'_{x_k x_l}(\tau) \quad \text{und} \quad {}^N \hat{R}_{\dot{x}_k \dot{x}_l}(\tau) = -{}^N \hat{R}'_{x_k x_l}(\tau).$$

Fortsetzung des Beispiels 4.7 Für das Integralfunktional mit der Kernfunktion $Q(t) = e^{-\gamma t}$ und der Korrelationsfunktion $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ unterscheidet sich für $N = 0$ die Approximation

$${}^0 R_{x\dot{x}}(\tau) = \text{sign}(-\tau) \frac{\varepsilon}{2} e^{-\gamma|\tau|} \left[1 - \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon} \right)_+^2 \right]$$

von der Ableitung der Approximation von $R_{xx}(\tau)$

$${}^1 R'_{xx}(\tau) = \text{sign}(-\tau) \left\{ \frac{\varepsilon}{2} e^{-\gamma|\tau|} \left[1 - \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon} \right)_+^2 \right] + \frac{\varepsilon^2 \gamma}{6} e^{-\gamma|\tau|} \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon} \right)_+^3 \right\}$$

um einen Term der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Entwickelt man in den Approximationen

$$\begin{aligned}
 -{}^0R'_{x\dot{x}}(\tau) &= e^{-\gamma|\tau|} \left\{ \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right)_+ - \frac{\varepsilon\gamma}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right)_+^2\right] \right\} \\
 -{}^1R'_{x\dot{x}}(\tau) &= e^{-\gamma|\tau|} \left\{ \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right)_+ - \frac{\varepsilon\gamma}{2} \left[1 - 2\frac{|\tau|}{\varepsilon} \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right)_+\right] + \frac{\varepsilon^2\gamma^2}{2} \frac{|\tau|}{\varepsilon} \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right)_+^2 \right\}
 \end{aligned}$$

den Faktor $e^{-\gamma|\tau|}$ an der Stelle $\tau = 0$, so erkennt man, daß die Abweichungen zu

$${}^0R_{x\dot{x}}(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{\varepsilon}\right)_+ - \frac{\varepsilon\gamma}{2} e^{-\gamma|\tau|}$$

für $-{}^0R'_{x\dot{x}}(\tau)$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ und für $-{}^1R'_{x\dot{x}}(\tau)$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ sind.

Kapitel 5

Korrelationsfunktion bei stückweise glatter Kernfunktion

In den Entwicklungssätzen des Kapitels 4 wurden immer bis zu einer gewissen Ordnung stetig differenzierbare Kernfunktionen vorausgesetzt. In diesem Kapitel werden Integralfunktionale (4.3) mit stückweise definierten Kernfunktionen

$$Q_k(t) = \begin{cases} Q_{k,1}(t) & t \in [0, \delta) \\ Q_{k,2}(t) & t \in [\delta, \infty) \end{cases}, \quad k = 1, 2,$$

betrachtet. Dabei wird angenommen, daß die Stelle δ nicht von k abhängt. Die Voraussetzungen an die Kernfunktionen entsprechend der Annahme 4.2 sollen in diesem Kapitel nur stückweise gelten. Das Definitionsgebiet \mathbb{R}_+ der Kernfunktionen unterteilt sich in zwei Intervalle, auf deren Abschließung die Forderungen der Annahme 4.2 erfüllt seien, an den Intervallgrenzen sollen die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte der Ableitungen bis zur Ordnung N existieren. Analog zur Definition 4.3 wird eine Menge von Kernfunktionen definiert, die den Voraussetzungen für die Entwicklungssätze genügen.

Definition 5.1

Eine stückweise definierte Kernfunktion $Q_k(\cdot)$ gehört zur Menge $\widehat{\mathfrak{G}}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$, wenn $Q_{k,1}(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ auf $[0, \delta]$ und $Q_{k,2}(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ auf $[\delta, \infty)$ erfüllt sind.

Die Herleitung erfolgt zunächst im reellen skalaren Fall und wird am Ende des Kapitels auf den komplexwertigen mehrdimensionalen Fall verallgemeinert.

5.1 Herleitung der Entwicklungssätze

Die Korrelationsfunktion hat nach (4.20) die Darstellung

$$R_{x_k x_l}(\tau) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) q_{kl}(\tau - \varepsilon v) dv + \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) q_{lk}(\varepsilon v - \tau) dv$$

mit

$$q_{kl}(s) = \int_0^{\infty} Q_k(u)Q_l(u+s) du, \quad s \geq 0.$$

Das Integrationsgebiet wird entsprechend der stückweisen Definition der Kernfunktion $Q_l(\cdot)$ aufgeteilt, wobei zusätzlich eine Fallunterscheidung bezüglich der Lage von s zu δ zu berücksichtigen ist

$$\begin{aligned} q_{kl}(s) &= \int_0^{\max\{0, \delta-s\}} Q_k(u)Q_{l,1}(u+s) du + \int_{\max\{0, \delta-s\}}^{\infty} Q_k(u)Q_{l,2}(u+s) du \\ &= \begin{cases} \Phi_{1,kl}(s) & s < \delta \\ \Phi_{2,kl}(s) & s \geq \delta \end{cases}. \end{aligned}$$

Die verwendeten Funktionen sind wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \Phi_{1,kl}(s) &:= \int_0^{\delta-s} Q_k(u)Q_{l,1}(u+s) du + \int_{\delta-s}^{\infty} Q_k(u)Q_{l,2}(u+s) du, \quad s \in [0, \delta], \\ \Phi_{2,kl}(s) &:= \int_0^{\infty} Q_k(u)Q_{l,2}(u+s) du, \quad s \in [\delta, \infty) \end{aligned}$$

und ermöglichen die Darstellung

$$\begin{aligned} R_{x_k x_l}(\tau) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v)\Phi_{2,kl}(\tau - \varepsilon v)dv + \varepsilon \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v)\Phi_{1,kl}(\tau - \varepsilon v)dv \\ &\quad + \varepsilon \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v)\Phi_{1,kl}(\varepsilon v - \tau)dv + \varepsilon \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v)\Phi_{2,kl}(\varepsilon v - \tau)dv. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Unter der Voraussetzung $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^N$ werden die Taylorentwicklungen der Funktionen $\Phi_{1,kl}(s)$ und $\Phi_{2,kl}(s)$ aufgestellt

$$\Phi_{i,kl}(s) = \sum_{j=0}^N \frac{\Phi_{i,kl}^{(j)}(s_i)}{j!} (s - s_i)^j + \varrho_{\Phi_{i,kl}}^{N+1}(s, s_i), \quad i = 1, 2,$$

wobei

$$\varrho_{\Phi_{i,kl}}^{N+1}(s, s_i) = \frac{1}{N!} \int_{s_i}^s \Phi_{i,kl}^{(N+1)}(u)(s-u)^N du$$

das Restglied in Integralform ist. Für die Ableitungen berechnet man für $s \in [0, \delta]$

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,kl}^{(j)}(s) &= \int_0^{\delta-s} Q_k(u) Q_{l,1}^{(j)}(u+s) du + \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^{m+1} Q_{k,1}^{(m)}(\delta-s) Q_{l,1}^{(j-1-m)}(\delta) \\
&\quad + \int_{\delta-s}^{\infty} Q_k(u) Q_{l,2}^{(j)}(u+s) du + \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m Q_{k,1}^{(m)}(\delta-s) Q_{l,2}^{(j-1-m)}(\delta) \\
&= \int_0^{\infty} Q_k(u) Q_l^{(j)}(u+s) du + \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m Q_{k,1}^{(m)}(\delta-s) \left[Q_{l,2}^{(j-1-m)}(\delta) - Q_{l,1}^{(j-1-m)}(\delta) \right] \\
&= q_{kl}^j(s) + \psi_{kl}^j(s)
\end{aligned}$$

und für $s \in [\delta, \infty)$

$$\Phi_{2,kl}^{(j)}(s) = \int_0^{\infty} Q_k(u) Q_{l,2}^{(j)}(u+s) du = q_{kl}^j(s),$$

wenn

$$\psi_{kl}^j(s) := \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m Q_{k,1}^{(m)}(\delta-s) \left[Q_{l,2}^{(j-1-m)}(\delta) - Q_{l,1}^{(j-1-m)}(\delta) \right], \quad s \in [0, \delta] \quad (5.2)$$

die Terme der Unstetigkeiten und

$$q_{kl}^j(s) = \int_0^{\infty} Q_k(u) Q_l^{(j)}(u+s) du, \quad s \in [0, \infty) \quad (5.3)$$

die Entwicklungskoeffizienten in der bisher üblichen Notation bezeichnen. Entsprechend der Definitionsgebiete entwickelt man in (5.1)

1. für $0 \leq \tau \leq \delta$ die Funktion $\Phi_{2,kl}(s)$ an der Stelle $s_2 = \delta$ und $\Phi_{1,kl}(s)$ an der Stelle $s_1 = \tau$ sowie
2. für $\tau \geq \delta$ die Funktion $\Phi_{2,kl}(s)$ an der Stelle $s_2 = \tau$ und $\Phi_{1,kl}(s)$ an der Stelle $s_1 = \delta$.

Im weiteren werden die Betrachtungen für $0 \leq \tau \leq \delta$ und $\tau \geq \delta$ aufgrund der verschiedenen Stellen, an denen die Funktionen entwickelt werden, getrennt fortgesetzt. Zunächst werden die asymptotischen Entwicklungen von $R_{x_k x_l}(\tau)$ für $0 \leq \tau \leq \delta$ und $\tau \geq \delta$ hergeleitet. Im Anschluß daran werden die Teile wieder zusammengefügt sowie die bezüglich τ punktweise Variante der Entwicklung in eine Potenzreihe und eine bezüglich τ gleichmäßige Reihendarstellung formuliert.

Entwicklung von $R_{x_k x_l}(\tau)$ für $0 \leq \tau \leq \delta$

Das Einsetzen der Taylorentwicklung liefert die Darstellung

$$\begin{aligned}
R_{x_k x_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon}{j!} \left\{ \Phi_{2,kl}^{(j)}(\delta) \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) (\tau - \varepsilon v - \delta)^j dv + \Phi_{1,kl}^{(j)}(\tau) \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) (-\varepsilon v)^j dv \right. \\
&\quad \left. + \Phi_{1,lk}^{(j)}(\tau) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) (\varepsilon v - 2\tau)^j dv + \Phi_{2,lk}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) (\varepsilon v - \tau - \delta)^j dv \right\} \\
&\quad + \varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) \\
&= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ \Phi_{2,kl}^{(j)}(\delta) \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(-v + \frac{\tau-\delta}{\varepsilon}\right)^j dv + \Phi_{1,kl}^{(j)}(\tau) \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j dv \right. \\
&\quad \left. + \Phi_{1,lk}^{(j)}(\tau) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(v - 2\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^j dv + \Phi_{2,lk}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - \frac{\tau+\delta}{\varepsilon}\right)^j dv \right\} \\
&\quad + \varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

mit dem Restglied

$$\begin{aligned}
\varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) &= \frac{\varepsilon}{N!} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) \int_{\delta}^{\tau-\varepsilon v} \Phi_{2,kl}^{(N+1)}(s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv \right. \\
&\quad + \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} \Phi_{1,kl}^{(N+1)}(s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv \\
&\quad + \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} \Phi_{1,lk}^{(N+1)}(s) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv \\
&\quad \left. + \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \int_{\delta}^{\varepsilon v - \tau} \Phi_{2,lk}^{(N+1)}(s) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv \right\}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Lemma 5.2 Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^N$. Dann ist die Darstellung (5.4) eine gleichmäßige

asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion $R_{x_k x_l}(\tau)$ auf $[0, \delta]$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ mit $\varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$.

Beweis.

Wie im Beweis von Satz 4.4 ist zum einen die Ordnung der Entwicklungsglieder und zum anderen die Ordnung des Restgliedes nachzuweisen. Es werden Abschätzungen der vier Integrale in den Entwicklungskoeffizienten angegeben, die dann auch für die Abschätzung des entsprechenden Terms im Restglied Verwendung finden. Bezeichnen $C_{\Phi_{i,kl}^j}$ Konstanten, die die j -te Ableitung der Funktionen $\Phi_{i,kl}(\tau)$ betragsmäßig auf dem jeweiligen Definitionsgebiet beschränken, d. h.

$$\left| \Phi_{i,kl}^{(j)}(\tau) \right| \leq C_{\Phi_{i,kl}^{(j)}}, \quad i, k, l = 1, 2, \quad j = 0, \dots, N+1,$$

dann folgt aus den vier im weiteren angegebenen Punkten die Behauptung:

1. Für das erste Integral in (5.4), das Bestandteil des Entwicklungskoeffizienten ist, ermittelt man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) (\tau - \varepsilon v - \delta)^j dv \right| &\leq \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} |R(v)| |\tau - \varepsilon v - \delta|^j dv \leq \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} |R(v)| |\varepsilon v|^j dv \\ &\leq \int_{-1}^0 |R(v)| |\varepsilon v|^j dv \leq R(0) \varepsilon^j \int_0^1 v^j dv = \frac{R(0)}{j+1} \varepsilon^j, \end{aligned}$$

da für die Integrationsvariable gilt $v \leq \frac{\tau-\delta}{\varepsilon} \leq 0$, woraus $0 \leq \delta - \tau \leq -\varepsilon v$ und damit auch $|\tau - \varepsilon v - \delta| \leq -\varepsilon v = |\varepsilon v|$ gefolgert werden können.

Die erhaltene Abschätzung wird ebenfalls für die Bestimmung der Ordnung des entsprechenden Summanden des Restgliedes verwendet. Man erhält

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) \int_{\delta}^{\tau-\varepsilon v} \Phi_{2,kl}^{(N+1)}(s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv \right| \\ &\leq \frac{C_{\Phi_{2,kl}^{(N+1)}} \varepsilon}{N!} \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} |R(v)| \left| \int_{\delta}^{\tau-\varepsilon v} |\tau - \varepsilon v - s|^N ds \right| dv \\ &= \frac{C_{\Phi_{2,kl}^{(N+1)}} \varepsilon}{(N+1)!} \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} |R(v)| |\tau - \varepsilon v - \delta|^{N+1} dv \leq \frac{C_{\Phi_{2,kl}^{(N+1)}} R(0)}{(N+2)!} \varepsilon^{N+2}, \end{aligned}$$

wenn zusätzlich

$$\left| \int_{\delta}^{\tau-\varepsilon v} |\tau - \varepsilon v - s|^N ds \right| = \left| \int_{\tau-\varepsilon v-\delta}^0 |s|^N ds \right| = \frac{|\tau - \varepsilon v - \delta|^{N+1}}{N+1}$$

eingesetzt wird.

Analog ermittelt man die Ungleichungen

2. – für den Entwicklungskoeffizienten

$$\left| \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v)(-\varepsilon v)^j dv \right| \leq \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} |R(v)||\varepsilon v|^j dv \leq \varepsilon^j \int_{-1}^1 |R(v)||v|^j dv \leq \frac{2R(0)}{j+1} \varepsilon^j,$$

– für das Restglied

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} \Phi_{1,kl}^{(N+1)}(s)(\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv \right| \\ & \leq \frac{C_{\Phi_{1,kl}^{(N+1)}} \varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} |R(v)| \left| \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} |\tau - \varepsilon v - s|^N ds \right| dv \\ & = \frac{C_{\Phi_{1,kl}^{(N+1)}} \varepsilon}{(N+1)!} \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} |R(v)||\varepsilon v|^{N+1} dv \leq \frac{2C_{\Phi_{1,kl}^{(N+1)}} R(0)}{(N+2)!} \varepsilon^{N+2}, \end{aligned}$$

3. – für den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v)(\varepsilon v - 2\tau)^j dv \right| & \leq \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} |R(v)||\varepsilon v - 2\tau|^j dv \leq \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} |R(v)|(\varepsilon v)^j dv \\ & \leq \varepsilon^j R(0) \int_0^1 v^j dv = \frac{R(0)}{j+1} \varepsilon^j, \end{aligned}$$

da für $0 \leq \tau \leq \varepsilon v$ die Ungleichung $|\varepsilon v - 2\tau| \leq \varepsilon v$ folgt,

– für das Restglied

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} \Phi_{1,lk}^{(N+1)}(s)(\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv \right| \\ & \leq \frac{C_{\Phi_{1,lk}^{(N+1)}} \varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} |R(v)| \left| \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} |\varepsilon v - \tau - s|^N ds \right| dv \\ & = \frac{C_{\Phi_{1,lk}^{(N+1)}} \varepsilon}{(N+1)!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} |R(v)||\varepsilon v - 2\tau|^{N+1} dv \leq \frac{C_{\Phi_{1,lk}^{(N+1)}} R(0)}{(N+2)!} \varepsilon^{N+2}, \end{aligned}$$

4. – für den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v)(\varepsilon v - \tau - \delta)^j dv \right| &\leq \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} |R(v)| |\varepsilon v - \tau - \delta|^j dv \leq \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} |R(v)| (\varepsilon v)^j dv \\ &\leq R(0) \varepsilon^j \int_0^1 v^j dv = \frac{R(0)}{j+1} \varepsilon^j, \end{aligned}$$

da im Fall $0 \leq \tau + \delta \leq \varepsilon v$ auch $|\varepsilon v - (\tau + \delta)| \leq \varepsilon v$ gilt und

– für das Restglied

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \int_{\delta}^{\varepsilon v - \tau} \Phi_{2,lk}^{(N+1)}(s) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv \right| \\ &\leq \frac{C_{\Phi_{2,lk}^{(N+1)}} \varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} |R(v)| \left| \int_{\delta}^{\varepsilon v - \tau} |\varepsilon v - \tau - s|^N ds \right| dv \\ &= \frac{C_{\Phi_{2,lk}^{(N+1)}} \varepsilon}{(N+1)!} \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} |R(v)| |\varepsilon v - \tau - \delta|^{N+1} dv \leq \frac{C_{\Phi_{2,lk}^{(N+1)}} R(0)}{(N+2)!} \varepsilon^{N+2}. \end{aligned}$$

□

Entwicklung von $R_{x_k x_l}(\tau)$ für $\tau \geq \delta$

In diesem Fall ergibt sich durch Einsetzen der Taylorentwicklung die Darstellung der Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} R_{x_k x_l}(\tau) & \tag{5.6} \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon}{j!} \left\{ \Phi_{2,kl}^{(j)}(\tau) \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) (-\varepsilon v)^j dv + \Phi_{1,kl}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) (\tau - \varepsilon v - \delta)^j dv \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{1,lk}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) (\varepsilon v - \tau - \delta)^j dv + \Phi_{2,lk}^{(j)}(\tau) \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) (\varepsilon v - 2\tau)^j dv \right\} \\ &\quad + \varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ \Phi_{2,kl}^{(j)}(\tau) \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j dv + \Phi_{1,kl}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) \left(-v + \frac{\tau-\delta}{\varepsilon}\right)^j dv \right. \\
 &\quad \left. + \Phi_{1,kl}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(v - \frac{\tau+\delta}{\varepsilon}\right)^j dv + \Phi_{2,kl}^{(j)}(\tau) \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - 2\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^j dv \right\} \\
 &\quad + \varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta)
 \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$\begin{aligned}
 \varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) &= \frac{\varepsilon}{N!} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} \Phi_{2,kl}^{(N+1)}(s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv \right. \\
 &\quad + \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) \int_{\delta}^{\tau-\varepsilon v} \Phi_{1,kl}^{(N+1)}(s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv \\
 &\quad + \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \int_{\delta}^{\varepsilon v - \tau} \Phi_{1,kl}^{(N+1)}(s) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv \\
 &\quad \left. + \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} \Phi_{2,kl}^{(N+1)}(s) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv \right\}. \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

Lemma 5.3 Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{B}}^N$. Dann ist die Darstellung (5.6) eine gleichmäßige asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion $R_{x_k x_l}(\tau)$ auf $[\delta, \infty)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ mit $\varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$.

Beweis.

