

Geodätische Fehlerrechnung mit der skalenkontaminierten Normalverteilung

Geodetic error calculus by the scale contaminated normal distribution

Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Lehmann
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Fakultät Geoinformation
PF 120701
01008 Dresden
Tel 0351 462 3146
Fax 0351 462 2191
mailto:r.lehmann@htw-dresden.de

Zusammenfassung

Geodätische Messabweichungen werden oft gut durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben, die steilgipfliger als die Gaußsche Normalverteilung sind. Das gilt besonders, wenn grobe Messabweichungen nicht völlig ausgeschlossen werden können. Neben einigen in der Geodäsie bisher verwendeten Verteilungen (verallgemeinerte Normalverteilung, Hubers Verteilung) diskutieren wir hier die skalenkontaminierte Normalverteilung, die für die praktische Rechnung einige Vorteile bietet.

Schlüsselwörter: Ausgleichsrechnung, Fehlerrechnung, robuste Schätzung

Abstract

Geodetic measurement errors are frequently well described by probability distributions, which are more peak-shaped than the Gaussian normal distribution. This is especially true when gross errors cannot be excluded. Besides some distributions used so far in geodesy (generalized normal distribution, Huber's distribution) we discuss the scale contaminated normal distribution, which offers some advantages in practical calculations.

Keywords: Geodetic adjustment, geodetic error calculus, robust estimation

1 Einleitung

Das Datenmaterial des Geodätischen Messprozesses ist manchmal mit groben Messabweichungen behaftet, das sind Messabweichungen von deutlich größerer Varianz, als im stochastischen Auswertemodell vorgesehen. Sie werden auch als Datenstörungen bezeichnet. Je umfangreicher das Datenmaterial ist, desto wahrscheinlicher befinden sich solche groben Messabweichungen darin. Diese haben normalerweise für diesen Messprozess untypische Ursachen. Häufig entstehen sie durch unsachgemäßes Arbeiten und gelten daher als prinzipiell vermeidbar.

Es gibt eine Reihe von Verfahren, grobe Messabweichungen zu erkennen. Am bekanntesten ist das Data Snooping nach Baarda (1968). Es basiert auf zwei Hypothesentests (Global- und Individualtest), die wie jeder statistische Test hin und wieder ein falsches Ergebnis liefern:

1. Messwerte werden manchmal als grob falsch klassifiziert und aus dem Datenmaterial eliminiert, obwohl sie wertvolle Beiträge zur Parameterschätzung geleistet hätten (Fehler 1. Art).
2. Grob falsche Messabweichungen werden manchmal nicht als solche erkannt und verbleiben im Datenmaterial, vor allem, wenn sie keine extremen Beträge annehmen (Fehler 2. Art).

Je nach der Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeiten bei den Hypothesentests tritt das eine oder das andere falsche Ergebnis häufiger auf (Lehmann und Scheffler 2006). Ein neuer Vorschlag zur optimalen Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeiten auf der Basis einer Monte-Carlo-Methode ist in (Lehmann 2010) zu finden.

Immer häufiger hat der Geodät mit sehr umfangreichem Datenmaterial mit einigen Tausend oder Millionen von Messwerten zu tun. In solchen großen Datensätzen sind mit Sicherheit grobe Messabweichungen verblieben. Das stochastische Auswertemodell solcher Datensätze sollte dieser Tatsache Rechnung tragen, um die Parameterschätzung möglichst wenig zu verfälschen. In den vergangenen Jahren wurden vielfältige robuster Auswertemethoden entwickelt, die dies mehr oder weniger leisten. Leider können wir hier nicht näher darauf eingehen, verweisen nur auf die bekannten geodätischen Lehrbücher (Jäger u.a. 2002, Koch 2004, Niemeier 2008) sowie ergänzend auf die klassische mathematische Literatur (z.B. Huber 1981, Rousseeuw und Leroy 1987).

In der aktuellen mathematischen Literatur zu robusten Auswertemodellen taucht eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung auf: die kontaminierte Normalverteilung (z.B. Wilcox 2005, Rinne 2008). Speziell die skalenkontaminierte Form erscheint uns zur Modellierung geodätischer Messabweichungen gut geeignet. Wir diskutieren im Weiteren Vor- und Nachteile im Vergleich zu bekannten Alternativen und entwickeln die diesbezügliche Geodätische Fehlerrechnung.