Analog zum Beweis von Lemma 5.2 sind Abschätzungen für die vier Integrale der Entwicklungsglieder und der dazugehörigen Terme des Restgliedes zu ermitteln. Die Behauptung ergibt sich aus den Ungleichungen

1. – für den Entwicklungskoeffizienten

$$\left| \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) (-\varepsilon v)^j dv \right| \leq \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} |R(v)| |\varepsilon v|^j dv \leq \varepsilon^j \int_{-1}^1 |R(v)| |v|^j dv \leq \frac{2R(0)}{j+1} \varepsilon^j,$$

– für das Restglied

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} \Phi_{2,kl}^{(N+1)}(s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv \right| \\
& \leq \frac{C_{\Phi_{2,kl}^{(N+1)}} \varepsilon}{N!} \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} |R(v)| \left| \int_{\tau}^{\tau-\varepsilon v} |\tau - \varepsilon v - s|^N ds \right| dv \\
& = \frac{C_{\Phi_{2,kl}^{(N+1)}} \varepsilon}{(N+1)!} \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} |R(v)| |\varepsilon v|^{N+1} dv \leq \frac{2C_{\Phi_{2,kl}^{(N+1)}} R(0)}{(N+2)!} \varepsilon^{N+2},
\end{aligned}$$

2. – für den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) (\tau - \varepsilon v - \delta)^j dv \right| & \leq \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} |R(v)| |\tau - \varepsilon v - \delta|^j dv \leq \int_0^1 |R(v)| (\varepsilon v)^j dv \\
& \leq \frac{R(0)}{j+1} \varepsilon^j,
\end{aligned}$$

da für $\varepsilon v \geq \tau - \delta \geq 0$ die Ungleichung $|\tau - \varepsilon v - \delta| = |\varepsilon v - (\tau - \delta)| \leq \varepsilon v$ folgt,

– für das Restglied

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) \int_{\delta}^{\tau-\varepsilon v} \Phi_{1,kl}^{(N+1)}(s) (\tau - \varepsilon v - s)^N ds dv \right| \\
& \leq \frac{C_{\Phi_{1,kl}^{(N+1)}} \varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} |R(v)| \left| \int_{\delta}^{\tau-\varepsilon v} |\tau - \varepsilon v - s|^N ds \right| dv \\
& = \frac{C_{\Phi_{1,kl}^{(N+1)}} \varepsilon}{(N+1)!} \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} |R(v)| |\tau - \varepsilon v - \delta|^{N+1} dv \leq \frac{C_{\Phi_{1,kl}^{(N+1)}} R(0)}{(N+2)!} \varepsilon^{N+2},
\end{aligned}$$

3. – für den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) (\varepsilon v - \tau - \delta)^j dv \right| & \leq \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} |R(v)| |\varepsilon v - \tau - \delta|^j dv \leq \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} |R(v)| (\varepsilon v)^j dv \\
& \leq \varepsilon^j R(0) \int_0^1 v^j dv = \frac{R(0)}{j+1} \varepsilon^j,
\end{aligned}$$

da im Fall $0 \leq \delta \leq \tau \leq \varepsilon v$ auch $0 \leq \tau + \delta \leq 2\varepsilon v$ und damit $|\varepsilon v - (\tau + \delta)| \leq \varepsilon v$ gilt,
 – für das Restglied

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \int_{\delta}^{\varepsilon v - \tau} \Phi_{1,lk}^{(N+1)}(s) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv \right| \\
 & \leq \frac{C_{\Phi_{1,lk}^{(N+1)}} \varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} |R(v)| \left| \int_{\delta}^{\varepsilon v - \tau} |\varepsilon v - \tau - s|^N ds \right| dv \\
 & = \frac{C_{\Phi_{1,lk}^{(N+1)}} \varepsilon}{(N+1)!} \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} |R(v)| |\varepsilon v - \tau - \delta|^{N+1} dv \leq \frac{C_{\Phi_{1,lk}^{(N+1)}} R(0)}{(N+2)!} \varepsilon^{N+2},
 \end{aligned}$$

4. – für den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) (\varepsilon v - 2\tau)^j dv \right| & \leq \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} |R(v)| |\varepsilon v - 2\tau|^j dv \leq \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} |R(v)| (\varepsilon v)^j dv \\
 & \leq R(0) \varepsilon^j \int_0^1 v^j dv = \frac{R(0)}{j+1} \varepsilon^j,
 \end{aligned}$$

da aus $\varepsilon v \geq \tau + \delta \geq \tau \geq 0$ die Ungleichung $|\varepsilon v - 2\tau| \leq \varepsilon v$ folgt und
 – für das Restglied

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} \Phi_{2,lk}^{(N+1)}(s) (\varepsilon v - \tau - s)^N ds dv \right| \\
 & \leq \frac{C_{\Phi_{2,lk}^{(N+1)}} \varepsilon}{N!} \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} |R(v)| \left| \int_{\tau}^{\varepsilon v - \tau} |\varepsilon v - \tau - s|^N ds \right| dv \\
 & = \frac{C_{\Phi_{2,lk}^{(N+1)}} \varepsilon}{(N+1)!} \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} |R(v)| |\varepsilon v - 2\tau|^{N+1} dv \leq \frac{C_{\Phi_{2,lk}^{(N+1)}} R(0)}{(N+2)!} \varepsilon^{N+2}.
 \end{aligned}$$

□

Die Abschätzungen der Terme des Restgliedes in den beiden Fällen $0 \leq \tau \leq \delta$ und $\tau \geq \delta$ lassen sich schließlich zu einer gemeinsamen oberen Schranke zusammenfassen, so daß gilt

$$|\varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta)| \leq \frac{R(0)\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} \left(2C_{\Phi_{1,kl}^{(N+1)}} + 2C_{\Phi_{2,kl}^{(N+1)}} + C_{\Phi_{1,lk}^{(N+1)}} + C_{\Phi_{2,lk}^{(N+1)}} \right), \tau \in [0, \infty).$$

5.2 Punktweise asymptotische Entwicklung

Betrachtet man die Entwicklung aus Lemma 5.2 und 5.3 punktweise, d. h. für festes $\tau \geq 0$, festes $\delta > 0$ und $\varepsilon \rightarrow 0$, dann sind je nach Lage von τ und δ zueinander die vier Integrationsgebiete der Integrale der Entwicklungskoeffizienten $(-\infty, \frac{\tau-\delta}{\varepsilon})$, $(\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}, \frac{\tau}{\varepsilon})$, $(\frac{\tau}{\varepsilon}, \frac{\tau+\delta}{\varepsilon})$ und $(\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}, \infty)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ dahingehend zu untersuchen, wie diese im Verhältnis zum Intervall $(-1, 1)$ stehen, in dem der Integrand nicht verschwindet. Wird der Durchschnitt für $\varepsilon \rightarrow 0$ leer, kann der jeweilige Term zum Restglied hinzugefügt werden. Dabei sind die folgenden vier Fälle zu unterscheiden.

1. $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} R_{x_k x_l}(0) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ \Phi_{2,kl}^{(j)}(\delta) \int_{-\infty}^{-\frac{\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(-v - \frac{\delta}{\varepsilon}\right)^j dv + \Phi_{1,kl}^{(j)}(0) \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^0 R(v) (-v)^j dv \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{1,lk}^{(j)}(0) \int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}} R(v) v^j dv + \Phi_{2,lk}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - \frac{\delta}{\varepsilon}\right)^j dv \right\} \\ &\quad + \varrho_{kl}^{N+1}(0, \varepsilon, \delta) \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \kappa_j \left[\Phi_{1,kl}^{(j)}(0) + \Phi_{1,lk}^{(j)}(0) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}), \end{aligned}$$

2. $0 < \tau < \delta$:

$$\begin{aligned} R_{x_k x_l}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ \Phi_{2,kl}^{(j)}(\delta) \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(-v + \frac{\tau-\delta}{\varepsilon}\right)^j dv + \Phi_{1,kl}^{(j)}(\tau) \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j dv \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{1,lk}^{(j)}(\tau) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(v - 2\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^j dv + \Phi_{2,lk}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - \frac{\tau+\delta}{\varepsilon}\right)^j dv \right\} \\ &\quad + \varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) \\ &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \mu_j \Phi_{1,kl}^{(j)}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}), \end{aligned}$$

3. $\tau = \delta$:

$$\begin{aligned}
 & R_{x_k x_l}(\delta) \\
 &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ \Phi_{2,kl}^{(j)}(\delta) \int_{-\infty}^0 R(v) (-v)^j dv + \Phi_{1,kl}^{(j)}(\delta) \int_0^{\frac{\delta}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j dv \right. \\
 &\quad \left. + \Phi_{1,lk}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(v - \frac{2\delta}{\varepsilon} \right)^j dv + \Phi_{2,lk}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{2\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - \frac{2\delta}{\varepsilon} \right)^j dv \right\} \\
 &\quad + \varrho_{kl}^{N+1}(\delta, \varepsilon, \delta) \\
 &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \kappa_j \left\{ \Phi_{2,kl}^{(j)}(\delta) + (-1)^j \Phi_{1,kl}^{(j)}(\delta) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}),
 \end{aligned}$$

4. $\tau > \delta$:

$$\begin{aligned}
 & R_{f_k f_l}(\tau) \\
 &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left\{ \Phi_{2,kl}^{(j)}(\tau) \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j dv + \Phi_{1,kl}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) \left(-v + \frac{\tau-\delta}{\varepsilon} \right)^j dv \right. \\
 &\quad \left. + \Phi_{1,lk}^{(j)}(\delta) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(v - \frac{\tau+\delta}{\varepsilon} \right)^j dv + \Phi_{2,lk}^{(j)}(\tau) \int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - 2\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^j dv \right\} \\
 &\quad + \varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) \\
 &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \mu_j \Phi_{2,kl}^{(j)}(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}).
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich die Entwicklung in eine Potenzreihe von ε .

Satz 5.4

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^N$. Für feste $\tau \geq 0$ gilt die punktweise asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion

$$R_{x_k x_l}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \begin{cases} \kappa_j [q_{kl}^j(0) + \psi_{kl}^j(0) + q_{lk}^j(0) + \psi_{lk}^j(0)] & \tau = 0 \\ \mu_j [q_{kl}^j(\tau) + \psi_{kl}^j(\tau)] & 0 < \tau < \delta \\ \mu_j q_{kl}^j(\delta) + (-1)^j \kappa_j \psi_{kl}^j(\delta) & \tau = \delta \\ \mu_j q_{kl}^j(\tau) & \tau > \delta \end{cases} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

mit den Entwicklungskoeffizienten $q_{kl}^j(\cdot)$ und den Unstetigkeitstermen $\psi_{kl}^j(\cdot)$ entsprechend den Beziehungen (5.2) und (5.3). Die Entwicklung für $\tau < 0$ ergibt sich aus der Beziehung $R_{x_k x_l}(\tau) = R_{x_l x_k}(-\tau)$.

Man erkennt die Unstetigkeitsstellen $\tau = 0$ und $|\tau| = \delta$, wobei die Unstetigkeit bei $|\tau| = \delta$ im Spezialfall gleicher Kernfunktionen $Q_1(\cdot) = Q_2(\cdot) = Q(\cdot)$ nur auftritt, wenn wenigstens eine der Ableitungen der Ordnung $j = 0, \dots, N - 1$ der Kernfunktion $Q(t)$ an der Stelle $t = \delta$ wirklich unstetig ist (vgl. Definition der Unstetigkeitsterme $\psi_{kl}^j(\tau)$ in (5.2)). Die Unstetigkeit bei $\tau = 0$ (für $N \geq 1$) ist aus dem schon betrachteten Fall stetiger Kernfunktionen bekannt.

Mit der Forderung $Q_k(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ aus Kapitel 4 sind auch die in diesem Kapitel gestellten Forderungen an die Kernfunktionen erfüllt, eine Entwicklung der Korrelationsfunktion nach Satz 5.4 ist ebenfalls möglich. Für solche Kernfunktionen verschwinden die Unstetigkeitsterme $\psi_{kl}^j(\tau)$, $j = 0, \dots, N$, die punktweisen Entwicklungen stimmen überein. Die punktweise Entwicklung ist eindeutig, da es eine Entwicklung in eine Potenzreihe von ε ist.

5.3 Gleichmäßige asymptotische Entwicklung

Die gleichmäßigen Entwicklungen nach Lemma 5.2 und 5.3 werden zu einer Entwicklung auf \mathbb{R}_+ zusammengesetzt, d. h. sowohl die Entwicklungsglieder als auch das Restglied ergeben sich als stückweise definierte Funktionen für $0 \leq \tau < \delta$ nach (5.4) und (5.5) sowie für $\tau \geq \delta$ nach (5.6) und (5.7).

Analog zu Abschnitt 4.4 wird eine Aussage zur Konvergenz der Folge der Approximationen formuliert.

Satz 5.5

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^\infty$. Konvergieren die Taylorreihen

$$\Phi_{i,kl}(t_i) = \sum_{j=0}^N \frac{\Phi_{i,kl}^{(j)}(s_i)}{j!} (t_i - s_i)^j, \quad i = 1, 2$$

für alle $t_1, s_1 \in [0, \delta]$ und alle $t_2, s_2 \in [\delta, \infty)$, dann konvergiert für alle festen $\varepsilon, \delta > 0$ und $\tau \in \mathbb{R}$ die Folge der Approximationen ${}^N R_{x_k x_l}(\tau)$ für $N \rightarrow \infty$ gegen $R_{x_k x_l}(\tau)$.

Nun sollen noch einige Vereinfachungen in der Darstellung vorgenommen werden. Eine übersichtlichere Notation wird durch die Verwendung der Korrekturterme $\kappa_j(\cdot, \cdot)$ und speziell $\kappa_{i,j}(\cdot)$ erreicht. Im Fall $0 \leq \tau \leq \delta$ erhält man für die Terme in den Entwicklungsgliedern

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(-v + \frac{\tau-\delta}{\varepsilon} \right)^j dv &= \mathbf{1}_{[0,1]} \left(\frac{\delta-\tau}{\varepsilon} \right) \kappa_j \left(\frac{\delta-\tau}{\varepsilon}, \frac{\delta-\tau}{\varepsilon} \right) \\ &= \mathbf{1}_{(\delta-\varepsilon, \delta]}(\tau) \kappa_{1,j} \left(\frac{\delta-\tau}{\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j dv = \mu_j - (-1)^j \mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(\tau) \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) - \mathbf{1}_{[\delta-\varepsilon,\delta]}(\tau) \kappa_{0,j} \left(\frac{\delta-\tau}{\varepsilon} \right),$$

$$\int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(v - 2\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^j dv = \mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(\tau) \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) - \mathbf{1}_{[0,\varepsilon-\delta)}(\tau) \kappa_j \left(\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}, \frac{2\tau}{\varepsilon} \right)$$

und

$$\int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - \frac{\tau+\delta}{\varepsilon} \right)^j dv = \mathbf{1}_{[0,\varepsilon-\delta)}(\tau) \kappa_{1,j} \left(\frac{\tau+\delta}{\varepsilon} \right).$$

Die Terme in den Entwicklungen für $\tau \geq \delta$ stellen sich dar als

$$\int_{-\infty}^{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}} R(v) (-v)^j dv = \mu_j - (-1)^j \mathbf{1}_{[\delta,\delta+\varepsilon)}(\tau) \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau-\delta}{\varepsilon} \right),$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\tau}{\varepsilon}} R(v) \left(-v + \frac{\tau-\delta}{\varepsilon} \right)^j dv &= (-1)^j \mathbf{1}_{[\delta,\delta+\varepsilon)}(\tau) \kappa_{1,j} \left(\frac{\tau-\delta}{\varepsilon} \right) \\ &\quad - (-1)^j \mathbf{1}_{[\delta,\varepsilon)}(\tau) \kappa_j \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \frac{\tau-\delta}{\varepsilon} \right), \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}} R(v) \left(v - \frac{\tau+\delta}{\varepsilon} \right)^j dv = \mathbf{1}_{[\delta,\varepsilon)}(\tau) \kappa_j \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \frac{\tau+\delta}{\varepsilon} \right) - \mathbf{1}_{[\delta,\varepsilon-\delta)}(\tau) \kappa_{1,j} \left(\frac{\tau+\delta}{\varepsilon} \right)$$

sowie

$$\int_{\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}}^{\infty} R(v) \left(v - 2\frac{\tau}{\varepsilon} \right)^j dv = \mathbf{1}_{[\delta,\varepsilon-\delta)}(\tau) \kappa_j \left(\frac{\tau+\delta}{\varepsilon}, \frac{2\tau}{\varepsilon} \right).$$

Für $\varepsilon \leq 2\delta$ verschwinden die Terme mit dem Faktor $\mathbf{1}_{[\delta,\varepsilon-\delta)}(\tau)$ und für $\varepsilon \leq \delta$ zusätzlich die Terme mit $\mathbf{1}_{[0,\varepsilon-\delta)}(\tau)$ sowie $\mathbf{1}_{[\delta,\varepsilon)}(\tau)$. Betrachtet man die Entwicklung als asymptotische Entwicklung für $\varepsilon \rightarrow 0$, wird ε jedes feste $\delta > 0$ unterschreiten. Für Approximationen mit festem ε sind diese Terme aber gegebenenfalls zu berücksichtigen. Im weiteren wird aus Gründen der Übersichtlichkeit sogar von $\varepsilon \leq \frac{\delta}{2}$ ausgegangen, denn dann überschneiden sich die Bereiche $[0, \varepsilon)$ und $(\delta - \varepsilon, \delta]$ nicht. Durch diese Einschränkungen kommen nur noch Korrekturterme des Typs $\kappa_{i,j}(\cdot)$ vor.

Satz 5.6

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^N$. Im Fall $\varepsilon \leq \frac{\delta}{2}$ gilt für die Korrelationsfunktion auf $[0, \infty)$ die gleichmäßige asymptotische Entwicklung

$$R_{x_k x_l}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \varphi_{kl}^j(\tau, \varepsilon, \delta) + \varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\varphi_{kl}^j(\tau, \varepsilon, \delta) = \begin{cases} [q_{kl}^j(\tau) + \psi_{kl}^j(\tau)] [\mu_j - (-1)^j \kappa_{0,j}(\frac{\tau}{\varepsilon})] + [q_{lk}^j(\tau) + \psi_{lk}^j(\tau)] \kappa_{2,j}(\frac{\tau}{\varepsilon}) & \tau \in [0, \varepsilon) \\ [q_{kl}^j(\tau) + \psi_{kl}^j(\tau)] \mu_j & \tau \in [\varepsilon, \delta - \varepsilon) \\ [q_{kl}^j(\tau) + \psi_{kl}^j(\tau)] [\mu_j - \kappa_{0,j}(\frac{\delta-\tau}{\varepsilon})] + q_{kl}^j(\delta) \kappa_{1,j}(\frac{\delta-\tau}{\varepsilon}) & \tau \in [\delta - \varepsilon, \delta) \\ q_{kl}^j(\tau) [\mu_j - (-1)^j \kappa_{0,j}(\frac{\tau-\delta}{\varepsilon})] + [q_{kl}^j(\delta) + \psi_{kl}^j(\delta)] (-1)^j \kappa_{1,j}(\frac{\tau-\delta}{\varepsilon}) & \tau \in [\delta, \delta + \varepsilon) \\ q_{kl}^j(\tau) \mu_j & \tau \in [\delta + \varepsilon, \infty) \end{cases}$$

und dem Restglied $\varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$ nach (5.5) und (5.7).

Setzt man zum Vergleich mit Kapitel 4 Kernfunktionen $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathfrak{G}^N$ voraus, erhält man nicht die asymptotische Entwicklung nach Satz 4.4, d. h. die dort angegebene Entwicklung ist kein Spezialfall, da sich die Approximationen für $|\tau| \in (\delta - \varepsilon, \delta) \cup (\delta, \delta + \varepsilon)$ unterscheiden (man vergleiche mit der Darstellung (4.19)).

5.4 Vektorwertiger Fall

Es wird nun davon ausgegangen, daß die Kernfunktionen $Q_1(\cdot)$ und $Q_2(\cdot)$ komplexe Matrixfunktionen und $(\varepsilon f)_{\varepsilon>0}$ komplexwertige Zufallsvektoren sind. Die Herleitung der Entwicklung verläuft analog zum eindimensionalen Fall. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist. Die bereits in Kapitel 4 für den vektorwertigen Fall eingeführte Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird verwendet. Neben den bekannten Ausdrücken $\langle q_{kl}^j(s), B \rangle$ für die Entwicklungskoeffizienten bezeichnen

$$\langle \psi_{kl}^j(s), B \rangle := \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m Q_{k,1}^{(m)}(\delta - s) B \left[Q_{l,2}^{(j-1-m)}(\delta) - Q_{l,1}^{(j-1-m)}(\delta) \right]^*, \quad s \in [0, \delta]$$

die Terme der Unstetigkeiten, wobei mit der Festlegung

$$\psi_{kl}^j(s) := \langle \psi_{kl}^j(s), \mathbf{I} \rangle$$

die Einheitlichkeit zur bisherigen Bezeichnung bewahrt bleibt. Treten im ersten Argument Summen von Termen $q_{kl}^j(s)$ beziehungsweise $\psi_{kl}^j(s)$ auf, dann ist die Abbildung nach der Vorschrift

$$\langle q_{kl}^j(s) + \psi_{kl}^j(s), B \rangle := \langle q_{kl}^j(s), B \rangle + \langle \psi_{kl}^j(s), B \rangle$$

aufzulösen.

Die Entwicklungssätze lassen sich nun übersichtlich formulieren. Die Verallgemeinerungen der Sätze 5.4 und 5.6 lauten

Satz 5.7

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^N$. Für feste $\tau \geq 0$ gilt die punktweise asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion

$$R_{x_k x_l}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \begin{cases} \langle q_{kl}^j(0) + \psi_{kl}^j(0), \kappa_j^* \rangle + \langle q_{lk}^{j*}(0) + \psi_{lk}^{j*}(0), \kappa_j \rangle & \tau = 0 \\ \langle q_{kl}^j(\tau) + \psi_{kl}^j(\tau), \mu_j^* \rangle & 0 < \tau < \delta \\ \langle q_{kl}^j(\delta), \mu_j^* \rangle + (-1)^j \langle \psi_{kl}^j(\delta), \kappa_j \rangle & \tau = \delta \\ \langle q_{kl}^j(\tau), \mu_j^* \rangle & \tau > \delta \end{cases} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

Die Entwicklung für $\tau < 0$ ergibt sich aus der Beziehung $R_{x_k x_l}(\tau) = R_{x_l x_k}^*(-\tau)$.

Satz 5.8

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^N$. Im Fall $\varepsilon \leq \frac{\delta}{2}$ gilt für die Korrelationsfunktion auf $[0, \infty)$ die gleichmäßige asymptotische Entwicklung

$$R_{x_k x_l}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \varphi_{kl}^j(\tau, \varepsilon, \delta) + \varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\varphi_{kl}^j(\tau, \varepsilon, \delta) = \begin{cases} \langle q_{kl}^j(\tau) + \psi_{kl}^j(\tau), \mu_j^* - (-1)^j \kappa_{0,j}(\frac{\tau}{\varepsilon}) \rangle + \langle q_{lk}^j(\tau) + \psi_{lk}^j(\tau), \kappa_{2,j}(\frac{\tau}{\varepsilon}) \rangle & \tau \in [0, \varepsilon) \\ \langle q_{kl}^j(\tau) + \psi_{kl}^j(\tau), \mu_j^* \rangle & \tau \in [\varepsilon, \delta - \varepsilon) \\ \langle q_{kl}^j(\tau) + \psi_{kl}^j(\tau), \mu_j^* - \kappa_{0,j}^*(\frac{\delta - \tau}{\varepsilon}) \rangle + \langle q_{kl}^j(\delta), \kappa_{1,j}^*(\frac{\delta - \tau}{\varepsilon}) \rangle & \tau \in [\delta - \varepsilon, \delta) \\ \langle q_{kl}^j(\tau), \mu_j^* - (-1)^j \kappa_{0,j}(\frac{\tau - \delta}{\varepsilon}) \rangle + (-1)^j \langle q_{kl}^j(\delta) + \psi_{kl}^j(\delta), \kappa_{1,j}(\frac{\tau - \delta}{\varepsilon}) \rangle & \tau \in [\delta, \delta + \varepsilon) \\ \langle q_{kl}^j(\tau), \mu_j^* \rangle & \tau \in [\delta + \varepsilon, \infty) \end{cases}$$

und einem Restglied $\varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta) = \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$.

Das Restglied $\varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon, \delta)$ läßt sich unter Berücksichtigung der Nichtkommutativität der Matrixmultiplikation für $0 \leq \tau < \delta$ analog zu (5.5) und für $\tau \leq \delta$ analog zu (5.7) formulieren. Eine Abschätzung im Fall $|Q_k^{(N+1)}(t)| \leq C_{Q_k^{(N+1)}}$ ist durch

$$\begin{aligned} & |\varrho_{kl}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \\ & \leq \frac{C_R \varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} \left[4C_{Q_l^{(N+1)*}} \int_0^\infty |Q_k(u)| du + 2C_{Q_k^{(N+1)}} \int_0^\infty |Q_l^*(u)| du + 2C_{\psi_{kl}^{N+1}} + C_{\psi_{lk}^{*N+1}} \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

gegeben, wenn die Konstanten $C_{\psi_{kl}^{N+1}}$ obere Schranken für die Unstetigkeitsterme der Form

$$\sum_{m=0}^N |Q_{k,1}^{(m)}(t)| \left| Q_{l,2}^{(N-m)*}(\delta) - Q_{l,1}^{(N-m)*}(\delta) \right| \leq C_{\psi_{kl}^{N+1}}, \quad t \in [0, \delta]$$

darstellen.

5.5 Konvergenz der Folge der Approximationen

In Anbetracht der Abschätzung des Restgliedes (5.8) stellt sich die Frage nach einer hinreichenden Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Approximationen analog zu Korollar 4.17.

Korollar 5.9

Seien $Q_1(\cdot), Q_2(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^\infty$. Existieren nichtnegative Konstanten C_1, C_2 und N_0 , so daß

$$|Q_k^{(N)}(t)| \leq C_{Q_k^{(N)}} \leq N^{C_1} C_2^N, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad k = 1, 2, \quad \text{für } N \geq N_0 \quad (4.18)$$

gilt, dann konvergiert für jedes $\varepsilon > 0$ die Folge der Approximationen ${}^N R_{x_k x_l}(\cdot)$ gleichmäßig auf \mathbb{R} gegen die exakte Funktion, d. h. es gilt

$$R_{x_k x_l}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} {}^N R_{x_k x_l}(\tau).$$

Beweis.

Es ist nachzuweisen, daß die Schranken $C_{\psi_{kl}^{N+1}}$ in (5.8) ebenfalls (4.18) erfüllen. Die Bedingung für gleichmäßige Konvergenz (4.18) ist äquivalent zur Forderung, daß nichtnegative Konstanten C_1, C_2 und C_3 existieren, so daß

$$C_{Q_k^{(N)}} \leq C_3 (N+1)^{C_1} C_2^N, \quad k = 1, 2, \quad N = 0, 1, \dots$$

gilt. Für den Unstetigkeitsterm $\psi_{kl}^{N+1}(\cdot)$ läßt sich wegen

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^N |Q_{k,1}^{(m)}(t)| \left| Q_{l,2}^{(N-m)*}(\delta) - Q_{l,1}^{(N-m)*}(\delta) \right| \\ & \leq \sum_{m=0}^N |Q_k^{(m)}(t)| \left(|Q_l^{(N-m)*}(\delta)| + |Q_k^{(N-m)*}(\delta)| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{m=0}^N C_3(m+1)^{C_1} C_2^m 2C_3(N-m+1)^{C_1} C_2^{N-m} \\ &= 2C_3^2 C_2^N \sum_{m=0}^N (m+1)^{C_1} (N-m+1)^{C_1} \leq 2C_3^2 (N+1)^{2C_1+1} C_2^N \end{aligned}$$

eine Schranke $C_{\psi_{kl}}^{N+1}$ vom selben Typ finden. □

5.6 Abschwächung der Voraussetzungen

Wendet man die „klassischen“ Entwicklungssätze für Integralfunktionale schwach korrelierter Funktionen ([26, 27]) auf die Situation in Abschnitt 4.1 an, so erhält man unter der Zusatzvoraussetzung von Annahme 3.2 an den eingehenden Zufallsprozeß das Korollar 4.6 für $N = 0$ und $N = 1$ mit einer Fehlerordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$ anstatt von $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$. Mit der schwächeren Aussage zur Fehlerordnung sind auch schwächere Voraussetzungen an die Kernfunktionen der Integralfunktionale verbunden.

Die Voraussetzung $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ (und damit auch $Q(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^N$) entsprechend der Annahme 4.2 läßt sich für bestimmte Entwicklungssätze in den Kapiteln 4 und 5 wie folgt abschwächen.

Satz 5.10

Erfüllen die Kernfunktionen $Q_k(\cdot)$ anstatt $Q_k(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ (bzw. $\widehat{\mathfrak{G}}^N$), $k = 1, 2$, die Forderung

- für $N = 0$: $Q_k(\cdot) \in L_1 \cap L_2$,
- für $N \geq 1$: $Q_k(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N-1}$ (bzw. $\widehat{\mathfrak{G}}^{N-1}$),

dann gelten die Entwicklungssätze 4.4, 4.11 und 5.6, die Lemmata 5.2 und 5.3 sowie die daraus folgenden Korollare ohne die Angabe des exakten Restgliedes und mit einer Fehlerordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$ anstatt von $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$.

Beweis.

In den Beweisen sind die Restglieder in Integralform für die Taylorentwicklung der Funktionen $q_{kl}(\cdot)$ (man beachte Bemerkung 4.19) und $\Phi_{i,kl}(\cdot)$ durch die entsprechenden Peanoschen Restglieder zu ersetzen. □

Die Forderungen an die Kernfunktionen in den Sätzen 4.8 und 4.14 lassen sich ebenfalls abschwächen. Das ist jedoch nicht auf die eben beschriebene Weise möglich. Hierzu sind weiterführende Überlegungen notwendig, auf die an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll.

Kapitel 6

Anwendungen

Im folgenden werden die verschiedenen asymptotischen Entwicklungen der Kapitel 4 und 5 zur Korrelationsanalyse des Systems

$$\dot{z}(t, \omega) = Az(t, \omega) + g(t, \omega) \quad (2.1)$$

mit

$$g(t, \omega) = \sum_{k=0}^p P_k f^{(k)}(t, \omega) \quad (2.4)$$

benutzt. Wie aus Abschnitt 2.2 bekannt ist, ist der Fall eines Systems höherer Ordnung (2.2) hierin enthalten. Die theoretischen Aussagen werden allgemein für das System (2.1) getroffen. An einem Beispiel für (2.2) werden die Eigenschaften der Entwicklungen bei verschiedenen Ansätzen der zufälligen Erregung $f(t, \omega)$ diskutiert.

Grundsätzlich sollen zwei Modelle der Erregungsfunktion $f(t, \omega)$ zum Tragen kommen, die auch in [28] vorgeschlagen wurden. Zum einen ist dies die direkte Erregung durch ε -korrelierte Prozesse. Zum anderen wird der Prozeß $f(t, \omega)$ als Integralfunktional eines ε -korrelierten Prozesses angesetzt. Wie in [9, 13, 28] gezeigt wird, eignen sich diese Ansätze zur Modellierung für eine Vielzahl von typischen Zufallseinflüssen, wie z. B. einer zufälligen Straßenoberfläche.

6.1 Systeme mit ε -korrelierter Erregung

6.1.1 Modellierung der Erregung

Die Modellierung der Erregung $g(t, \omega)$ des linearen Systems (2.1) erfolgt mittels eines geeignet oft differenzierbaren ε -korrelierten Prozesses ${}^\varepsilon f(t, \omega)$, d. h.

$$g(t, \omega) = \sum_{k=0}^p P_k {}^\varepsilon f^{(k)}(t, \omega). \quad (6.1)$$

Aus Abschnitt 3.2 ist bekannt, daß verschiedene Ableitungen von ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ nach Definition 3.1 zwar ε -korreliert sind, jedoch nicht gleichzeitig Annahme 3.2 erfüllen.

Sei $R(\cdot)$ die generierende 1-korrelierte Korrelationsfunktion des Prozesses ${}^\varepsilon f(t, \omega)$, d. h. $R_{{}^\varepsilon f}(\tau) = R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$. Dann ergeben sich die Korrelations- bzw. Kreuzkorrelationsfunktionen

$$R_{{}^\varepsilon f^{(k)} {}^\varepsilon f^{(l)}}(\tau) = (-1)^k \varepsilon^{-k-l} R^{(k+l)}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad k, l = 0, \dots, p, \quad (6.2)$$

und die Korrelationsfunktion von (6.1)

$$R_{gg}(\tau) = \sum_{k,l=0}^p P_k R_{{}^\varepsilon f^{(k)} {}^\varepsilon f^{(l)}}(\tau) P_l^* = \sum_{k,l=0}^p (-1)^k \varepsilon^{-k-l} P_k R^{(k+l)}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) P_l^*.$$

Zumindest ein Diagonalelement der Korrelationsfunktion $R_{gg}(\tau)$ wächst wenigstens im Punkt $\tau = 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ von der Ordnung ε^{-2p} , wenn die Matrix P_p verschieden von 0 ist.

Bemerkung 6.1 Um eine Korrelationsfunktion $R_{gg}(\tau) = \mathcal{O}(1)$ zu erhalten, multipliziert man die Gleichung (6.2) mit ε^{2p} . Das entspricht einer rechten Seite

$$g(t, \omega) = \sum_{k=0}^p P_k {}^\varepsilon \tilde{f}^{(k)}(t, \omega) \quad (6.3)$$

mit ${}^\varepsilon \tilde{f}(t, \omega) = \varepsilon^p {}^\varepsilon f(t, \omega)$. Die Korrelationsfunktion von ${}^\varepsilon \tilde{f}^{(p)}(t, \omega)$ wird dann von der Korrelationsfunktion $(-1)^p R^{(2p)}(\cdot)$ generiert. Für die asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion des Systemausgangs ist es unbedeutend, welche Ableitung diese Eigenschaft hat. Die Entwicklungen der Korrelationsfunktionen für den alternativen Ansatz erhält man, indem man die angegebenen Formeln mit ε^{2p} multipliziert.

Wenn nicht ausdrücklich erwähnt, soll dieser Ansatz daher nicht verwendet werden.

6.1.2 Entwicklung der Korrelationsfunktion

Die stationäre Lösung von (2.1) hat die Gestalt

$$z(t, \omega) = \sum_{k=0}^p \int_{-\infty}^t G(t-s) P_k {}^\varepsilon f^{(k)}(s, \omega) ds. \quad (6.4)$$

Für die Anwendung der Entwicklungssätze ist es erforderlich, Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion $G(t) = e^{At}$ zu untersuchen.

Lemma 6.2

Für die Matrixexponentialfunktion $G(t) = e^{At}$ einer stabilen Matrix A gilt

1. $G(\cdot) \in \mathfrak{C}^\infty$ und
2. $G(\cdot)$ erfüllt die Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz (4.18).

Beweis.

Die Gestalt der Matrixexponentialfunktion wird ausführlich dargelegt, da einige Details im nächsten Abschnitt noch benötigt werden.

Eine beliebige quadratische Matrix A (in diesem Fall der Dimension $nr \times nr$) lässt sich durch Ähnlichkeitstransformation mit einer regulären Matrix V in die Jordansche Normalform $J = V^{-1}AV$ bringen ([44, 47]). Die Matrix J ist dabei wie folgt aufgebaut. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ die verschiedenen Eigenwerte von A mit den (algebraischen) Vielfachheiten n_1, \dots, n_d , wobei $n_1 + \dots + n_d = nr$ ist. Dann hat J die Blockdiagonalgestalt

$$J = \text{diag}(J_{n_{1,1}}(\lambda_1), \dots, J_{n_{1,g_1}}(\lambda_1), \dots, J_{n_{d,1}}(\lambda_d), \dots, J_{n_{d,g_d}}(\lambda_d)),$$

wobei die $(m \times m)$ -dimensionale Matrix

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

ein sogenannter Jordanblock der Dimension m zum Eigenwert λ ist. Für $m = 1$ ist $J_1(\lambda) = \lambda$.

Zu jedem Eigenwert λ_i bezeichnet die Zahl der vorkommenden Jordanblöcke g_i dessen geometrische Vielfachheit und die Zahlen $n_{i,k}$, $k = 1, \dots, g_i$, die jeweiligen Dimensionen, wobei gilt $\sum_{k=1}^{g_i} n_{i,k} = n_i$, $i = 1, \dots, d$.

Die Matrixexponentialfunktion eines Jordanblockes $J_m(\lambda)$ ist nach [2] durch

$$e^{J_m(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^{m-1}/(m-1)! \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, die Matrixexponentialfunktion von A berechnet sich entsprechend der Formel

$$e^{At} = V e^{Jt} V^{-1}.$$

Bezeichnet $n_{i,\max} := \max\{n_{i,1}, \dots, n_{i,g_i}\}$ die größte Dimension eines Jordanblockes zum Eigenwert λ_i der Matrix A , kann die Gestalt der Matrixexponentialfunktion spezifiziert werden. Die Elemente von e^{At} sind Funktionen

$$\sum_{i=1}^d e^{\lambda_i t} p_i(t), \quad (6.5)$$

wobei die Polynome $p_i(t)$ vom Grad kleiner als $n_{i,\max} \leq n_i$ sind.

Aus der Darstellung der Matrixexponentialfunktion wird ersichtlich, daß für eine stabile Matrix A (reell- oder komplexwertig) $G(t) = e^{At} \in \mathfrak{G}^\infty$ auf \mathbb{R}_+ gilt.

Außerdem ist aufgrund der Abschätzung

$$|G^{(N)}(t)| = |A^N e^{At}| \leq |A^N| |e^{At}| \leq |A|^N |e^{At}|$$

die hinreichende Bedingung (siehe Korollar 4.17) für die gleichmäßige Konvergenz erfüllt. \square

Im Spezialfall, daß für jeden der verschiedenen Eigenwerte die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmen, bezeichnet $A = V\Lambda V^{-1}$ die Eigenwertzerlegung der Matrix A mit der Diagonalmatrix aller (auch gleicher) Eigenwerte $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{nr})$.

Lemma 6.2 sichert die Existenz der asymptotischen Entwicklung der Korrelationsfunktion von (6.4) beliebiger Ordnung, da sich jeder Summand der Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= \sum_{k,l=0}^p \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t+\tau} G(t-u) P_k R_{\varepsilon f^{(k)} \varepsilon f^{(l)}}(v-u) P_l^* G^*(t+\tau-v) dv du \\ &= \sum_{k,l=0}^p (-1)^k \varepsilon^{-k-l} \int_0^\infty \int_0^\infty G(u) P_k R^{(k+l)} \left(\frac{u+\tau-v}{\varepsilon} \right) P_l^* G^*(v) dv du \end{aligned}$$

(man vergleiche mit (4.4)) nach Satz 4.4 entwickeln läßt.

Mit den Entwicklungskoeffizienten

$$q_{kl}^j(\tau) = \int_0^\infty (G(u) P_k) (P_l^* G^{(j)*}(u+\tau)) du$$

erhält man die Entwicklungen der Korrelationsfunktion für $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= \sum_{k,l=0}^p \sum_{j=0}^{N-2p+k+l} (-1)^k \frac{\varepsilon^{j-k-l+1}}{j!} \left[\left\langle q_{kl}^j(\tau), \mu_j^{(k+l)*} + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle q_{lk}^{j*}(\tau), \kappa_{2,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2p+2}), \end{aligned} \quad (6.6)$$

und analog aus den Sätzen 4.11 und 4.14 für $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned} R_{z\dot{z}}(\tau) &= \sum_{k,l=0}^p \sum_{j=0}^{N-2p+k+l} (-1)^k \frac{\varepsilon^{j-k-l+1}}{j!} \left[\left\langle q_{kl}^{j+1}(\tau), \mu_j^{(k+l)*} + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \left\langle q_{lk}^{j+1*}(\tau), \kappa_{2,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2p+2}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

und

$$\begin{aligned}
R_{\dot{z}\dot{z}}(\tau) = & \sum_{\substack{k,l=0 \\ k+l \geq 2p-N-1}}^p (-1)^k \varepsilon^{-k-l} P_k R^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) F_l^* \\
& - \sum_{k,l=0}^p \sum_{j=0}^{N-2p+k+l} (-1)^k \frac{\varepsilon^{j-k-l+1}}{j!} \left\{ \left[\left\langle q_{kl}^{j+2}(\tau), \mu_j^{(k+l)*} + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\langle q_{lk}^{j+2*}(\tau), \kappa_{2,j}^{(k+l)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2p+2}).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Wie sich die Entwicklungen für $\tau < 0$ ergeben, wird an dieser Stelle nicht wiederholt, die entsprechenden Beziehungen sind in den genannten Sätzen zu finden.

Bemerkung 6.3 Die Tatsache, daß die Approximationen für $\varepsilon \rightarrow 0$ womöglich unbeschränkt sind, stellt keinen Widerspruch zur Definition einer asymptotischen Entwicklung dar. Mit dem abgewandelten Ansatz von $g(t, \omega)$ aus Bemerkung 6.1 läßt sich der beschriebene Umstand im übrigen vermeiden.

Zusammenfassend läßt sich folgender Satz formulieren.

Satz 6.4

Sei ein System (2.1) mit einer Erregung durch ε -korrelierte Prozesse nach (6.1) gegeben. Dann existieren die asymptotischen Entwicklungen von (6.6), (6.7) und (6.8) für alle $N \in \mathbb{N}_0$ und die Folgen der Approximationen konvergieren für jedes $\varepsilon > 0$ und $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die exakten Funktionen.

Im Sinne der typischen Darstellung sollen im nächsten Schritt die Entwicklungen nach Potenzen von ε sortiert werden. Dazu wird in den Dreifachsummen von (6.6), (6.7) und (6.8)

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=0}^p \sum_{j=0}^{N-2p+k+l} \varepsilon^{j-k-l+1} u(k, l, j) &= \sum_{k,l=0}^p \sum_{j=2p-k-l}^N \varepsilon^{j-2p+1} u(k, l, j - 2p + k + l) \\
&= \sum_{j=0}^N \varepsilon^{j-2p+1} \sum_{k,l=0}^p u(k, l, j - 2p + k + l) \mathbf{1}_{\{j \geq 2p-k-l\}} \\
&= \sum_{j=0}^N \varepsilon^{j-2p+1} \sum_{\substack{k,l=0 \\ k+l \geq 2p-j}}^p u(k, l, j - 2p + k + l)
\end{aligned}$$

die Summationsreihenfolge geändert. Die Funktion $u(k, l, j)$ steht dabei abkürzend für die verschiedenen Summanden bis auf den Faktor der ε -Potenz und soll lediglich verdeutlichen, wie die Summationsindizes transformiert werden. Die umgeordneten Entwicklungen werden nicht nochmals angegeben.