2 Die Gaußsche Normalverteilung

Die Normalverteilung geht im Wesentlichen auf C.F. Gauß zurück und ist die wichtigste stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geodätischen Fehlerrechnung. Die Dichtefunktion f einer normalverteilten skalaren Zufallsvariable lautet

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

wobei μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung ist. Die besondere Bedeutung der Normalverteilung beruht unter anderem auf dem zentralen Grenzwertsatz, der besagt, dass eine Summe von n unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlicher Varianz im Grenzwert normalverteilt ist. Man kann also Zufallsvariablen dann als normalverteilt ansehen, wenn sie durch Überlagerung einer großen Zahl von unabhängigen zufälligen Einflüssen entstehen, wobei jede einzelne Einflussgröße einen im Verhältnis zur Gesamtsumme unbedeutenden Beitrag liefert. Genau so stellt man sich das Zustandekommen von zufälligen geodätischen Messabweichungen praktisch vor.

Eng mit dem zentralen Grenzwertsatz in Zusammenhang steht die Tatsache, dass die Summe mehrerer normalverteilter Zufallsgrößen wieder normalverteilt ist. Darüber hinaus stellt man fest, dass die Familie der Normalverteilungen abgeschlossen bezüglich linearer Transformationen ist, in dem Sinne, dass aus $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ folgt:

$$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \sim N(a \cdot \mu_1 + b \cdot \mu_2, a^2 \cdot \sigma_1^2 + b^2 \cdot \sigma_2^2) \quad (2)$$

Weil geodätische Auswertemodelle entweder lineare oder linearisierte Modell sind, ergeben sich insbesondere auch die geschätzten Parameter als normalverteilte Zufallsvariablen, was praktische Vorteile hat, z.B. für Hypothesentests.

Die Normalverteilung ist analytisch recht einfach handhabbar. Z.B. führt die Maximum-Likelihood-Schätzung auf ein lineares Gleichungssystem, die bekannten Normalgleichungen der klassischen Ausgleichung nach kleinsten Quadraten.

Eine weitere Begründung für die Wahl der Normalverteilung kann aus der Informationstheorie abgeleitet werden. Hier wird die Informationsentropie als Maß für die Ungewissheit über den Ausgang des Zufallsexperiments eingeführt. Ist für zufällige geodätische Messabweichungen nur der Erwartungswert μ (i.d.R. Null) und die Standardabweichung σ bekannt, sollte man unter allen möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit diesen beiden Parametern jene wählen, die möglichst viel Unsicherheit über den Wert der Messgröße enthält (Maximum-Entropie-Verteilung). Man geht davon aus, so eine möglichst wenig willkürliche Wahl getroffen zu haben. Im genannten Fall hat die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ maximale Entropie (vgl. Lehmann 1994).

Die Normalverteilung ist ebenso häufig in anderen Anwendungsgebieten der Statistik verbreitet. Nicht wenige von uns trauern der Zeit nach, als der Graph ihrer Dichtefunktion, die ästhetisch geformte „Glockenkurve“, noch eine deutsche Banknote zierte.

3 Bekannte leptokurtische Fehlerverteilungen

Wir betrachten im Folgenden nur Verteilungen zufälliger geodätischer Messabweichungen mit dem Erwartungswert $E(\varepsilon)=0$.

3.1 Der Exzess

Die Frage, ob Messabweichungen ε tatsächlich normalverteilt sind oder nicht, ist insofern falsch gestellt, als es sich hierbei nur um ein Modell handelt, welches die Wirklichkeit allenfalls ausreichend gut beschreibt, aber nie mit ihr völlig überein stimmt.