Besonders interessant ist der Fall $N < p$. Dann führt die Bedingung $k + l \geq 2p - j$ in der inneren Summe dazu, daß die Werte $0 \leq k, l < p - N$ der Summationsindizes k und l für alle $j = 0, \dots, N$ ausgeschlossen sind. Für die Approximationen ${}^N R_{zz}(\tau)$ und ${}^N R_{z\dot{z}}(\tau)$ spielt es dann keine Rolle, ob in der Erregung (6.1) die Terme $P_0 \varepsilon f(t, \omega), \dots, P_{p-N-1} \varepsilon f^{(p-N-1)}(t, \omega)$ vorkommen oder nicht. Bei der Entwicklung von $R_{z\dot{z}}(\tau)$ stellt sich diese Situation aufgrund des ersten Terms für $N + 1 < p$ ein. Dann sind die Summationsindizes $0 \leq k, l < p - N - 1$ ausgeschlossen. Diese Summe kann durch

$$\sum_{\substack{k, l=0 \\ k+l \geq 2p-N-1}}^p \varepsilon^{-k-l} u(k, l) = \sum_{k, l=0}^p \sum_{j=0}^{N+1} \mathbf{1}_{\{j=2p-k-l\}} \varepsilon^{j-2p} u(k, l) = \sum_{j=0}^{\min\{2p, N+1\}} \varepsilon^{j-2p} \sum_{\substack{k, l=0 \\ k+l=2p-j}}^p u(k, l)$$

in eine entsprechende Gestalt gebracht werden.

Aus den asymptotischen Entwicklungen (6.6), (6.7) und (6.8) folgen unter anderem die Ordnungen der Korrelationsfunktionen

$$R_{zz}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2p+1}), \quad R_{z\dot{z}}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2p+1}) \quad \text{und} \quad R_{\dot{z}\dot{z}}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2p}).$$

Diese entsprechen gerade der kleinsten ε -Potenz. Wären die Korrelationsfunktionen tatsächlich sogar von höherer Ordnung, würde das der eben gemachten Aussage nicht widersprechen. Eine mögliche Ursache wäre, daß z. B. der Faktor

$$(-1)^p \left[\left\langle q_{pp}^0(\tau), \mu_0^{(2p)*} - \kappa_{0,0}^{(2p)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle + \left\langle q_{pp}^{0*}(\tau), \kappa_{2,0}^{(2p)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle \right]$$

vor ε^{-2p+1} in der Entwicklung von $R_{zz}(\tau)$ nicht wie bisher lediglich angenommen von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ ist, sondern aufgrund der Eigenschaften des Entwicklungskoeffizienten $q_{pp}^0(\tau)$ sowie der Eigenschaften von Korrelationsmomenten und Korrekturtermen der Ableitungen von 1-korrelierten Prozessen auch von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ist. Mit dieser Thematik beschäftigt sich der folgende Abschnitt.

6.1.3 Alternative Bestimmung der Entwicklung

Für ein System 1. Ordnung führen die Darlegungen aus Abschnitt 2.2 zu den Darstellungen

$$\begin{aligned} z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^t \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k G^{(k)}(t-s) P_k \right) \varepsilon f(s, \omega) ds \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{j=1}^{p-k} (-1)^{j-1} G^{(j-1)}(0) P_{k+j} \right) \varepsilon f^{(k)}(t, \omega) \\ &= \int_{-\infty}^t Q(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds + \sum_{k=0}^{p-1} Q_{k,0} \varepsilon f^{(k)}(t, \omega) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\dot{z}(t, \omega) &= \int_{-\infty}^t \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k G^{(k+1)}(t-s) P_k \right) \varepsilon f(s, \omega) ds \\ &\quad + \sum_{k=0}^p \left(\sum_{j=1}^{p-k} (-1)^{j-1} G^{(j)}(0) P_{k+j} \right) \varepsilon f^{(k)}(t, \omega) \\ &= \int_{-\infty}^t Q'(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds + \sum_{k=0}^p Q_{k,1} \varepsilon f^{(k)}(t, \omega)\end{aligned}$$

(man vergleiche mit der Formel (2.7) für die Werte $r = 1$ und $i = 0$ bzw. (2.8)), wenn

$$Q(t) = \sum_{k=0}^p (-1)^k G^{(k)}(t) P_k$$

und

$$Q_{k,i} = \sum_{j=1}^{p-k} (-1)^{j-1} G^{(j+i-1)}(0) P_{k+j}, \quad i = 0, 1$$

bezeichnen. Analog zur Herleitung von Gleichung (4.16) ergibt sich unter Verwendung von (6.2) für $\tau \geq 0$ die Entwicklung der Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned}R_{zz}(\tau) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q(u) R\left(\frac{u+\tau-v}{\varepsilon}\right) Q^*(v) dv du + \sum_{k,l=0}^{p-1} \varepsilon^{-k-l} (-1)^k Q_{k,0} R^{(k+l)}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) Q_{l,0}^* \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon^{-k} \left(\int_0^{\infty} Q(u) R^{(k)}\left(\frac{\tau+u}{\varepsilon}\right) du Q_{k,0}^* + (-1)^k Q_{k,0} \int_0^{\infty} R^{(k)}\left(\frac{\tau-u}{\varepsilon}\right) Q^*(u) du \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \left[\left\langle q_j(\tau), \mu_j^* + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right\rangle + \left\langle q_{lk}^{j*}(\tau), \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right\rangle \right] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j-k+1}}{j!} \left(Q^{(j)}(\tau) \kappa_{2,j}^{(k)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) Q_{k,0}^* + (-1)^k Q_{k,0} \left[\mu_j^{(k)*} + (-1)^{j+1} \kappa_{0,j}^{(k)} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right] Q^{(j)*}(\tau) \right) \\ &\quad + \sum_{k,l=0}^{p-1} \varepsilon^{-k-l} (-1)^k Q_{k,0} R^{(k+l)}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) Q_{l,0}^*,\end{aligned}$$

wobei die Sätze 4.4 und 4.8 für $N = \infty$ genutzt wurden. Die Funktionen $q_j(\cdot)$ bezeichnen wie üblich die Entwicklungskoeffizienten

$$q_j(\tau) = \int_0^{\infty} Q(u) Q^{(j)*}(u+\tau) du = \sum_{k,l=0}^p (-1)^{k+l} \int_0^{\infty} G^{(k)}(u) P_k P_l^* G^{(j+l)*}(u+\tau) du.$$

Es ist wiederum möglich, alle Terme mit gleichen ε -Potenzen bis zu einer gewissen Ordnung N mit einem Rest $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$ zusammenzufassen.

Eine analoge Vorgehensweise führt zu den Entwicklungen von $R_{zz}(\cdot)$ und $R_{z\dot{z}}(\cdot)$.

Aus den Darstellungen der Entwicklungen kann man die Ordnung der Korrelationsfunktionen ablesen, wie dies folgender Satz zum Ausdruck bringt.

Satz 6.5

Sei ein System (2.1) mit einer Erregung durch ε -korrelierte Prozesse nach (6.1) gegeben. Dann gilt

$$R_{zz}(\cdot) = \begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon) & p = 0 \\ \mathcal{O}(\varepsilon^{-2p+2}) & p \geq 1 \end{cases}, \quad R_{z\dot{z}}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2p+1}) \quad \text{und} \quad R_{\dot{z}\dot{z}}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2p}).$$

Bemerkung 6.6 Für $p \geq 1$ macht es wenig Sinn, die Approximation von $R_{zz}(\tau)$ nach (6.6) mit $N = 0$ zu verwenden. In diesem Fall ist der Approximationsfehler von derselben Ordnung wie die zu approximierende Funktion.

Gegenstand der Betrachtungen sei nun das System der Ordnung $r \geq 2$

$$\sum_{l=0}^r A_l x^{(l)}(t, \omega) = \tilde{g}(t, \omega) \quad (2.2)$$

mit der zufälligen Erregung

$$\tilde{g}(t, \omega) = \sum_{k=0}^p \tilde{P}_k \varepsilon f^{(k)}(t, \omega). \quad (6.9)$$

Die stationären Lösungen $x^{(l)}(t, \omega)$, $l = 0, \dots, r$ sind Bestandteile der stationären Lösungen $z(t, \omega)$ und $\dot{z}(t, \omega)$ des äquivalenten Systems 1. Ordnung. Die Korrelationsfunktionen $R_{zz}(\tau)$ und $R_{z\dot{z}}(\tau)$ enthalten demnach alle (Kreuz-) Korrelationsfunktionen von $x^{(l)}(t, \omega)$, $l = 0, \dots, r$ (manche davon mehrfach).

Die Entwicklungen der Korrelationsfunktionen ergeben sich aus den Formeln (6.6), (6.7) und (6.8). Aufgrund der speziellen Struktur des Problems sollen die Ordnungen der Korrelationsfunktionen spezifiziert werden. Dabei wird darauf verzichtet, die Entwicklungen von $R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot)$ für alle Fälle $i, j = 0, \dots, p$ im Detail darzulegen. Es werden nur die wesentlichen Aspekte zusammengefaßt.

Aus (2.6) wird ersichtlich, daß die Ableitungen

$$x^{(i)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q^{(i)}(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds \quad \text{für } i = 0, \dots, r-p-1$$

Integralfunktionale von $\varepsilon f(t, \omega)$ sind, wobei die Kernfunktion die Gestalt

$$Q(t) = \sum_{k=0}^p (-1)^k \tilde{G}^{(k)}(t) \tilde{P}_k$$

hat. Für eine Entwicklung der Korrelationsfunktionen $R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot)$ ist Satz 4.4 direkt anwendbar. Insbesondere folgt die Ordnung

$$R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{für } i, j = 0, \dots, r-p-1.$$

Auf analoge Weise leitet man aus den Beziehungen (2.7) und (2.8) die weiteren Aussagen des folgenden Satzes ab.

Satz 6.7

Sei ein System (2.2) mit stabiler Matrix A des Systems 1. Ordnung und einer Erregung durch ε -korrelierte Prozesse nach (6.9) gegeben. Dann gelten die Ordnungen der Korrelationsfunktionen für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{für } i, j = 0, \dots, r-p-1, \\ R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{2r-2p-i-j}) \quad \text{für } i, j = r-p, \dots, r \text{ und} \\ R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot) &= \mathcal{O}(\varepsilon^{r-p-j+1}) \quad \text{für } i = 0, \dots, r-p-1, j = r-p, \dots, r. \end{aligned}$$

Der für Schwingungsmodelle interessante Fall $r = p = 2$ führt insbesondere auf

$$R_{x^{(i)}x^{(j)}}(\cdot) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-i-j}) \quad \text{für } i, j = 0, \dots, 2.$$

6.1.4 Berechnung der Entwicklungskoeffizienten

Bei großdimensionierten Systemen ist es für die numerische Umsetzung und die Anwendung von Modellreduktionsverfahren ([13, 46]) günstiger, die Berechnungen am System 1. Ordnung durchzuführen.

In den Entwicklungen für das System 1. Ordnung kommen Entwicklungskoeffizienten vom Typ

$$\begin{aligned} \langle q_{kl}^j(\tau), B \rangle &= \int_0^\infty G(u) P_k B P_l^* G^{(j)*}(u+\tau) du = \int_0^\infty e^{Au} P_k B P_l^* e^{A(u+\tau)*} A^{j*} du \\ &= V \int_0^\infty e^{Ju} V^{-1} P_k B P_l^* V^{-1*} e^{J^*(u+\tau)} du J^{j*} V^* \end{aligned}$$

vor, wobei B für eines der Korrelationsmomente bzw. deren Korrekturterme steht. Die möglichen Abhängigkeiten dieses „Platzhalters“ von den Indizes k, l, j sowie von den

Variablen τ und ε spielen im folgenden Schritt, der Ausführung der Integration, nur eine untergeordnete Rolle und werden nicht bezeichnet. Mit derselben Argumentation sei es erlaubt, den Ausdruck

$$\tilde{B} := V^{-1} P_k B P_l^* V^{-1*}$$

abzukürzen.

Da die Matrixexponentialfunktion e^{Jt} eine zur Jordanmatrix J identische Blockdiagonalstruktur besitzt, läßt sich die Matrixmultiplikation $e^{Ju} \tilde{B} e^{J^*(u+\tau)}$ blockweise durchführen. Seien $J_1 = J_{n_1}(\lambda_1)$ und $J_2 = J_{n_2}(\lambda_2)$ zwei Jordanblöcke der Jordanform J zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 , n_1 und n_2 die jeweiligen Dimensionen. Dabei sei nicht ausgeschlossen, daß es sich bei J_1 und J_2 um denselben Jordanblock handelt, d. h. neben $J_1 = J_2$ darf auch die Position in der Jordanmatrix J übereinstimmen. Mit \hat{B} sei der entsprechende $(n_1 \times n_2)$ -Block der Matrix \tilde{B} bezeichnet. Das Matrizenprodukt

$$e^{Ju} \tilde{B} e^{J^*(u+\tau)} = \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & e^{J_1 u} & \\ & & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \hat{B} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & e^{J_2^*(u+\tau)} & \\ & & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & & \cdot \\ \cdot & e^{J_1 u} \hat{B} e^{J_2^*(u+\tau)} & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{pmatrix}.$$

wird ermittelt, indem J_1 und J_2 alle Jordanblöcke und \hat{B} die Blöcke der Matrix \tilde{B} durchlaufen. Unter Berücksichtigung der elementweisen Darstellungen der Matrixexponentialfunktion der Jordanblöcke

$$(e^{J_1 u})_{k_1 l_1} = \mathbf{1}_{\{k_1 \leq l_1\}} e^{\lambda_1 u} \frac{u^{l_1 - k_1}}{(l_1 - k_1)!}$$

und

$$\begin{aligned} (e^{J_2^*(u+\tau)})_{l_2 k_2} &= \mathbf{1}_{\{k_2 \leq l_2\}} e^{\bar{\lambda}_2(u+\tau)} \frac{(u+\tau)^{l_2 - k_2}}{(l_2 - k_2)!} = \mathbf{1}_{\{k_2 \leq l_2\}} \frac{e^{\bar{\lambda}_2(u+\tau)}}{(l_2 - k_2)!} \sum_{i=0}^{l_2 - k_2} \binom{l_2 - k_2}{i} u^{l_2 - k_2 - i} \tau^i \\ &= \mathbf{1}_{\{k_2 \leq l_2\}} e^{\bar{\lambda}_2(u+\tau)} \sum_{i=0}^{l_2 - k_2} \frac{u^{l_2 - k_2 - i} \tau^i}{(l_2 - k_2 - i)! i!} \end{aligned}$$

für $1 \leq k_1, l_1 \leq n_1$ und $1 \leq k_2, l_2 \leq n_2$ ergeben sich die Elemente

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty e^{J_1 u} \hat{B} e^{J_2^*(u+\tau)} du \right)_{k_1 k_2} &= \int_0^\infty \left(e^{J_1 u} \hat{B} e^{J_2^*(u+\tau)} \right)_{k_1 k_2} du \\ &= \sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} \sum_{i=0}^{l_2 - k_2} \frac{\hat{B}_{l_1 l_2} e^{\bar{\lambda}_2 \tau} \tau^i}{(l_1 - k_1)! (l_2 - k_2 - i)! i!} \int_0^\infty e^{(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2)u} u^{l_1 - k_1 + l_2 - k_2 - i} du \\ &= \sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} \sum_{i=0}^{l_2 - k_2} \frac{\hat{B}_{l_1 l_2} e^{\bar{\lambda}_2 \tau} \tau^i}{(l_1 - k_1)! (l_2 - k_2 - i)! i!} \frac{(l_1 - k_1 + l_2 - k_2 - i)!}{(-\lambda_1 - \bar{\lambda}_2)^{l_1 - k_1 + l_2 - k_2 - i + 1}} \\ &= \sum_{l_1=k_1}^{n_1} \sum_{l_2=k_2}^{n_2} \sum_{i=0}^{l_2 - k_2} \binom{l_1 - k_1 + l_2 - k_2 - i}{l_1 - k_1} \frac{\hat{B}_{l_1 l_2} e^{\bar{\lambda}_2 \tau} \tau^i}{i! (-\lambda_1 - \bar{\lambda}_2)^{l_1 - k_1 + l_2 - k_2 + 1}}. \end{aligned}$$

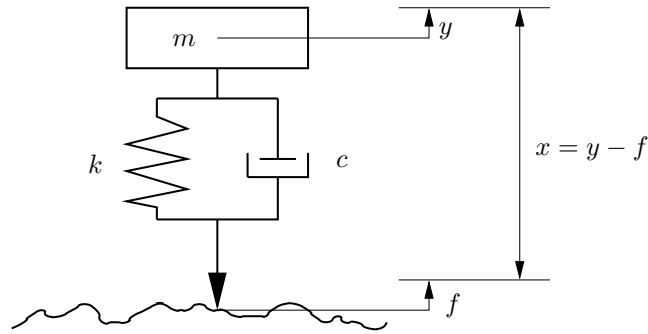


Abbildung 6.1: Einmassenschwinger

Die Stabilität der Matrix A sichert $\lambda_1 + \bar{\lambda}_2 \neq 0$.

Im Fall einer diagonalisierbaren Systemmatrix $A = V\Lambda V^{-1}$ reduziert sich solch ein Block zu einer Zahl, der Entwicklungskoeffizient ermittelt sich aus

$$\begin{aligned} \langle q_{kl}^j(\tau), B \rangle &= V \int_0^\infty e^{\Lambda u} V^{-1} P_k B P_l^* V^{-1*} e^{\Lambda^*(u+\tau)} du \Lambda^{j*} V^* \\ &= V \left(-\frac{e^{\bar{\lambda}_{k_2} \tau} \bar{\lambda}_{k_2}^j (V^{-1} P_k B P_l^* V^{-1*})_{k_1 k_2}}{\lambda_{k_1} + \bar{\lambda}_{k_2}} \right)_{k_1, k_2=1, \dots, nr} V^*. \end{aligned}$$

6.1.5 Beispiel Einmassenschwinger

Das einfachste Beispiel eines stochastisch erregten Oszillators ist der in Abbildung 6.1 gezeigte Einmassenschwinger. Er ist Abstraktionsmodell für eine Vielfalt von Anwendungen, insbesondere auch für Fahrzeuge. Ein Fahrzeug mit einer Masse m und einem Fahrwerk mit Dämpfungsparameter c und Federkraftkonstante k bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit über eine zufällige Straßenoberfläche $f(t, \omega)$. Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung der Masse $m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{f}) + k(y - f) = 0$ führt zu den Bewegungsgleichungen für die Absolutbewegung $y(t, \omega)$

$$\ddot{y} + 2\varrho\theta_0\dot{y} + \theta_0^2 y = 2\varrho\theta_0\dot{f} + \theta_0^2 f \quad (6.10)$$

und für die Relativbewegung $x(t, \omega)$

$$\ddot{x} + 2\varrho\theta_0\dot{x} + \theta_0^2 x = -\ddot{f}, \quad (6.11)$$

wenn $\theta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems und $\varrho = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ der Dämpfungsgrad ist. Je nach Wahl des Dämpfungsgrades hat die Systemmatrix A des Systems 1. Ordnung für $0 < \varrho < 1$ ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte, für $\varrho = 1$ einen doppelten reellen Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit 1 und für $\varrho > 1$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte [11]. Im Fall eines schwach gedämpften Systems, d. h. $0 < \varrho < 1$,

ist

$$\tilde{G}(t) = \frac{1}{\theta_d} e^{-\varrho\theta_0 t} \sin(\theta_d t)$$

mit $\theta_d := \sqrt{1 - \varrho^2} \theta_0$.

Der Einmassenschwinger mit zentrierter schwach stationärer rechter Seite $\tilde{g}(t, \omega)$

$$\ddot{x} + 2\varrho\theta_0 \dot{x} + \theta_0^2 x = \tilde{g}(t, \omega)$$

ist Gegenstand der Untersuchungen in [35] (siehe auch [41]). Dort wird gezeigt, daß sich die Korrelationsfunktion der stationären Lösung nach

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} q_0(|\tau - u|) R_{\tilde{g}\tilde{g}}(u) du$$

mit

$$q_0(\tau) = \int_0^{\infty} \tilde{G}(u) \tilde{G}(u + \tau) du = \frac{\theta_0^{-3}}{4\varrho\sqrt{1 - \varrho^2}} e^{-\varrho\theta_0\tau} \sin(\theta_d\tau + \varphi_d)$$

berechnen läßt, wobei $\varphi_d := \arccos(\varrho)$ gesetzt wird. Dann ergibt sich $\varrho = \cos(\varphi_d)$ und $\sqrt{1 - \varrho^2} = \sin(\varphi_d)$. Ebenso sind Formeln für die Ableitungen der Korrelationsfunktion angegeben. Bei Kenntnis der Korrelationsfunktion $R_{\tilde{g}\tilde{g}}(\tau)$ ist es möglich, die Korrelationsfunktion $R_{xx}(\tau)$ durch (numerische) Integration zu ermitteln.

Im Fall ε -korrelierter Erregung $\tilde{g}(t, \omega) = \varepsilon f(t, \omega)$ werden für die Entwicklung der Korrelationsfunktion die Funktionen

$$q_j(\tau) = q_0^{(j)}(\tau) = \frac{(-1)^j \theta_0^{j-3}}{4\varrho\sqrt{1 - \varrho^2}} e^{-\varrho\theta_0\tau} \sin(\theta_d\tau - (j-1)\varphi_d)$$

benötigt. Die Entwicklungen für $R_{xx}(\tau)$ und $R_{x\dot{x}}(\tau)$ entsprechen den Beziehungen (4.10) und (4.15).