In empirischen Untersuchungen hat sich allerdings hin und wieder gezeigt, dass praktisch noch häufiger als bei der Normalverteilung mit zufälligen extremen Messabweichungen zu rechnen ist. Solche Messabweichungen werden oft besser durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben, die steilgipfliger als die Normalverteilung sind. Diese Erkenntnis findet sich wahrscheinlich erstmalig bei Bessel (1818). Als Maß für die Steilgipfligkeit wird in der Statistik der Exzess (Wölbung, Kurtosis) γ_2 eingeführt:

$$\gamma_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 \quad (3)$$

Hierbei ist m_4 das vierte zentrale Moment der Verteilung und σ die zugehörige Standardabweichung. Für die Normalverteilung gilt $\gamma_2=0$. Verteilungen mit $\gamma_2>0$ heißen supergaußförmig oder leptokurtisch, mit $\gamma_2<0$ hingegen subgaußförmig oder platykurtisch. Verteilungen mit vielen extremen Merkmalswerten sind also leptokurtisch.

3.2 Verallgemeinerte Normalverteilung

Um den Exzess zu vergrößern, kann man die Normalverteilung auf Exponenten von $\varepsilon = x - \mu$ kleiner als 2 verallgemeinern. Die Dichtefunktion der verallgemeinerten Normalverteilung lautet (Nadarajah 2005)

$$f_{vN}(\varepsilon) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} \exp\left(-\frac{\varepsilon^\beta}{\alpha^\beta}\right) \quad (4)$$

$\beta > 0$ spielt die Rolle eines Formparameters für die Steilgipfligkeit. Für $\beta = 2$ ergibt sich die Normalverteilung, für $\beta = 1$ die Laplace-Verteilung als Spezialfall. Im Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$ wird eine Gleichverteilung erreicht. Γ bezeichnet die Gamma-Funktion. Varianz und Exzess betragen

$$\sigma^2 = \frac{\alpha^2\Gamma(3/\beta)}{\Gamma(1/\beta)} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(5/\beta)\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(3/\beta)^2} - 3 \quad (5)$$

So kann man leicht eine Verteilung mit gewünschtem Exzess konstruieren. Leptokurtische Verteilungen werden für $\beta < 2$ erhalten. $\gamma_2 = 1$ ergibt sich z.B. mit $\beta = 1,406$. Aus der gewünschten Varianz erhalte man α , z.B. aus $\sigma^2 = 1$ ergäbe sich $\alpha = 1,097$. Vgl. Abbildung 1.

In der M-Schätzung liegt diese Verteilung der Variante der L^p -Norm-Schätzung mit $p = \beta$ zugrunde. Die Schätzung ist allerdings wirklich robust in dem Sinne, dass die sogenannte Einflussfunktion $\psi(\varepsilon) = d(-\log(f(\varepsilon))) / d\varepsilon$ beschränkt ist, nur für $\beta = 1$ (L^1 -Norm), (Huber 1981, Jäger u.a. 2002).

3.3. Hubers zusammengesetzte Verteilung

Eine Alternative zur verallgemeinerten Normalverteilung ist die zusammengesetzte Verteilung nach Huber (1964, 1981). Ihre Dichtefunktion ist aus einem „Gaußschen Gipfel“ und zwei „Laplaceschen Schwänzen“ stetig zusammengesetzt:

$$f_H(\varepsilon) = C(k, d) \begin{cases} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2d^2}\right) & \text{für } |\varepsilon| < k \\ \exp\left(\frac{k^2 - 2k|\varepsilon|}{2d^2}\right) & \text{für } |\varepsilon| \geq k \end{cases} \quad (6)$$

$C(k, d)$ ist eine Normierungsfunktion und k spielt die Rolle eines Formparameters. Für $k \rightarrow \infty$ ergibt sich die Normalverteilung, für $k = 0$ die Laplace-Verteilung als Spezialfall. Varianz und Exzess müssen hier numerisch ermittelt werden. Wünscht man z.B. $\sigma^2 = 1$ und $\gamma_2 = 1$, so gelangt man nach einer aufwändigen numerischen Prozedur zu $k = 1,511$ und $d = 0,9113$. Vgl. Abbildung 1, in der die Normierungskonstante mit einer Newton-Integrationsformel ermittelt wurde.

In der M-Schätzung liegt diese Verteilung der Variante der Huber-k-Schätzung zugrunde. Die Schätzung ist generell robust (Huber 1964, 1981).