Wegen $\tilde{G}(0) = 0$ ist $\dot{x}(t, \omega)$ ein Integralfunktional mit Kernfunktion $\tilde{G}'(\tau)$ und den Entwicklungskoeffizienten

$$\int_0^{\infty} \tilde{G}'(u) \tilde{G}^{(j+1)}(u + \tau) du = - \int_0^{\infty} \tilde{G}(u) \tilde{G}^{(j+2)}(u + \tau) du = -q_{j+2}(\tau).$$

Aus (4.10), (4.15) und (4.17) folgen

$$R_{x\dot{x}}(\tau) = - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+2}(|\tau|) \left[\mu_j + \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \varrho_{x\dot{x}}^{N+1}(|\tau|, \varepsilon),$$

$$R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) = \text{sign}(-\tau) \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+3}(|\tau|) \left[\mu_j - \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \varrho_{\dot{x}\dot{x}}^{N+1}(\tau, \varepsilon)$$

und

$$R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau) = (\tilde{G}'(0))^2 R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) + \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_{j+4}(|\tau|) \left[\mu_j + \tilde{\kappa}_j \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \varrho_{\ddot{x}\ddot{x}}^{N+1}(\tau, \varepsilon).$$

Für die Ableitungen der Kernfunktion

$$\tilde{G}^{(N)}(t) = \frac{1}{\theta_d} e^{-\varrho\theta_0 t} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (-\varrho\theta_0)^{N-k} \theta_d^k \sin\left(\theta_d t + \frac{k\pi}{2}\right)$$

gelten die Abschätzungen

$$|\tilde{G}^{(N)}(t)| \leq \frac{1}{\theta_d} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (\varrho\theta_0)^{N-k} \theta_d^k = \frac{(\varrho\theta_0 + \theta_d)^N}{\theta_d}$$

und

$$\int_0^{\infty} |\tilde{G}(u)| du \leq \frac{1}{\theta_d} \int_0^{\infty} e^{-\varrho\theta_0 u} du = \frac{1}{\theta_d \varrho\theta_0}.$$

Somit läßt sich die Größe des Approximationsfehlers der Korrelationsfunktion der Auslenkung

$$|\varrho_{xx}^{N+1}(\tau, \varepsilon)| \leq 3R(0) \frac{\varepsilon^{N+2}}{(N+2)!} \frac{(\varrho\theta_0 + \theta_d)^{N+1}}{\theta_d^2 \varrho\theta_0}$$

bestimmen. Obere Schranken für die Approximationsfehler der weiteren Korrelationsfunktionen ermittelt man analog.

Ist die Erregung eine Ableitung eines differenzierbaren ε -korrelierten Prozesses $\tilde{g}(t, \omega) = \varepsilon f^{(p)}(t, \omega)$ für ein $p \in \mathbb{N}$, sind in den Entwicklungen die Korrelationsmomente μ_j , die Korrekturterme $\tilde{\kappa}_j(\alpha)$ und $\tilde{\kappa}_j(\alpha)$ sowie $R(0)$ in der Abschätzung des Restgliedes durch die entsprechenden Größen der Ableitung $\varepsilon f^{(p)}(t, \omega)$ mit dem Faktor ε^{-2p} zu ersetzen. Exemplarisch sei die Korrelationsfunktion für $p = 2$

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j-3}}{j!} q_j(|\tau|) \left[\mu_j^{(4)} + \tilde{\kappa}_j^{(4)} \left(\frac{|\tau|}{\varepsilon} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N-2})$$

angegeben.

Der Satz 6.7 besagt nun, daß diese Korrelationsfunktion von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ ist, d. h. die alternative Berechnungsmethode erzielt eine Entwicklung, deren kleinste ε -Potenz ε^0 ist.

Aus der Darstellung

$$x(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \tilde{G}''(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds - \tilde{G}'(0) \varepsilon f(t, \omega)$$

als Ableitung eines Integralfunktional folgt die Entwicklung

$$R_{xx}(\tau) = R\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) (\tilde{G}'(0))^2 - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \tilde{q}_{j+2}(|\tau|) \left[\mu_j + \tilde{\kappa}_j\left(\frac{|\tau|}{\varepsilon}\right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2})$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\tilde{q}_j(\tau) = \int_0^{\infty} \tilde{G}'(u) \tilde{G}^{(j+1)}(u + \tau) du.$$

Theoretisch stimmen die punktweisen Approximationen beider Entwicklungen überein. Mit den Eigenschaften der Korrelationsmomente entsprechend Korollar 3.12

$$\mu_j^{(4)} = \begin{cases} 0 & j = 0, \dots, 3 \\ \frac{j!}{(j-4)!} \mu_{j-4} & j \geq 4 \end{cases} \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}_j^{(4)}(0) = \begin{cases} 0 & j = 0, \dots, 2 \\ 2R(0)3! & j = 3 \\ \frac{j!}{(j-4)!} \tilde{\kappa}_{j-4}(0) & j \geq 4 \end{cases}$$

sowie den Beziehungen

$$q_{j+2}(\tau) = -\tilde{q}_j(\tau), \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad q_3(0) = -\tilde{q}_1(0) = \frac{1}{2}(\tilde{G}'(0))^2$$

überzeugt man sich leicht davon.

Für das stochastische Verhalten des Systemausgangs ist es wesentlich, den Systemeingang entsprechend der Vorgaben des Modells anzupassen. Dabei spielt insbesondere die Differenzierbarkeit des Eingangsprozesses eine wichtige Rolle. Außerdem sollte für $g(t, \omega) = \varepsilon \ddot{f}(t, \omega)$ auch die zweite Ableitung eines Prozesses gewählt werden, da sonst wichtige Eigenschaften unberücksichtigt bleiben. In den Abbildungen 6.2 und 6.3 werden die Unterschiede verdeutlicht. Dabei sind die exakten Korrelationsfunktionen für die Parameter $\theta_0 = 3$, $\varrho = 0.5$ und $\varepsilon = 1$ zu sehen, die als Grenzwert der gleichmäßigen Approximationen analog zum Beispiel 4.7 bestimmt wurden. Die Abbildung 6.2 vergleicht die Systemausgänge des Einmassenschwingers bei Erregung durch die p -te Ableitung eines Prozesses mit normierter B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung $p + 1$ für $p = 0, \dots, 4$. Im Fall $p \geq 2$ ist dann die Erregung wirklich die zweite Ableitung eines zweimal differenzierbaren Prozesses $\varepsilon f^{(p-2)}(t, \omega)$.

In der Abbildung 6.3 ist nun der Fall dargestellt, daß die Erregung $\varepsilon \ddot{f}(t, \omega)$ gerade die zweite Ableitung eines Prozesses mit B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung $k + 1$ für $k = 2, \dots, 6$ ist. Mit wachsendem k nimmt auch die Differenzierbarkeit der Erregung zu, was insbesondere für die Ableitungen des Systemausgangs Folgen hat.

Der Ansatz entsprechend Abschnitt 6.1.1 schafft die Voraussetzungen, um die Korrelationsfunktion der Absolutbewegung $y(t, \omega)$ und deren Ableitungen sowie alle Kreuzkorrelationsfunktionen zwischen dem Systemeingang und den Systemausgängen auf der Basis

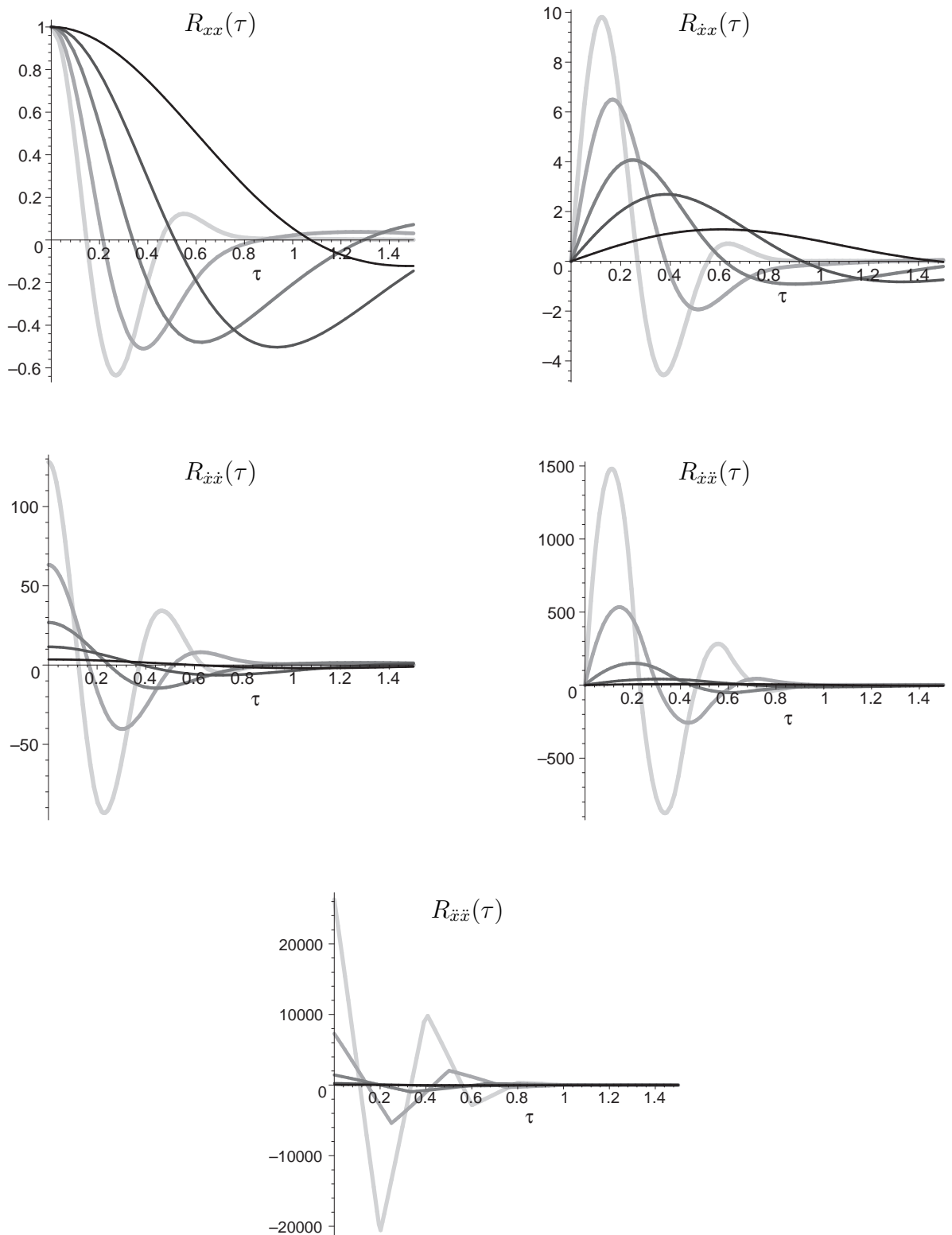


Abbildung 6.2: Korrelationsfunktionen des Einmassenschwingers bei Erregung durch p -te Ableitung der Prozesse mit B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung $p + 1$ für $\varepsilon = 1$ und $p = 0, \dots, 4$ (von dunkel nach hell)

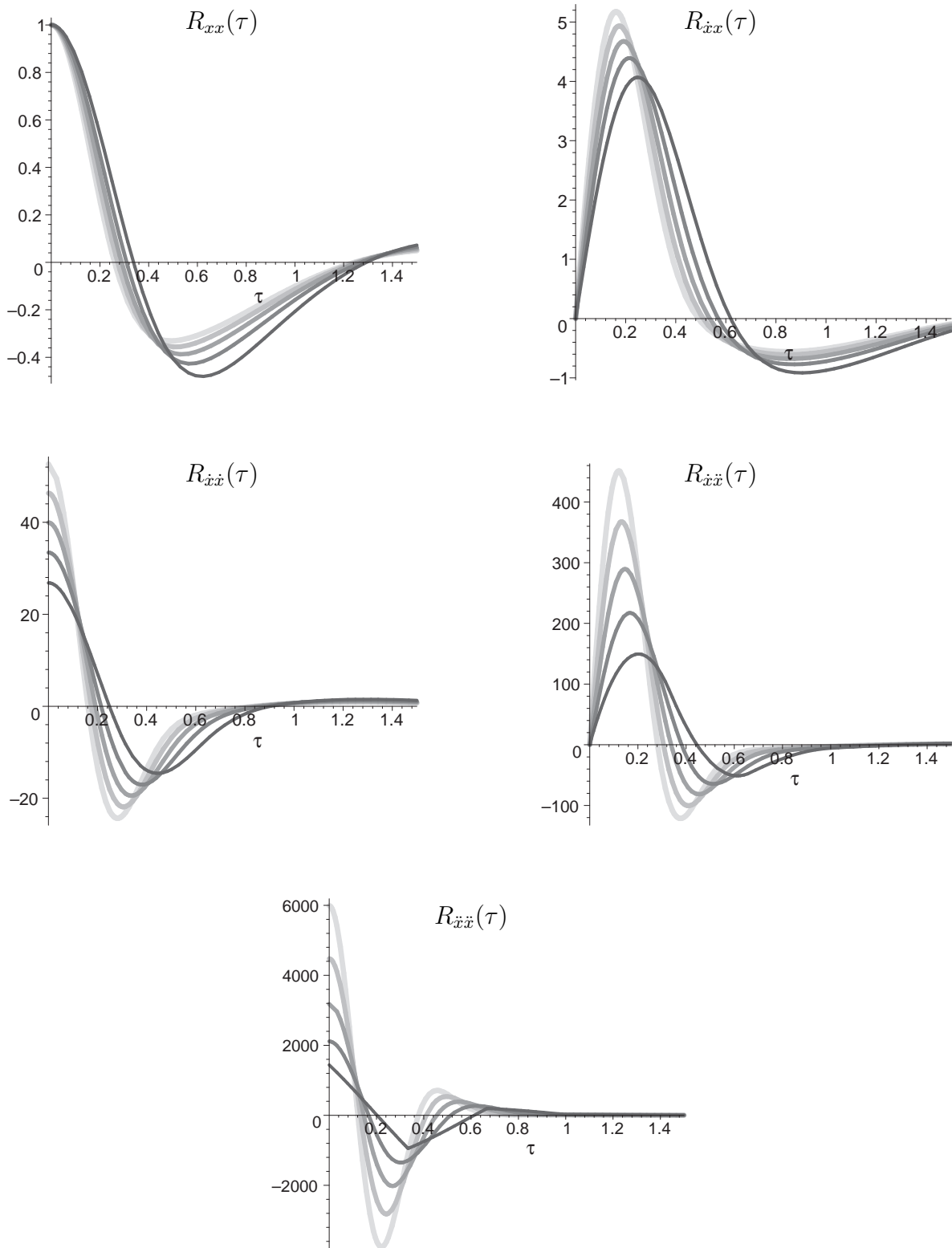


Abbildung 6.3: Korrelationsfunktionen des Einmassenschwingers bei Erregung durch 2. Ableitung der Prozesse mit B-Spline-Korrelationsfunktion der Ordnung $k + 1$ für $\varepsilon = 1$ und $k = 2, \dots, 6$ (von dunkel nach hell)

der Entwicklungssätze zum bestimmen. Es gelten für $k = 0, 1, 2$ die folgenden Zusammenhänge

$$\begin{aligned} R_{y^{(k)}y^{(k)}}(\tau) &= R_{x^{(k)}x^{(k)}}(\tau) + R_{x^{(k)}f^{(k)}}(\tau) + R_{f^{(k)}x^{(k)}}(\tau) + R_{f^{(k)}f^{(k)}}(\tau) \\ R_{x^{(k)}x^{(k)}}(\tau) &= R_{y^{(k)}y^{(k)}}(\tau) - R_{y^{(k)}f^{(k)}}(\tau) - R_{f^{(k)}y^{(k)}}(\tau) + R_{f^{(k)}f^{(k)}}(\tau). \end{aligned}$$

6.2 Systeme mit indirekter Erregung

Im letzten Abschnitt standen Systeme mit direkter ε -korrelierter Erregung zur Diskussion. Eine wichtige Rolle spielte dabei die Darstellung der stationären Lösung als Integralfunktional von ε -korrelierten Prozessen. Nun soll die Funktion

$$g(t, \omega) = \sum_{k=0}^p P_k f^{(k)}(t, \omega) \quad (2.4)$$

selbst als Integralfunktional dargestellt werden. Wenn alle benötigten Ableitungen

$$f^{(k)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q^{(k)}(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds, \quad k = 0, \dots, p \quad (6.12)$$

Integralfunktionale eines ε -korrelierten Prozesses sind, dann auch

$$g(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \left(\sum_{k=0}^p P_k Q^{(k)}(t-s) \right) \varepsilon f(s, \omega) ds.$$

Für die Kernfunktion $Q(\cdot)$ soll gelten

$$Q^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, p-1. \quad (6.13)$$

Diese Annahme ist für das weitere Vorgehen nicht notwendig, analoge Betrachtungen sind auch möglich, wenn $\varepsilon f(t, \omega)$ ein hinreichend oft differenzierbarer Prozeß ist.

Der Ansatz (6.12) wurde z. B. in [26, 45] verwendet und eignet sich unter anderem zur Modellierung von zufälligen Fahrbahnen ([13, 28]).

Das System (2.1) mit der Erregung (2.4) hat die stationäre Lösung

$$\begin{aligned} z(t, \omega) &= \sum_{k=0}^p \int_{-\infty}^t G(t-s) P_k f^{(k)}(t, \omega) ds \\ &= \sum_{k=0}^p \int_{-\infty}^t G(t-s) P_k \int_{-\infty}^s Q^{(k)}(s-u) \varepsilon f(u, \omega) duds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^p \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s G(t-s) P_k Q^{(k)}(s-u) \varepsilon f(u, \omega) \, duds \\
&= \sum_{k=0}^p \int_{-\infty}^t \int_0^{t-u} G(t-u-v) P_k Q^{(k)}(v) \varepsilon f(u, \omega) \, dvdu \\
&= \int_{-\infty}^t \sum_{k=0}^p \int_0^{t-s} G(t-s-u) P_k Q^{(k)}(u) \, du \varepsilon f(s, \omega) \, ds \\
&= \int_{-\infty}^t \hat{G}(t-s) \varepsilon f(s, \omega) \, ds
\end{aligned}$$

mit der Kernfunktion

$$\hat{G}(t) = \sum_{k=0}^p \int_0^t G(t-u) P_k Q^{(k)}(u) \, du. \quad (6.14)$$

Lemma 6.8

Erfüllt die Kernfunktion $Q(\cdot)$ die Eigenschaften (6.13) und $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^{p+N}$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$, dann gilt $\hat{G}(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$ und $\hat{G}(0) = O$.

Beweis.

Die Beweisidee stammt aus [46], S. 45, und läßt sich auf den vorliegenden Fall anwenden.

Aus der Darstellung der Ableitungen

$$\begin{aligned}
\hat{G}^{(l)}(t) &= \sum_{k=0}^p \left[\int_0^t G^{(l)}(t-u) P_k Q^{(k)}(u) \, du + \sum_{m=0}^{l-1} G^{(l-m-1)}(0) P_k Q^{(k+m)}(t) \right] \\
&= A^l \hat{G}(t) + \sum_{m=0}^{l-1} A^{l-m-1} \sum_{k=0}^p P_k Q^{(k+m)}(t)
\end{aligned} \quad (6.15)$$

für $l = 0, \dots, N+2$ wird ersichtlich, daß unter der Voraussetzung $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^{p+N}$ die Funktion $\hat{G}(\cdot)$ die Anforderungen für die Behauptung $\hat{G}(\cdot) \in \mathfrak{G}^{N+1}$ bis auf die Integrierbarkeit von $\hat{G}^{(l)}(\cdot)$, $l = 0, \dots, N+2$, bereits erfüllt. Mit $\hat{G}^{(N+2)}(\cdot)$ ist die fast überall existente Funktion gemeint, die sich durch die Absolutstetigkeit von $\hat{G}^{(N+1)}(\cdot)$ definiert. Es verbleibt zu zeigen, daß $\hat{G}(\cdot) \in L_1 \cap L_2$ ist.

Für den erforderlichen elementweisen Nachweis kann man sich auf den skalaren Fall beschränken. Sei $\check{G}(t)$ ein Element der Matrixexponentialfunktion $G(t)$ und $\check{Q}(t)$ ein Element von $P_k Q^{(k)}(t)$. Es existieren im Fall einer stabilen Systemmatrix aufgrund der Darstellung (6.5) Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so daß $|\check{G}(t)| \leq C_1 e^{-C_2 t}$ für $t \in \mathbb{R}_+$ gilt. In [46] wurde gezeigt, daß dann

$$\int_0^\infty \left| \int_0^t \check{G}(t-u) \check{Q}(u) du \right|^l dt \leq \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^l \int_0^\infty |\check{Q}(u)|^l du < \infty \quad \text{für } l = 1, 2$$

gilt. □

Lemma 6.9

Erfüllt die Kernfunktion der Erregung $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^\infty$ die Bedingung für gleichmäßige Konvergenz (4.18), dann auch die Kernfunktion der stationären Lösung des Systems $\hat{G}(\cdot)$.

Beweis.

Aus Lemma 6.8 folgt zunächst $\hat{G}(\cdot) \in \mathfrak{G}^\infty$.

Des weiteren soll die im Beweis von Korollar 5.9 verwendete äquivalente hinreichende Bedingung

$$|Q^{(N)}(t)| \leq C_3(N+1)^{C_1} C_2^N, \quad N = 0, 1, \dots \quad (6.16)$$

als Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz dienen. Unter den gemachten Voraussetzungen gilt für die Ableitungen (6.15) der Kernfunktion der stationären Lösung die Abschätzung

$$\left| \hat{G}^{(N)}(t) \right| \leq |A|^N \left| \hat{G}(t) \right| + \sum_{m=0}^{N-1} |A|^{N-m-1} \sum_{k=0}^p |P_k| |Q^{(k+m)}(t)|$$

für $N \in \mathbb{N}_0$. Setzt man (6.16) ein und berücksichtigt man die Beschränktheit von $|\hat{G}(t)|$, findet sich eine Abschätzung vom selben Typ. □

Satz 6.10

Es wird ein System (2.1) mit Erregung (2.4) durch Integralfunktionale (6.12) mit Kernfunktion $Q(\cdot)$ betrachtet.

Ist $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^{p+N}$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$, dann gelten die asymptotischen Entwicklungen der Korrelationsfunktionen für $\tau \geq 0$

$$\begin{aligned} R_{zz}(\tau) &= \sum_{j=0}^{N+1} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} [\langle q_j(\tau), \mu_j^* \rangle + \mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(\tau) c_j^0(\tau, \varepsilon)] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+3}) \\ R_{z\dot{z}}(\tau) &= \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} [\langle q_{j+1}(\tau), \mu_j^* \rangle + \mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(\tau) c_j^1(\tau, \varepsilon)] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}) \\ R_{\dot{z}\dot{z}}(\tau) &= - \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} [\langle q_{j+2}(\tau), \mu_j^* \rangle + \mathbf{1}_{[0,\varepsilon)}(\tau) c_j^2(\tau, \varepsilon)] + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+2}) \end{aligned}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$q_j(\tau) = \int_0^{\infty} \hat{G}(u) \hat{G}^{(j)*}(u + \tau) du$$

und den Korrekturtermen

$$c_j^i(\tau, \varepsilon) = (-1)^{j+1} \left\langle q_{j+i}(\tau), \kappa_{0,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle + (-1)^i \left\langle q_{j+i}^*(\tau), \kappa_{2,j} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right\rangle,$$

wobei die Funktion $\hat{G}(\cdot)$ die Darstellung (6.14) hat.

Ist $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^\infty$ und die Bedingung für gleichmäßige Konvergenz (4.18) erfüllt, dann konvergieren die Approximationen für alle $\varepsilon > 0$ und $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die exakten Funktionen.

Beweis.

Die Entwicklungen entsprechen den Sätzen 4.4, 4.11 und 4.14 für die vorliegende Situation. Die Konvergenz folgt aus Lemma 6.9. \square

Für die Kernfunktion $Q(\cdot)$ der Erregung wurden zwei Ansätze vorgeschlagen, deren Untersuchung sich im weiteren anschließt.

6.2.1 Formfilter

Der Prozeß $f(t, \omega)$ wird als stationäre Lösung eines Systems höherer Ordnung

$$\sum_{l=0}^{\hat{r}} \hat{A}_l f^{(l)}(t, \omega) = \hat{g}(t, \omega) \quad (6.17)$$

mit zufälliger Erregung

$$\hat{g}(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\hat{p}} \hat{P}_k \varepsilon f^{(k)}(t, \omega)$$

gewählt. Das entsprechende System 1. Ordnung

$$\dot{\hat{z}} = \hat{A} \hat{z} + \hat{g}(t, \omega) \quad (6.18)$$

habe eine stabile Systemmatrix \hat{A} . Dann erfüllt das System (6.18) die Voraussetzungen von Satz 6.4.

Um die Integralfunktionaldarstellung (6.12) der Ableitungen $f^{(l)}(t, \omega)$, $l = 0, \dots, p$ zu gewährleisten (es soll nur der Prozeß $\varepsilon f(t, \omega)$ vorkommen und nicht dessen Ableitungen), wird $\hat{p} \leq \hat{r} - p - 1$ gefordert (man vergleiche mit den Abschnitten 2.2 und 6.1.3). Die entsprechend des eben genannten Abschnittes zu bestimmende Kernfunktion $Q(\cdot)$ von $f(t, \omega)$ erfüllt dann die Voraussetzungen der Lemmata 6.8 und 6.9, so daß Satz 6.10 angewendet werden kann.

Andererseits lassen sich im Fall $p \leq \hat{r} - 1$ die Systeme (6.18) und

$$\dot{z} = Az + \sum_{k=0}^p P_k f^{(k)}(t, \omega) \quad (2.1)$$

zu einem System

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\hat{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \hat{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{g}(t, \omega) \end{pmatrix}$$

zusammenfügen, wobei die Matrix B die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} P_0 & \dots & P_p & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Die Stabilität der neuen Systemmatrix folgt aus der Stabilität von A und \hat{A} . Das zusammengesetzte System läßt sich mit den Methoden aus Abschnitt 6.1 behandeln, insbesondere gilt Satz 6.4. Der Nachteil des zusammengesetzten Systems ist, daß im Fall $1 \leq \hat{p} \leq \hat{r} - p - 1$ in den Entwicklungen wieder Terme mit dem Faktor $\varepsilon^{1-2\hat{p}}$ und Korrelationsmomente der Ableitung vorkommen, was mit dem Formfilteransatz eigentlich umgangen werden sollte.

Bemerkung 6.11 Im skalaren Fall heißt die Gleichung (6.17) „Formfiltergleichung mit ε -korrelierter Erregung“. Für $\hat{p} \leq \hat{r} - 1$ eignet sich die stationäre Lösung zur Approximation von Prozessen mit gebrochenrationaler Spektraldichte ([9, 46]), da die Spektraldichte der Approximation der Korrelationsfunktion der Ordnung $N = 0$ von dieser Gestalt ist. Zu einer vorgegebenen gebrochenrationalen Spektraldichte lassen sich die Zahlen \hat{r} und \hat{p} sowie die Koeffizienten \hat{A}_l , $l = 0, \dots, r$, und \hat{P}_k , $k = 0, \dots, \hat{p}$, bestimmen.

6.2.2 Glättung von Integralfunktionalen

Die grundlegende Idee der Prozedur der Glättung liegt in dem Ziel, eine gegebene Kernfunktion $Q(\cdot)$ so abzuwandeln, daß eine Integralfunktionaldarstellung der Ableitungen (6.12) sichergestellt wird, wenn diese Eigenschaft mit der ursprünglichen Kernfunktion nicht gegeben ist. Dabei soll das Integralfunktional mit der abgeänderten Kernfunktion das stochastische Verhalten des ursprünglichen Integralfunktionals möglichst gut nachbilden. Eine Möglichkeit besteht darin, die Kernfunktion $Q(\cdot)$ mit einer sogenannten Glättungsfunktion zu multiplizieren.

Definition 6.12

Sei $p \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$. Eine Funktion $h_{p,\delta} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- $0 \leq h_{p,\delta}(t) \leq 1$ für $0 \leq t < \delta$ und $h_{p,\delta}(t) = 1$ für $t \geq \delta$,
- $h_{p,\delta}(\cdot)$ ist $(p - 1)$ -mal stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$,
- $h_{p,\delta}(\cdot)$ ist p -mal stetig differenzierbar auf $[0, \delta]$ und

| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------|---|----|-----|-----|------|
| a_0 | 1 | 3 | 10 | 35 | 126 |
| a_1 | | -2 | -15 | -84 | -420 |
| . | | | 6 | 70 | 540 |
| . | | | | -20 | -315 |
| a_{p-1} | | | | | 70 |

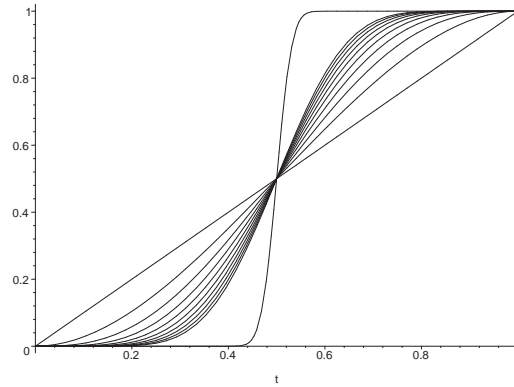


Tabelle 6.1: Koeffizienten der Glättungspolynome

Abbildung 6.4: Glättungspolynome zu $p = 1, \dots, 10, 200$

- $h_{p,\delta}^{(l)}(0) = 0$ für $l = 0, \dots, p-1$

wird Glättungsfunktion der Ordnung p genannt.

Beispiel 6.13 (siehe [36]) Die stückweise polynomiale Funktion

$$h_{p,\delta}(t) = \begin{cases} \tilde{h}_p\left(\frac{t}{\delta}\right) & 0 \leq t < \delta \\ 1 & t \geq \delta \end{cases} \quad \text{mit} \quad \tilde{h}_p(t) = \sum_{m=0}^{p-1} a_m t^{p+m}$$

erfüllt die Bedingungen an eine Glättungsfunktion der Ordnung p , wenn die Koeffizienten a_m des Glättungspolynoms $\tilde{h}_p(t)$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{p}{1} & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{2p-1}{1} \\ \binom{p}{2} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{2p-1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{p}{p-1} & \binom{p+1}{p-1} & \cdots & \binom{2p-1}{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ermittelt werden.

Die Koeffizienten der Glättungspolynome sind für $p = 1, \dots, 5$ in Tabelle 6.1 abzulesen. In Abbildung 6.4 sind die Glättungspolynome der Ordnung $p = 1, \dots, 10$ und $p = 200$ zu sehen. Die Ableitungen der polynomialen Glättungsfunktion haben für $t \in [0, \delta]$ die explizite Darstellung

$$h_{p,\delta}^{(i)}(t) = \frac{i!}{\delta^i} \sum_{m=\max\{i,p\}}^{2p-1} a_{m-p} \binom{m}{i} \left(\frac{t}{\delta}\right)^{m-i}.$$

6.2.3 Entwicklungen für glatte Kernfunktionen

Die geglättete Kernfunktion

$$Q_{p,\delta}(t) = h_{p,\delta}(t)Q(t)$$

ist eine stückweise definierte Funktion, die (vorausgesetzt $Q(\cdot)$ ist hinreichend glatt) $(p-1)$ -mal stetig differenzierbar auf \mathbb{R}_+ ist. Dabei soll die Bezeichnung „geglättete Kernfunktion“ lediglich verdeutlichen, daß diese als Produkt einer Kernfunktion mit einer Glättungsfunktion definiert ist und nicht etwa, daß die Funktion $Q_{p,\delta}(\cdot)$ öfter stetig differenzierbar ist als $Q(\cdot)$.

Lemma 6.14

Ist $h_{p,\delta}(\cdot)$ eine Glättungsfunktion der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ und $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^{p-1}$, so gilt:

$$Q_{p,\delta}(t) \in \mathfrak{G}^{p-1} \quad \text{und} \quad Q_{p,\delta}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, p-1.$$

Beweis.

Die stückweise definierten Funktionen

$$Q_{p,\delta}^{(l)}(t) = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} h_{p,\delta}^{(j)}(t) Q^{(l-j)}(t), \quad l = 0, \dots, p$$

unterscheiden sich nur auf dem endlichen Intervall $[0, \delta)$ von $Q^{(l)}(\cdot)$. Da die Funktionen $h_{p,\delta}^{(l)}(\cdot)$ auf $[0, \delta]$ beschränkt und stetig sind, sind die Produkte $h_{p,\delta}^{(j)}(t) Q^{(l-j)}(t)$ aus $L_1 \cap L_2$. Die anderen Forderungen leiten sich direkt aus der Definition von \mathfrak{G}^N und der Glättungsfunktion ab. \square

Mit diesem Lemma sind die Voraussetzungen für die Entwicklung der Korrelationsfunktion der Ableitungen eines geglätteten Integralfunktionalis

$$f^{(k)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q_{p,\delta}^{(k)}(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds, \quad k = 0, \dots, p \quad (6.19)$$

entsprechend der Entwicklungssätze in Kapitel 4 geschaffen. Die Variante von Satz 4.4 mit den abgeschwächten Voraussetzungen nach Satz 5.10 ermöglicht eine Entwicklung der Korrelationsfunktion von $R_{f^{(k)} f^{(k)}}(\cdot)$ bis zur Ordnung $N = p - k$.

Die Kernfunktion der Lösung des Systems (2.1) mit indirekter Erregung durch geglättete Integralfunktionale (6.19) ist dann

$$\hat{G}(t) = \sum_{k=0}^p \int_0^t G(t-u) P_k Q_{p,\delta}^{(k)}(u) du. \quad (6.20)$$

Die für diesen Fall interessante Variante von Lemma 6.8 lautet wie folgt.

Korollar 6.15

Sei die geglättete Kernfunktion der Erregung $Q_{p,\delta}(t) = h_{p,\delta}(t)Q(t) \in \mathfrak{G}^{p-1+N}$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\hat{G}(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$ und $\hat{G}(0) = 0$.

Satz 6.16

Es wird ein System (2.1) mit Erregung (2.4) durch geglättete Integralfunktionale (6.19) mit Kernfunktion $Q_{p,\delta}(t) = h_{p,\delta}(t)Q(t)$ betrachtet.

Ist $Q_{p,\delta}(t) \in \mathfrak{G}^{p+N}$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$, so gelten die in Satz 6.10 angegebenen Entwicklungen der Korrelationsfunktionen mit der Funktion $\hat{G}(\cdot)$ nach (6.20).

Ist $p = 1$ und $Q_{1,\delta}(t) \in \mathfrak{G}^0$, so gelten die angegebenen Entwicklungen für $N = 0$ in der Fassung mit abgeschwächten Voraussetzungen entsprechend Satz 5.10.

Einfluß des Glättungsgrades

Eine Erhöhung des Glättungsgrades p der Glättungsfunktion würde Entwicklungen höherer Ordnung ermöglichen, erhöht aber auch die Glattheit des Integralfunktionals. Die Schreibweise $f_p(t, \omega)$ für das geglättete Integralfunktional soll in diesem Abschnitt die Abhängigkeit vom Glättungsgrad p der Glättungsfunktion verdeutlichen.

Im Fall der Korrelationsfunktion $R_{f_p f_p}(\cdot)$ hat der Glättungsgrad für kleine δ wenig Einfluß, wie Satz 6.18 zeigen wird. Im folgenden Beispiel offenbart sich jedoch, daß der Glättungsgrad entscheidenden Einfluß auf die Ableitungen des Integralfunktionals haben kann.

Beispiel 6.17 Sei $Q(t) = e^{-\gamma t}$ die unglättete Kernfunktion, $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ die erzeugende Korrelationsfunktion von ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ und als Glättungsfunktionen sollen die polynomialen Glättungsfunktionen der Ordnungen $p = 1, \dots, 6$ entsprechend Beispiel 6.13 Verwendung finden.

Für $p = 1$ haben $f_p(t, \omega)$ und $\dot{f}_p(t, \omega)$ eine Integralfunktionaldarstellung, für $p \geq 2$ auch $\ddot{f}_p(t, \omega)$. Die Korrelationsfunktionen der k -ten Ableitung von $f_p(t, \omega)$, $k = 0, 1, 2$, lassen sich bis zur Ordnung $N = p - k$ entwickeln, wenn $p \geq \max\{1, k\}$ ist. Die Abbildung 6.5 zeigt zum einen diese Approximationen höchster Ordnung und zum anderen die Approximationen für $N = 0$ für die Parameter $\varepsilon = 0.3$, $\delta = 1$ und $\gamma = 1$.

Man erkennt, daß bereits die Korrelationsfunktion von $\dot{f}_p(t, \omega)$ entscheidend vom Glättungsgrad beeinflusst wird und die Korrelationsfunktion von $\ddot{f}_p(t, \omega)$ sogar vom Bereich $[0, \delta]$ dominiert wird. Der Vergleich zeigt außerdem, daß dieser Effekt unabhängig von der Ordnung der Approximation auftritt.

Das Fazit dieser Überlegungen ist, daß Entwicklungen für glatte Kernfunktionen nach Kapitel 4 nur bedingt geeignet sind. Bevor nun Entwicklungen für stückweise glatte Kernfunktionen nach Kapitel 5 betrachtet werden, soll ein weiterer Aspekt im Zusammenhang mit geglätteten Integralfunctionalen beleuchtet werden.

Einfluß des Parameters δ

Um die Abhängigkeit der geglätteten Integralfunktionale vom Parameter δ der Glättungsfunktion zu verdeutlichen, wird das geglättete Integralfunktional mit $f_\delta(t, \omega)$ be-

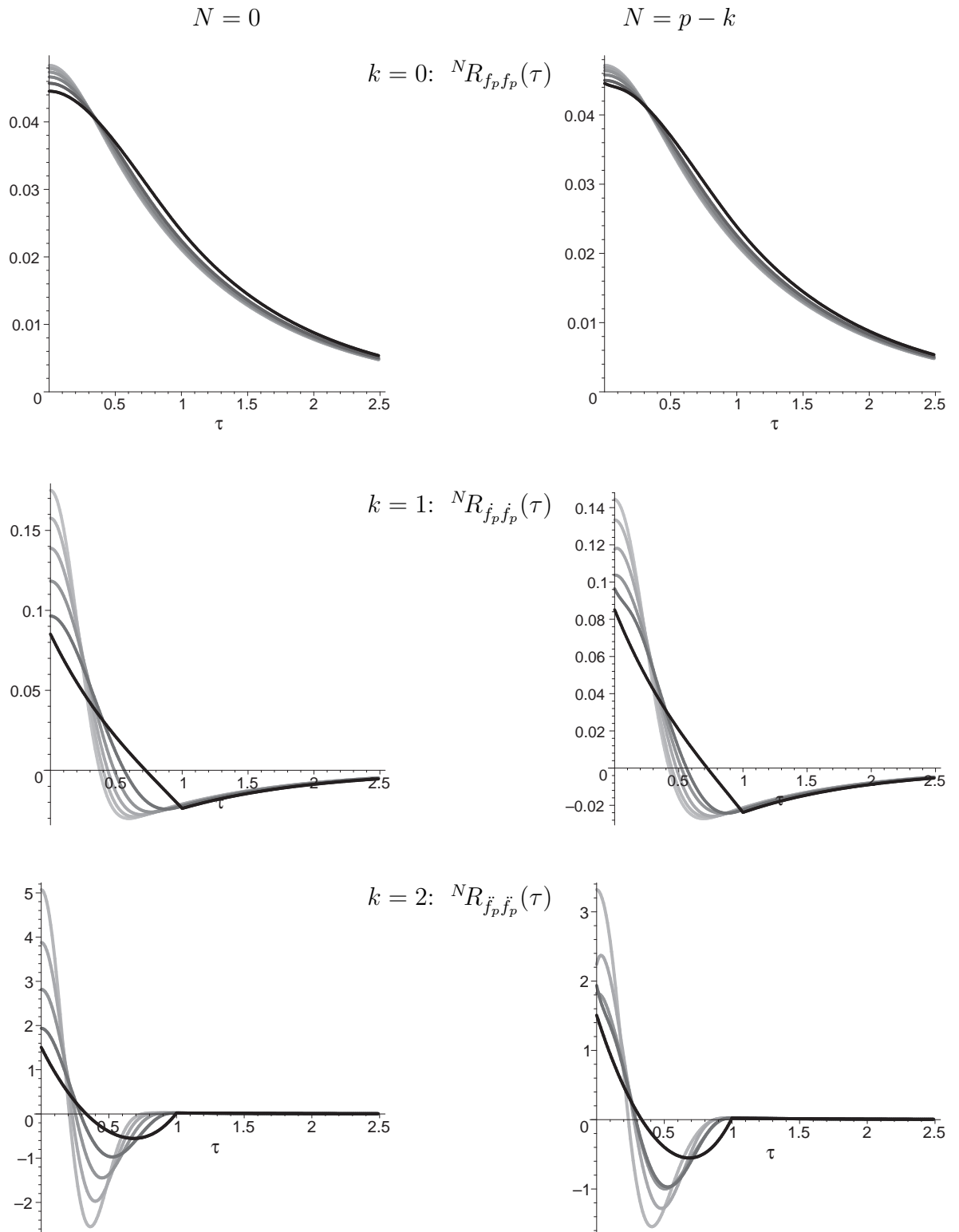


Abbildung 6.5: Einfluß des Glättungsgrades p : Approximationen der Korrelationsfunktionen von $f_p^{(k)}(t, \omega)$, $k = 0, 1, 2$, bei Glättungsgraden $p = \max\{1, k\}, \dots, 6$ (Linien von dunkel nach hell)

zeichnet. Die ursprüngliche Idee der Glättung liegt in der Aussage des folgenden Satzes begründet (siehe [26]). Ein Beweis ist in [46] zu finden.