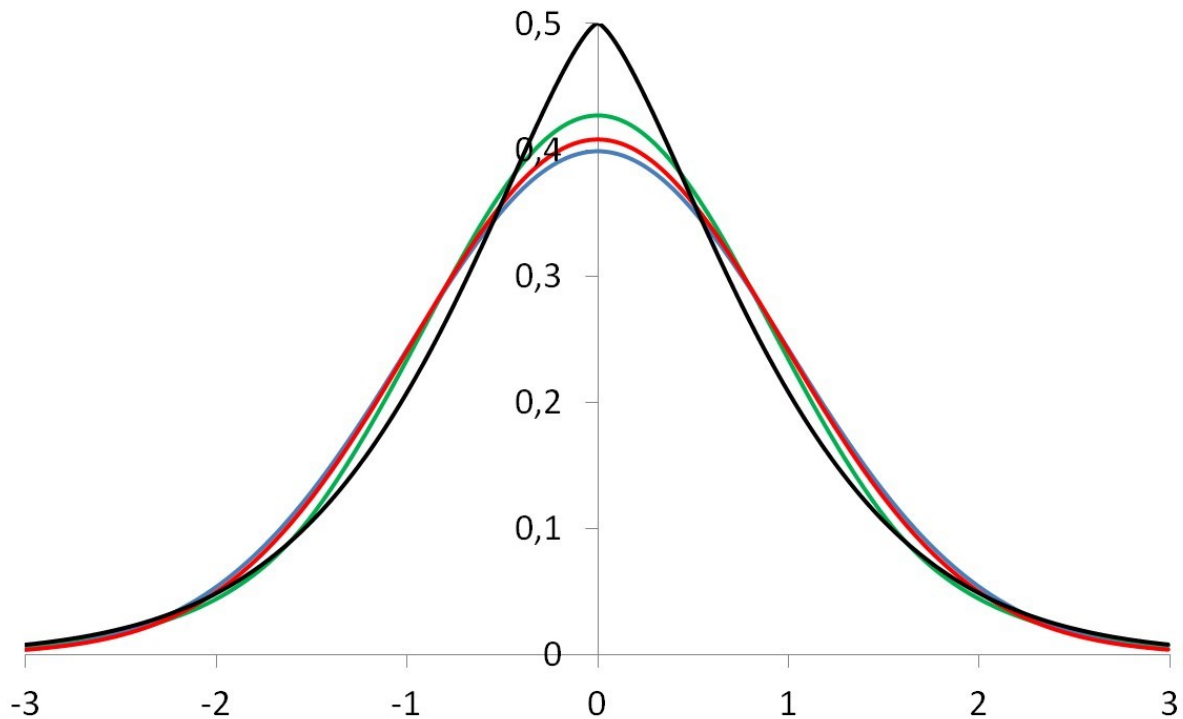


Abbildung 1: Dichtefunktionen dreier leptokurtischer Fehlerverteilungen mit Varianz $\sigma^2=1$ und Exzess $\gamma_2=1$ - Schwarz: Verallgemeinerte Normalverteilung (4). Grün: Hubers Verteilung (6). Rot: Skalenkontaminierte Normalverteilung (7) mit $p=0,01$. Zum Vergleich - Blau: standardisierte Normalverteilung ($\gamma_2=0$).

Skalenkontaminierte Normalverteilung

Auch hier handelt es sich um eine weitere Abwandlung der Normalverteilung. Die Dichtefunktion der kontaminierten Normalverteilung ist einfach eine Linearkombination zweier Normalverteilungsdichten. Da wir hier nur Fehlerverteilungen untersuchen, betrachten wir nur den Fall, dass beide Normalverteilungen den Erwartungswert Null haben. Dann nennt man die neue Verteilung auch p -skalenkontaminierte Normalverteilung:

$$f_{skN}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{p}{\sigma_1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{(1-p)}{\sigma_2} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_2^2}\right) \right) \quad (7)$$

Für $p=0$ und $p=1$ ergeben sich Normalverteilungen als Spezialfall. Die Laplace-Verteilung ist hier nicht als Spezialfall enthalten. Varianz und Exzess betragen

$$\sigma^2 = p\sigma_1^2 + (1-p)\sigma_2^2 \quad (8a)$$

und

$$\gamma_2 = 3p(1-p) \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} + p \right)^{-2} \quad (8b)$$

woraus $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ und $\gamma_2 \geq 0$ folgen. Näheres entnimmt man z.B. (Wilcox 2005). Leicht können Verteilungen mit gewünschten Varianzen und nichtnegativen Exzessen konstruiert werden.