Satz 6.18

Seien $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^0$ reellwertig, $(h_{p,\delta}(\cdot))_{\delta>0}$ eine Familie von Glättungsfunktionen beliebiger Ordnung sowie ${}^0R_{ff}(\cdot)$ und ${}^0R_{f_\delta f_\delta}(\cdot)$ die Approximationen der Korrelationsfunktion des Integralfunktionals und der Glättungen nach Satz 4.4. Dann gilt für jedes feste $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} {}^0R_{f_\delta f_\delta}(\tau) = {}^0R_{ff}(\tau), \tau \in \mathbb{R}.$$

Die Aussage gilt ebenso für den vektorwertigen Fall. Wie folgendes Beispiel zeigt, läßt sie sich jedoch nicht sinnvoll auf Approximationen höherer Ordnung verallgemeinern.

Beispiel 6.19 Sei $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^2$ reellwertig mit $Q(0) \neq 0$. Die reellwertige erzeugende Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ von ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ habe ein Korrelationsmoment $\kappa_2 \neq 0$. Dann gilt für das mit einer polynomialen Glättungsfunktion der Ordnung $p \geq 2$ geglättete Integralfunktional $f_\delta(t, \omega)$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} {}^2R_{f_\delta f_\delta}(0) = -\infty.$$

Die Approximation hat für $\varepsilon = 1$ die Gestalt

$${}^2R_{f_\delta f_\delta}(0) = 2q_0(0)\kappa_0 + 2q_1(0)\kappa_1 + q_2(0)\kappa_2$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$q_j(0) = \int_0^\infty Q_{p,\delta}(u) Q_{p,\delta}^{(j)}(u) du.$$

Der Term $2q_0(0)\kappa_0 = {}^0R_{f_\delta f_\delta}(0)$ ist wegen Satz 6.18 für $\delta \rightarrow 0$ beschränkt. Da für $p \geq 2$

$$q_1(0) = \int_0^\infty Q_{p,\delta}(u) Q'_{p,\delta}(u) du = \frac{1}{2} (Q_{p,\delta}(u))^2 \Big|_{u=0}^\infty = 0$$

ist, bestimmt $q_2(0)$ das Verhalten von ${}^2R_{f_\delta f_\delta}(0)$ für $\delta \rightarrow 0$. Eine Aufteilung des Integrationsgebietes führt zu

$$\begin{aligned} q_2(0) &= \int_0^\infty Q_{p,\delta}(u) Q''_{p,\delta}(u) du = Q_{p,\delta}(u) Q'_{p,\delta}(u) \Big|_{u=0}^\infty - \int_0^\infty (Q'_{p,\delta}(u))^2 du \\ &= - \int_0^\delta (Q'_{p,\delta}(u))^2 du - \int_\delta^\infty (Q'(u))^2 du. \end{aligned}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} (Q'(u))^2 du = \int_0^{\infty} (Q'(u))^2 du$$

endlich. Der verbleibende Term

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta} (Q'_{p,\delta}(u))^2 du \\ &= \int_0^{\delta} (h'_{p,\delta}(u)Q(u))^2 + 2h'_{p,\delta}(u)Q(u)h_{p,\delta}(u)Q'(u) + (h_{p,\delta}(u)Q'(u))^2 du \\ &= \delta \int_0^1 \left(\frac{1}{\delta} \tilde{h}'_p(u)Q(\delta u) \right)^2 + \frac{2}{\delta} \tilde{h}'_p(u)Q(\delta u)\tilde{h}_p(u)Q'(\delta u) + \left(\tilde{h}_p(u)Q'(\delta u) \right)^2 du \end{aligned}$$

läßt sich in drei Summanden aufteilen, für die gilt

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^1 \left(\tilde{h}'_p(u)Q(\delta u) \right)^2 du = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^1 \left(\tilde{h}'_p(u) \right)^2 du (Q(0))^2 = \infty,$$

$$\left| \lim_{\delta \downarrow 0} \int_0^1 2\tilde{h}'_p(u)Q(\delta u)\tilde{h}_p(u)Q'(\delta u) du \right| = \left| \int_0^1 2\tilde{h}'_p(u)\tilde{h}_p(u) du Q(0)Q'(0) \right| < \infty$$

und

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \delta \int_0^1 \left(\tilde{h}_p(u)Q'(\delta u) \right)^2 du = \lim_{\delta \downarrow 0} \delta \int_0^1 \left(\tilde{h}_p(u) \right)^2 du (Q'(0))^2 = 0.$$

Ist $\kappa_0 \neq 0$, gilt außerdem

$$\lim_{\delta \downarrow 0} {}^0R_{f_{\delta}f_{\delta}}(0) = \infty,$$

da die Approximation nach

$${}^0R_{f_{\delta}f_{\delta}}(0) = -2q_2(0)\kappa_0$$

berechnet wird.

Bemerkung 6.20 In [36] ist eine analytische Darstellung der Kernfunktion $\hat{G}(\cdot)$ eines Systems mit polynomial geglätteter Erregungsfunktion entsprechend Beispiel 6.17 angegeben, wenn die Systemmatrix diagonalisierbar ist. Für die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten empfiehlt sich numerische Integration.

6.2.4 Entwicklungen für stückweise glatte Kernfunktionen

Die Kernfunktionen geglätteter Integralfunktionale sind aufgrund ihrer Konstruktion stückweise definierte Funktionen, deren Glattheit auf \mathbb{R}_+ vom Glättungsgrad der Glättungsfunktion abhängt. Auch für Kernfunktionen, die bis auf die Stelle δ überall auf \mathbb{R}_+ beliebig oft differenzierbar sind, ist die Ordnung der Entwicklung der Korrelationsfunktion mit Methoden aus Kapitel 4 begrenzt. Insbesondere lassen sich keine Konvergenzaussagen für die Folgen der Approximationen treffen. Abhilfe für dieses Problem schaffen die Entwicklungssätze aus Kapitel 5. Zunächst werden die Voraussetzungen an die Kernfunktionen überprüft.

Lemma 6.21

Erfüllen die Glättungsfunktion $h_{p,\delta}(\cdot)$ und die Funktion $Q(\cdot)$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ die Bedingungen $h_{p,\delta}(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^{N+1}$ und $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^N$, so gilt:

1. $Q_{p,\delta}(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^N$ und $Q_{p,\delta}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, p-1$,
2. $\hat{G}(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^{N+1}$ und $\hat{G}(0) = 0$.

Beweis.

Die Aussagen sind die Verallgemeinerungen von Lemma 6.14 und Lemma 6.8 auf den Fall von stückweise definierten Funktionen, deren Ableitungen an der Stelle δ nicht stetig sein müssen. Die Beweise lassen sich auf diese Situation übertragen. \square

Lemma 6.22

Erfüllen die Glättungsfunktion $h_{p,\delta}(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^\infty$ und die Kernfunktion $Q(\cdot) \in \mathfrak{G}^\infty$ die Bedingung für gleichmäßige Konvergenz (4.18), dann auch die geglättete Kernfunktion $Q_{p,\delta}(\cdot)$ und die Kernfunktion der stationären Lösung $\hat{G}(\cdot)$.

Beweis.

Aus Lemma 6.21 folgt zunächst $Q_{p,\delta}(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^\infty$ und $\hat{G}(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{G}}^\infty$.

Analog zu (6.16) existieren für $h_{p,\delta}(\cdot)$ und $Q(\cdot)$ gemeinsame Konstanten C_1, C_2 und C_3 mit

$$\max \left\{ |Q^{(N)}(t)|, |h_{p,\delta}^{(N)}(t)| \right\} \leq C_3(N+1)^{C_1} C_2^N \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad N = 0, 1, \dots$$

Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |Q_{p,\delta}(t)| &= \left| \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} h_{p,\delta}^{(m)}(t) Q^{(N-m)}(t) \right| \\ &\leq C_3^2 \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} (m+1)^{C_1} C_2^m (N-m+1)^{C_1} C_2^{N-m} \\ &\leq C_3^2 (N+1)^{2C_1} C_2^N \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} = C_3^2 (N+1)^{2C_1} (2C_2)^N \end{aligned}$$

folgt die Behauptung für die geglättete Kernfunktion der Erregung.

Die Behauptung für $\hat{G}(\cdot)$ ergibt sich als Erweiterung von Lemma 6.9, da der Beweis auch für stückweise glatte Funktionen gilt. \square

Die polynomialen Glättungsfunktionen (Beispiel 6.13) erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 6.22, d. h. die Bedingungen an die Kernfunktionen $Q_{p,\delta}(\cdot)$ und $\hat{G}(\cdot)$ der geglätteten Erregung und der Lösung des Systems für die Anwendbarkeit von Satz 5.8 wurden auf Bedingungen an die ungeglättete Kernfunktion $Q(\cdot)$ zurückgeführt.

Damit läßt sich genau feststellen, bis zu welcher Ordnung Entwicklungen für die Korrelationsfunktionen der Erregung und des Systemausgangs sowie deren Ableitungen existieren, wenn bestimmte Voraussetzungen an die Glättungsfunktion $h_{p,\delta}(\cdot)$ und die Funktion $Q(\cdot)$ erfüllt sind. Hier soll sich auf den Fall $N = \infty$ beschränkt werden.

Satz 6.23

Es wird ein System (2.1) mit Erregung (2.4) durch geglättete Integralfunktionale (6.19) mit Kernfunktion $Q_{p,\delta}(t) = h_{p,\delta}(t)Q(t)$ betrachtet.

Erfüllen die Glättungsfunktion $h_{p,\delta}(\cdot)$ und die Funktion $Q(\cdot)$ die Voraussetzungen von Lemma 6.22, dann existieren die Entwicklungen der unten angegebenen Korrelationsfunktionen für beliebige Ordnungen $N \in \mathbb{N}_0$ und die Folgen der Approximationen konvergieren für alle festen $\varepsilon > 0$ gleichmäßig gegen die exakten Funktionen.

Im Fall $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta}{2}$ erhält man gemäß Satz 5.8

1. die Entwicklungen von $R_{f^{(k)}f^{(l)}}(\cdot)$ für $k, l = 0, \dots, p$, wenn

$$q_{kl}^j(\tau) = \int_0^\infty Q_{p,\delta}^{(k)}(u)Q_{p,\delta}^{(l+j)}(u + \tau) du$$

und

$$\psi_{kl}^j(s) = \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m Q_{p,\delta}^{(m+k)}(\delta - s) \left[Q^{(j-1-m+l)}(\delta) - Q_{p,\delta}^{(j-1-m+l)}(\delta) \right], \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

gesetzt werden, wobei für $Q_{p,\delta}^{(j)}(\delta) = Q_{p,\delta}^{(j)}(\delta - 0)$ die linksseitigen Grenzwerte zu berücksichtigen sind,

2. die Entwicklungen von $R_{z^{(k)}z^{(l)}}(\cdot)$ für $k, l = 0, 1$, wenn

$$q_{kl}^j(\tau) = \int_0^\infty \hat{G}^{(k)}(u)\hat{G}^{(l+j)}(u + \tau) du$$

und

$$\psi_{kl}^j(s) = \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m \hat{G}_1^{(m+k)}(\delta - s) \left[\hat{G}_2^{(j-1-m+l)}(\delta) - \hat{G}_1^{(j-1-m+l)}(\delta) \right], \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

gesetzt werden. Die Funktionen $\hat{G}_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ sind hier durch die stückweise Darstellung der Funktion

$$\hat{G}(t) = \begin{cases} \hat{G}_1(t) & t \in [0, \delta) \\ \hat{G}_2(t) & t \in [\delta, \infty) \end{cases}$$

in (6.20) definiert, für $\hat{G}_1^{(j)}(\delta) = \hat{G}_1^{(j)}(\delta-0)$ sind erneut die linksseitigen Grenzwerte einzusetzen.

Beweis.

Die Lemmata 5.2 und 5.3 sichern die Existenz der Entwicklungen, das Korollar 5.9 die Konvergenz der Folge der Approximationen. \square

Fortsetzung des Beispiels 6.17 Es wird das geglättete Integralfunktional $f(t, \omega)$ mit $Q(t) = e^{-\gamma t}$ und $R(\tau) = (1 - |\tau|)_+$ mit polynomialer Glättungsfunktion der Ordnung $p = 2$ betrachtet. Die Approximationen der Korrelationsfunktion entsprechend Satz 5.4 und 5.6 seien mit ${}^N\hat{R}_{f^{(k)}f^{(k)}}$ (punktweise) und ${}^NR_{f^{(k)}f^{(k)}}$ (gleichmäßig) bezeichnet.

Für die Parameter $\varepsilon = 0.3$, $\delta = 1$ und $\gamma = 1$ sind die Approximationen für $N = 0, \dots, 6$ in Abbildung 6.6 dargestellt.

Die gleichmäßigen Approximationen konvergieren gegen die exakten Korrelationsfunktionen. Es kann davon ausgegangen werden, daß die Approximation für $N = 6$ in der Abbildung optisch der exakten Korrelationsfunktion entspricht, da sich die Linien ab $N \geq 4$ überdecken.

An diesem Beispiel lassen sich die Eigenschaften der Entwicklung für stückweise glatte Kernfunktionen diskutieren. Die punktweisen Approximationen ${}^N\hat{R}_{f^{(k)}f^{(k)}}$ sind aufgrund der Eigenschaften von geglätteten Kernfunktionen für $N+k \leq p = 2$ stetig, für $N > p-k$ in den Punkten $\tau = 0$ und $\tau = \delta$ unstetig. An der Stelle $\tau = \delta$ müssen weder die rechts- und linksseitigen Grenzwerte übereinstimmen noch mit dem Wert für $\tau = \delta$ harmonieren. Die Werte an den Unstetigkeitsstellen sind durch kurze waagerechte Striche der entsprechenden Linie markiert. Es gilt jedoch ${}^N\hat{R}_{f^{(k)}f^{(k)}}(\tau) = {}^NR_{f^{(k)}f^{(k)}}(\tau)$ für $\tau \in \{-\delta, 0, \delta\}$. Dieses Verhalten wird in Abbildung 6.7 verdeutlicht, wo die Umgebung um $\tau = \delta$ von ${}^N\hat{R}_{\ddot{f}\ddot{f}}(\tau)$ und ${}^NR_{\ddot{f}\ddot{f}}(\tau)$ vergrößert dargestellt ist.

6.2.5 Beispiel Einmassenschwinger

Analog zu Abschnitt 6.1.5 wird die Gleichung der Relativbewegung

$$\ddot{x} + 2\rho\theta_0\dot{x} + \theta_0^2x = -\ddot{f} \quad (6.11)$$

betrachtet. Als Erregung soll das geglättete Integralfunktional $f(t, \omega)$ aus Beispiel 6.17 mit Kernfunktion $h_{p,\delta}(t)e^{-\gamma t}$ mit $\gamma = 1$, dem Glättungsgrad $p = 2$, dem Glättungsparameter $\delta = 1$ und Korrelationslänge $\varepsilon = 0.3$ dienen. In Abbildung 6.8 sind die Approximationen der Korrelationsfunktionen $R_{xx}(\tau)$, $R_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)$ und $R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau)$ entsprechend der

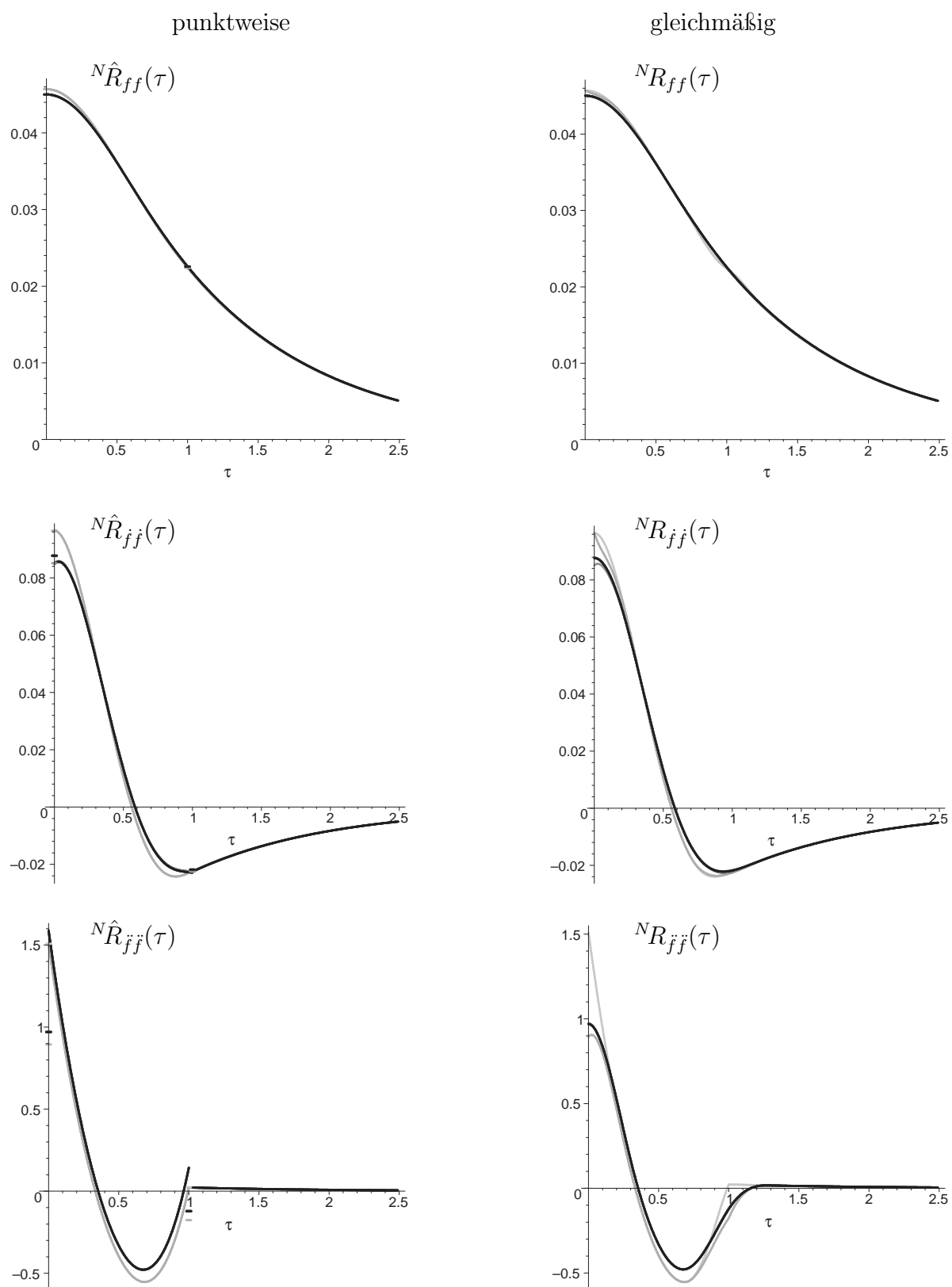


Abbildung 6.6: Approximationen der Korrelationsfunktionen von $f^{(k)}(t, \omega)$, $k = 0, 1, 2$, der Ordnung $N = 0, \dots, 6$ (Linien von hell nach dunkel)

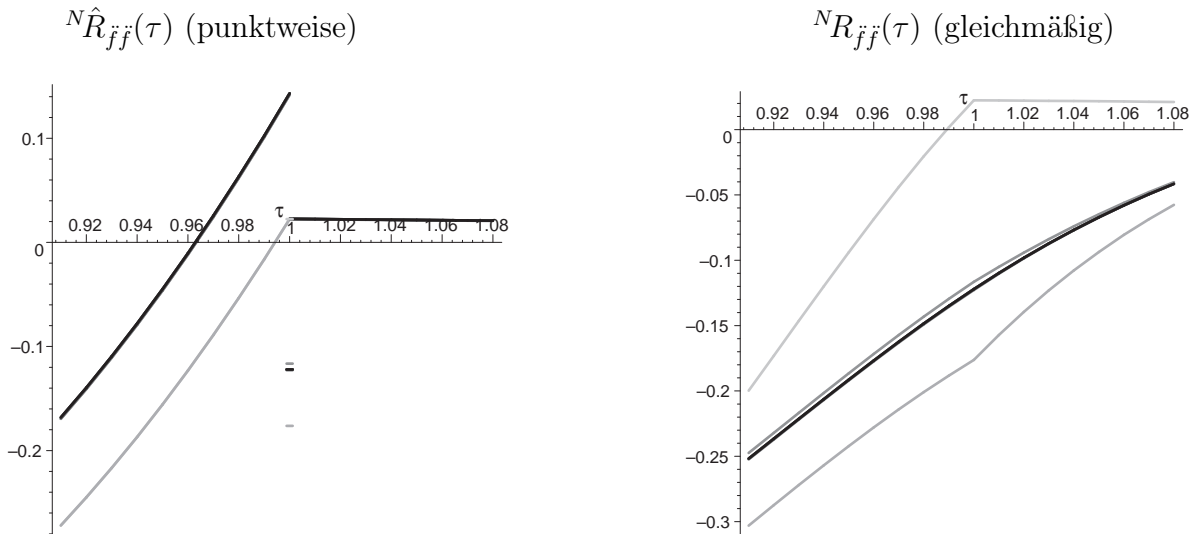


Abbildung 6.7: Approximationen der Korrelationsfunktionen von $\ddot{f}(t, \omega)$ der Ordnung $N = 0, \dots, 6$ (Linien von hell nach dunkel)

Entwicklung für stückweise glatte Kernfunktionen der Ordnungen $N = 0, \dots, 6$ dargestellt. Dabei werden die punktweisen und die gleichmäßigen Approximationen verglichen. Es ist davon auszugehen, daß bei der vorliegenden Parameterwahl die schwarzen Linien den Fall $N \rightarrow \infty$ widerspiegeln, d. h. die gleichmäßigen Approximationen für $N = 6$ bereits sehr gute Näherungen der exakten Korrelationsfunktionen sind.

Dieses Beispiel ermöglicht auch einen Vergleich zwischen den Entwicklungen für glatte und stückweise glatte Kernfunktionen. Die Kernfunktion von $\ddot{x}(t, \omega)$ ist die zweite Komponente von $\hat{G}'(\cdot)$, wenn $\hat{G}(\cdot)$ die Kernfunktion der Lösung $z(t, \omega)$ des äquivalenten Systems 1. Ordnung ist. Aus Korollar 6.15 folgt $\hat{G}(\cdot) \in \mathfrak{G}^0$. Entwicklungen von $R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau)$ entsprechend Satz 4.4 für $N = 0$ sind unter Berücksichtigung von Satz 5.10 möglich. Bei skalarer Erregungsfunktion ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ stimmt die gleichmäßige Approximation der Ordnung $N = 0$ mit der punktweisen Approximation überein, die wiederum aufgrund der Eindeutigkeit gleich der punktweisen Approximation ${}^0 R_{\ddot{x}\ddot{x}}(\tau)$ bei Entwicklung nach Satz 5.7 ist.

Zusammenfassend sei bemerkt, daß für alle betrachteten Ansätze der Erregungsfunktion Approximationen der Korrelationsfunktionen des Systemausgangs gefunden wurden. Diese sind zum einen im Sinne einer asymptotischen Entwicklung für $\varepsilon \rightarrow 0$ von beliebig großer Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$. Zum anderen konvergieren die Approximationen der Ordnungen N für jedes $\varepsilon > 0$ und $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die exakten Funktionen. Eine genaue Analyse des Approximationsfehlers ist durch Abschätzungen der Restglieder möglich.

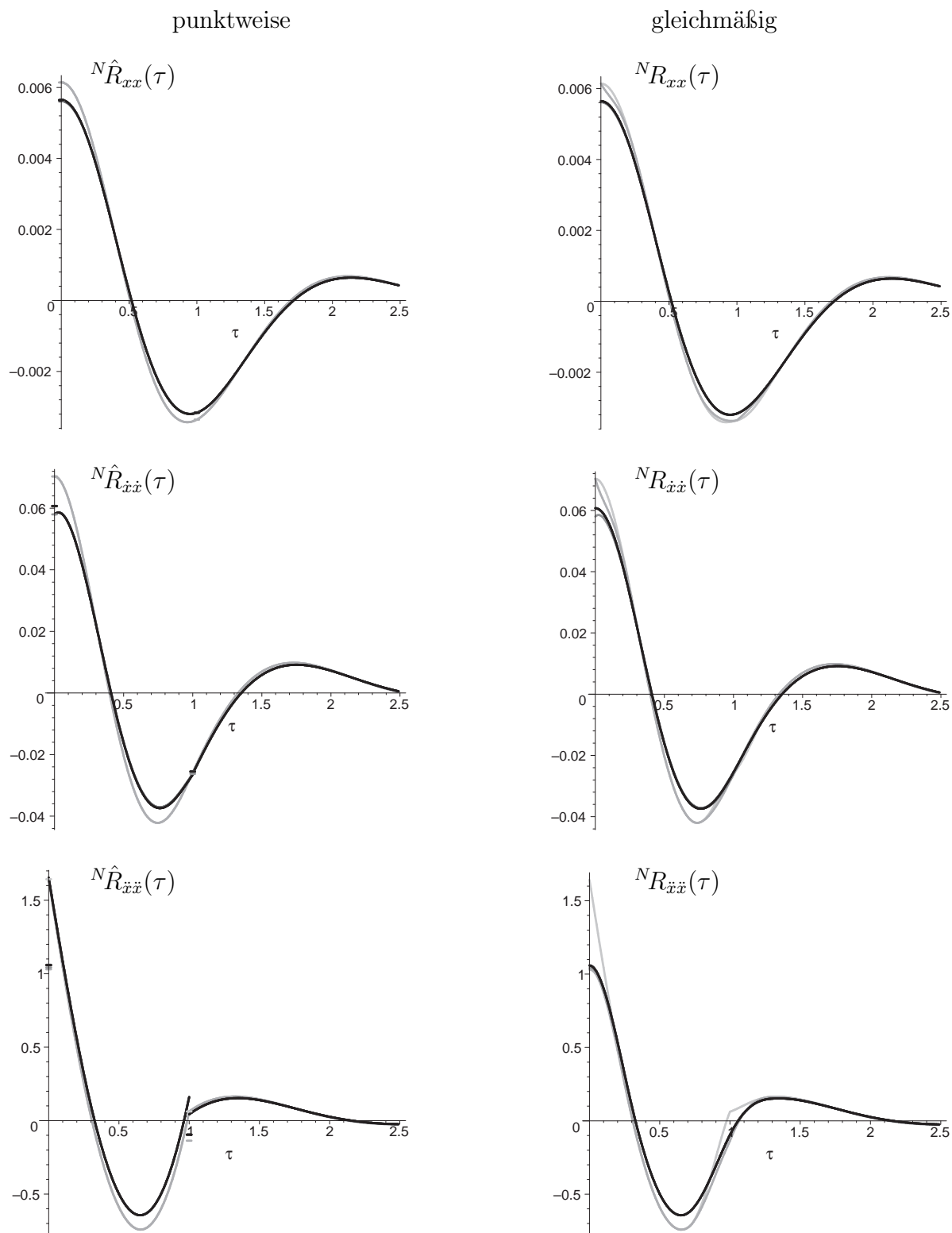


Abbildung 6.8: Approximationen der Korrelationsfunktionen der Absolutbewegung $x^{(k)}(t, \omega)$, $k = 0, 1, 2$, der Ordnung $N = 0, \dots, 6$ (Linien von hell nach dunkel)

Literaturverzeichnis

- [1] L. Arnold. *Stochastische Differentialgleichungen. Theorie und Anwendung*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1973.
- [2] V. I. Arnol'd. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1991.
- [3] A. V. Balakrishnan. *Introduction to random processes in engineering*. Wiley, New York, 1995.
- [4] L. Berg. *Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.
- [5] C. de Boor. *A practical guide to splines*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [6] C. de Boor. *Splinefunktionen*. Birkhäuser, Basel, 1990.
- [7] H. Bunke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern*. Akademie-Verlag, Berlin, 1972.
- [8] R. Estrada, R. P. Kanwal. *Asymptotic Analysis: a distributional approach*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [9] B. Fellenberg, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Approximation of stationary random functions with fractional rational spectral density. *Preprint 1999-1*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 1999.
- [10] G. M. Fichtenholz. *Differential- und Integralrechnung II*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.
- [11] U. Fischer, W. Stephan. *Mechanische Schwingungen*. Fachbuchverlag, Leipzig Köln, 1993.
- [12] B. W. Gnedenko. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
- [13] J. Gruner. Diskrete Schwingungssysteme mit stochastischer Fremderregung. *Dissertation*, TU Chemnitz, 1997.

-
- [14] J. Gruner. Großdimensionierte lineare und nichtlineare Schwingungsdifferentialgleichungen mit stochastischer Erregung. Numerische Realisierung und Beispiele. *Arbeitspapier*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 1997.
- [15] S. Hartman, J. Mikusiński. *The Theory of Lebesgue Measure and Integration*. Pergamon Press, Oxford, 1961.
- [16] N. Ikeda, S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [17] A. Kandler, J. vom Scheidt, R. Unger. Lösung parabolischer Differentialgleichungen mit zufälligen Randbedingungen mittels FEM. In J. vom Scheidt, Hrsg., *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 29.09.2003 – 01.10.2003*, S. 217-236, Chemnitz, 2004.
- [18] S. Mehlhose. Eigenwerte zufälliger Matrizen von Integralfunktionalen schwach korrelierter Prozesse. *Dissertation*, TU Chemnitz, 1998.
- [19] G. Micula, S. Micula. *Handbook of splines*. Kluwer, Dordrecht, 1999.
- [20] N. C. Nigam, S. Narayanan. *Applications of Random Vibrations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1994.
- [21] B. Øksendal. *Stochastic Differential equations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [22] A. Preumont. *Random vibration an spectral analysis*. Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [23] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Numerische Mathematik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [24] M. Richter. Wahrscheinlichkeitstheoretisches Verhalten der Lösungen stochastischer Randwertprobleme. *Dissertation*, TU Chemnitz, 1999.
- [25] L. L. Schumaker. *Spline functions: basic theorie*. Krieger publishing company, Malabar, 1993.
- [26] J. vom Scheidt. *Stochastic Equations of Mathematical Physics*. Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
- [27] J. vom Scheidt, W. Purkert. *Random Eigenvalue Problems*. Akademie-Verlag, Berlin, 1983.
- [28] J. vom Scheidt, B. Fellenberg, U. Wöhrle. *Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [29] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, H. Weiß, R. Wunderlich. Transverse vibrations of a beam with random ε -correlated excitation and model reduction. *Preprint 2001-3*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 2001.

- [30] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Asymptotic expansions for second-order moments of integral functionals of weakly correlated random functions. *Preprint 1997-17*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 1997.
- [31] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Asymptotic expansions of integral functionals of vector valued ε -correlated processes. *Preprint 1999-3*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 1999.
- [32] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Asymptotic Expansions of Integral Functionals of Weakly Correlated Random Processes. *Journal for Analysis and its Applications*, **19**, No. 1, 255-268, 2000.
- [33] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Low-dimensional approximations for random axial vibrations of beams. *Preprint 2001-3*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 2001.
- [34] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Low-dimensional approximations for large-scale systems of random ODEs. *Dynamic Systems and Applications*, **11**, 143-166, 2002.
- [35] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Remarks on Randomly Excited Oscillators. *ZAMM*, **82**, 847-859, 2002.
- [36] J. vom Scheidt, H. Weiß. Korrelationsanalyse bei Schwingungsmodellen. In J. vom Scheidt, Hrsg., *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 29.09.2003 – 01.10.2003*, S. 217-236, Chemnitz, 2004.
- [37] J. vom Scheidt, H. Weiß. Asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion der Ableitung von Integralfunktionalen schwach korrelierter Funktionen. In J. vom Scheidt, Hrsg., *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 27.09.2004 – 29.09.2004*, S. 297-324, Chemnitz, 2005.
- [38] A. N. Sirjaev. *Wahrscheinlichkeit*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988.
- [39] K. Sobczyk. *Stochastic differential equations. With applications to physics and engineering*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [40] T. T. Soong, M. Grigoriu. *Random vibration of mechanical and structural systems*. PTR Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1993.
- [41] H.-J. Starkloff. Higher order asymptotic expansions for weakly correlated random functions. *Habilitationschrift*, TU Chemnitz, 2004.
- [42] W. Walter. *Analysis 2*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [43] H. Weiß. Niedrigdimensionale Approximationen für lineare Systeme zufälliger Differentialgleichungen. *Diplomarbeit*, TU Chemnitz, 1999.

-
- [44] J. H. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [45] U. Wöhrl. Schwingungsdifferentialgleichungssysteme mit schwach korrelierten Fremderregungen. *Dissertation B*, Ingenieurhochschule Zwickau, 1988.
- [46] R. Wunderlich. Systems of random differential equations and model reduction. *Habilitationsschrift*, TU Chemnitz, 1999.
- [47] R. Zurmühl, S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984.

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

| | |
|----------------------------|---|
| \mathbb{N} | Menge der natürlichen Zahlen |
| \mathbb{N}_0 | $\mathbb{N} \cup \{0\}$ |
| \mathbb{R} | Menge der reellen Zahlen |
| \mathbb{R}_+ | Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ |
| \mathbb{C} | Menge der komplexen Zahlen |
| e | Eulersche Zahl, $e = \exp(1)$ |
| i | Imaginäre Einheit, $i^2 = -1$ |
| I | Einheitsmatrix |
| O | Nullvektor, Nullmatrix |
| M^* | adjungierte Matrix, $M^* = \overline{M^T}$ |
| $\mathbf{1}_\Omega(\cdot)$ | Indikatorfunktion |
| $(\cdot)_+$ | positiver Anteil einer reellen Zahl, $(t)_+ = \max\{0, t\}$ |
| $ \cdot $ | Betrag einer Zahl, Norm eines Vektors, Matrixnorm einer Matrix |
| $\mathbf{E}\{X\}$ | Erwartungswert der Zufallsgröße (des Zufallsvektors) X |
| $R_{xy}(\cdot, \cdot)$ | (Kreuz-)Korrelationsfunktion $R_{xy}(s, t) = \mathbf{E}\{[x(t) - \mathbf{E}\{x(t)\}][y(s) - \mathbf{E}\{y(s)\}]^*\}$ |
| $S_{xy}(\cdot)$ | (Kreuz-)Spektraldichte |
| i.q.M. | im quadratischen Mittel |
| f.s. | fast sicher, mit Wahrscheinlichkeit 1 |

Erklärung

Ich erkläre an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 27. Oktober 2005

Hendrik Weiß

Thesen

1. Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Untersuchung des stochastischen Verhaltens der Lösung von zufälligen Differentialgleichungen, die durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\sum_{l=0}^r A_l x^{(l)}(t, \omega) = \sum_{k=0}^p P_k f^{(k)}(t, \omega)$$

für einen vektoriellen Zufallsprozeß $x(t, \omega)$ mit zufälligem inhomogenem Term beschrieben werden. Die Matrizen A_0, \dots, A_r und P_0, \dots, P_p seien konstant und deterministisch, der vektorielle Zufallsprozeß $f(t, \omega)$ sei schwach stationär. Gleichungen von dieser Gestalt mit den Parametern $p = r = 2$ entstehen bei der mathematischen Modellierung von stochastisch fremderregten Schwingungsproblemen.

2. Die Methode zur Approximation von zweiten Momenten der stationären Lösung beruht auf der in [1] vorgestellten Theorie der Behandlung von Aufgaben der mathematischen Physik mit zufälligen Gleichungen, bei der Zufallseinflüsse durch schwach korrelierte Prozesse oder durch Integralfunktionale von solchen Prozessen modelliert werden. Während sich [2] und [4] auf den Fall konzentrieren, in dem eine Lösungsdarstellung durch Integralfunktionale schwach korrelierter Prozesse möglich ist, werden nun auch Integralfunktionale von Ableitungen schwach korrelierter Prozesse in die Betrachtungen einbezogen.
3. Zur Modellierung der Erregung werden ε -korrelierte Prozesse verwendet, eine spezielle Klasse von schwach korrelierten Prozessen. Aufbauend auf den Resultaten in [3] werden Konstruktionsmethoden für Korrelationsfunktionen von differenzierbaren ε -korrelierten Prozessen angegeben. Insbesondere mit den in dieser Arbeit vorgestellten B-Spline-Korrelationsfunktionen liegt nun eine Vielzahl von Korrelationsfunktionen differenzierbarer Prozesse vor, die eine einfache explizite Darstellung besitzen.
4. In [3] wurden asymptotische Entwicklungen für die Korrelationsfunktion vektorwertiger Integralfunktionale ε -korrelierter Prozesse angegeben. Für die Analyse von Schwingungsmodellen sind jedoch auch Ableitungen solcher Funktionale von Bedeutung. Diese Ableitungen haben im allgemeinen nicht wieder die Struktur eines Integralfunktional, so daß neue Aspekte berücksichtigt werden müssen. Es gelingt nun, asymptotische Entwicklungen für die Korrelationsfunktion der Ableitung sowie für die Kreuzkorrelationsfunktion von Integralfunktional und dessen Ableitung herzuleiten.
5. Von besonderer Bedeutung bei der Analyse von Fahrzeugschwingungen (vgl. [2]) sind Integralfunktionale mit stückweise glatter Kernfunktion. Die aus dem Fall glatter Kernfunktionen bekannte Herangehensweise ermöglicht hier im allgemeinen keine Entwicklungen höherer Ordnung. Durch eine abschnittsweise Betrachtung der Korrelationsfunktion gelingt es in dieser Arbeit, auch für den Fall stückweise glatter Kernfunktionen asymptotische Entwicklungen anzugeben.
6. Die in den Thesen 4 und 5 angesprochenen asymptotischen Entwicklungen einer Korrelationsfunktion $R(\tau)$ gelten für $\varepsilon \rightarrow 0$. Für feste Werte von ε ergeben sich auf

der Basis der Entwicklungen analytische Darstellungen beziehungsweise Approximationen der Korrelationsfunktion. Es werden jeweils eine punktweise bezüglich τ gültige und eine gleichmäßig auf dem gesamten Definitionsgebiet \mathbb{R} der Korrelationsfunktion gültige asymptotische Entwicklung angegeben. Während die punktweise Entwicklung eine Potenzreihe in ε darstellt, ist eine solche einfache Struktur für die gleichmäßige Entwicklung nicht zu erreichen.

7. Ein Vorteil der gleichmäßigen Entwicklung liegt darin, daß die dadurch definierten Approximationen stetige Funktionen sind. An einem Beispiel wird gezeigt, wie ungünstig eine punktweise Approximation ausfallen kann. Weiterhin werden für die gleichmäßigen Approximationen analytische Darstellungen und Abschätzungen der Restglieder angegeben sowie Bedingungen formuliert, unter denen die Folge der Approximationen gegen die exakte Korrelationsfunktion konvergiert. Die asymptotische Entwicklung definiert dann für feste ε eine gleichmäßig konvergente Reihendarstellung der Korrelationsfunktion. Vergleiche von verschiedenen Approximationen mit der exakten Funktion erfolgen an einem Beispiel.
8. Für Systeme mit einer Erregung durch einen differenzierbaren ε -korrelierten Prozeß wird gezeigt, daß die Entwicklungen beliebiger Ordnung der Korrelationsfunktionen der Ableitungen $x^{(l)}(t, \omega)$, $l = 0, \dots, r$, existieren und die Folgen der Approximationen konvergieren. Die Verwendung verschiedener Lösungsdarstellungen ermöglicht es zum einen, die Ordnungen der Korrelationsfunktionen für $\varepsilon \rightarrow 0$ zu bestimmen, und zum anderen eine einfache Berechnung der Entwicklungskoeffizienten anzugeben, die bei einer numerischen Realisierung eingesetzt werden kann. Am Beispiel des Einmassenschwingers, dem einfachsten Modell eines stochastisch erregten Oszillators, wird unter anderem der Einfluß der Differenzierbarkeitseigenschaften des Erregungsprozesses diskutiert.
9. Auch bei einer Erregung durch Integralfunktionale mit einer geeignet gewählten Kernfunktion zeigt sich, daß die asymptotischen Entwicklungen beliebiger Ordnung der Korrelationsfunktion der Lösung und deren Ableitungen existieren sowie die Folgen der Approximationen gleichmäßig konvergieren. Da eine Abschätzung der Restglieder der Approximationen möglich ist, können nicht nur Aussagen für das asymptotische Verhalten für $\varepsilon \rightarrow 0$ getroffen, sondern auch zur Größe der Approximationsfehler angegeben werden. Insbesondere wird der Fall diskutiert, bei dem eine Modellierung der Erregung durch geglättete Integralfunktionale erfolgt.

Literatur

- [1] J. vom Scheidt. *Stochastic Equations of Mathematical Physics*. Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
- [2] J. vom Scheidt, B. Fellenberg, U. Wöhrl. *Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [3] H.-J. Starkloff. Higher order asymptotic expansions for weakly correlated random functions. *Habilitationsschrift*, TU Chemnitz, 2004.
- [4] R. Wunderlich. Systems of random differential equations and model reduction. *Habilitationsschrift*, TU Chemnitz, 1999.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Hendrik Weiß
Geburtsdatum: 29. Mai 1973
Geburtsort: Karl-Marx-Stadt
Familienstand: ledig
Kind: Jasmin Véronique, geb. am 31. August 2003

Schulausbildung

Okt. 1979 – Sep. 1989 Wilhelm-Pieck-Oberschule in Auerbach
Okt. 1989 – Sep. 1991 Erweiterte Oberschule in Stollberg
Abschluß: Abitur (Durchschnitt: 1.3)

Grundwehrdienst

Okt. 1992 – Sep. 1993

Studium

Okt. 1991 – Sep. 1992 Studium der Mathematik an der TU-Chemnitz,
und Abschluß als Diplom-Mathematiker
Okt. 1993 – Dez. 1999 (Prädikat: „sehr gut“)

Wissenschaftlicher Werdegang

Jan. 2000 – April 2000 Graduiertenstudent für Mathematik
an der TU-Chemnitz
seit Mai 2000 wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fakultät
für Mathematik der TU Chemnitz