Allerdings ist die Festlegung diesmal noch nicht eindeutig. Wünscht man z.B. $\sigma^2=1$ und $\gamma_2=1$, so findet man durch Auflösung der beiden Gleichungen z.B.

$$\begin{array}{llll} p=0,010 & \sigma_1= 0,971 & \sigma_2=2,410 & \text{oder} \\ p=0,001 & \sigma_1= 0,991 & \sigma_2=4,274. & \end{array}$$

Vgl. Abbildung 1. Geodätische Anwendungen dieser Verteilungen sind in (Lehmann 2010) und in (Lehmann und Scheffler 2011) zu finden.

Weitere leptokurtische Verteilungen werden in der Methode der M-Schätzung (vgl. z.B. Huber 1981, Jäger u.a. 2002) benutzt.

4 Ausgleichung mit der Skalenkontaminierten Normalverteilung

4.1 Festlegung der Parameter

Nimmt man an, dass ein Messwert mit Wahrscheinlichkeit p grob verfälscht ist und sich in diesem Fall die gesamte Messabweichung ε aus der (auch sonst vorhandenen und für diesen Messprozess typischen) Standardmessabweichung ε_s und einer groben Messabweichung ε_g additiv zusammensetzt, so gelangt man im Ergebnis für ε zu einer Mischverteilung. Man spricht auch von einer kontaminierten Verteilung, weil die grobe Messabweichung ε_g die Standardmessabweichung ε_s gewissermaßen kontaminiert. Nimmt man weiter an, dass beide Messabweichungen mit einer Normalverteilung beschrieben werden können, also $\varepsilon_s \sim N(0, \sigma_s^2)$ und $\varepsilon_g \sim N(0, \sigma_g^2)$, eine unter anderem durch das o.g. Maximum-Entropie-Prinzip gerechtfertigte Wahl, so gelangt man für die gesamte Messabweichung ε zu einer p -skalenkontaminierten Normalverteilung (7) mit

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_g^2} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \sigma_s \quad (9)$$

Zur Herleitung siehe (Lehmann 2010). Damit sind dem Geodäten Möglichkeiten eröffnet, die Verteilung unter praktischen Gesichtspunkten seines Messprozesses entsprechend festzulegen.

Beispiel 1: Bei einem Laserscanner verursacht das Messrauschen eine Messabweichung mit einer Standardabweichung von $\sigma_s=3$ mm. Weiter wird in 1% der Zielpunkte eine Fehlreflexion mit einer Standardabweichung von ca. $\sigma_g=10$ mm verursacht. So ist zweckmäßig die Verteilung der Messabweichungen durch eine skalenkontaminierte Normalverteilung mit $p=0,01$; $\sigma_1= 10,4$ mm; $\sigma_2=3$ mm beschrieben, siehe (9). Die Standardabweichung beträgt laut (8a)

$$\sigma = \sqrt{0,01 \cdot 109 \text{ mm}^2 + 0,99 \cdot 9 \text{ mm}^2} = 3,2 \text{ mm}$$

und der Exzess beträgt nach (8b)

$$\gamma_2 = 3 \cdot 0,01 \cdot 0,99 \cdot \left(\frac{9 \text{ mm}^2}{100 \text{ mm}^2} + 0,01 \right) = 0,003.$$

Weil in der Praxis grobe Messabweichungen selten sind, treten typischerweise nur Verteilungen mit sehr kleinem Parameter p auf.

4.2 Minimalvariante erwartungstreue lineare Schätzung

Natürlich hat die geodätische Standardmethode der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten auch dann die Eigenschaft, eine minimalvariante erwartungstreue lineare Schätzung der

Modellparameter zu liefern, wenn die Messabweichungen nicht normalverteilt sind, sondern einer anderen Verteilung mit dem Erwartungswert Null und der angenommenen Standardabweichung unterliegen, also insbesondere allen Verteilungen aus Abschnitt 3. Allerdings „erben“ die geschätzten Parameter dann auch in linearen (oder linearisierten) Modellen im Allgemeinen nicht mehr den Verteilungstyp der Messabweichungen.

Insbesondere sind bei kontaminiert normalverteilten Messabweichungen die geschätzten Parameter nicht ebenso kontaminiert normalverteilt. Immerhin kann man im Gegensatz zur verallgemeinerten Normalverteilung und zur Huberschen Verteilung die Verteilung der Parameter noch analytisch angeben, auch wenn die Ausdrücke schnell extrem komplex werden.

Nämlich besitzt die Linearkombination

$$\varepsilon = a \cdot \varepsilon_a + b \cdot \varepsilon_b$$

zweier unabhängiger skalenkontaminiert normalverteilter Messabweichungen ε_a und ε_b mit den Parametern $p_a, \sigma_{1a}, \sigma_{2a}$ und $p_b, \sigma_{1b}, \sigma_{2b}$ eine Verteilung der Dichtefunktion

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{p_a p_b}{\sigma_{11}} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma_{11}^2}\right) + \frac{p_a(1-p_b)}{\sigma_{12}} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma_{12}^2}\right) + \frac{(1-p_a)p_b}{\sigma_{21}} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma_{21}^2}\right) + \frac{(1-p_a)(1-p_b)}{\sigma_{22}} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sigma_{22}^2}\right) \right] \quad (9a)$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^2 &= a^2 \cdot \sigma_{1a}^2 + b^2 \cdot \sigma_{1b}^2, \quad \sigma_{12}^2 = a^2 \cdot \sigma_{1a}^2 + b^2 \cdot \sigma_{2b}^2, \\ \sigma_{21}^2 &= a^2 \cdot \sigma_{2a}^2 + b^2 \cdot \sigma_{1b}^2, \quad \sigma_{22}^2 = a^2 \cdot \sigma_{2a}^2 + b^2 \cdot \sigma_{2b}^2, \end{aligned} \quad (9b)$$

ist also nicht vom Typ (7). (Man gewinnt dieses Ergebnis leicht aus vier Linearkombinationen normalverteilter Zufallsvariablen unter Nutzung von (2).) Wenn man speziell Summen oder Differenzen, also $|a|=|b|=1$, von Messabweichungen identischer Verteilung, also $p_a=p_b=p$, $\sigma_{1a}=\sigma_{1b}=\sigma_1, \sigma_{2a}=\sigma_{2b}=\sigma_2$, betrachtet, so ergibt sich insbesondere

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{p^2}{\sqrt{2}\sigma_1} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{4\sigma_1^2}\right) + 2 \frac{p(1-p)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) + \frac{(1-p)^2}{\sqrt{2}\sigma_2} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{4\sigma_2^2}\right) \right] \quad (9c)$$

Nimmt man weiterhin $p \ll 1$ an, d.h. grobe Messabweichungen sind unwahrscheinlich, so wird der erste Summand in eckigen Klammern vernachlässigbar klein. Es ergibt sich näherungsweise eine Dichtefunktion vom Typ (7) mit den Parametern

$$2p, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \sqrt{2}\sigma_2 \quad (10a)$$

Entsprechendes gilt für Summen oder Differenzen von $n > 2$ solcher Größen. Es ergeben sich näherungsweise skalenkontaminierte Normalverteilungen mit den Parametern

$$np, \sqrt{\sigma_1^2 + (n-1)\sigma_2^2}, \sqrt{n}\sigma_2 \quad (10b)$$

Für ihren Mittelwert erhält man näherungsweise skalenkontaminierte Normalverteilungen mit den Parametern

$$np, \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + (n-1)\sigma_2^2}{n}}, \sigma_2 \quad (10c)$$

Die Standardabweichungen der ausgeglichenen Größen gewinnt man aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz, welches natürlich auch für nicht normalverteilte Messabweichungen gilt. Allerdings muss man die Gesamtvarianz zum Ansatz bringen, die sich bei der skalenkontaminierten Normalverteilung einfach aus (8a) berechnet.

Beispiel 2: Würde man in eine Ausgleichung Laserscannermesswerte aus Beispiel 1 mit dem Gewicht 1 einführen, so ergäbe sich die a priori Standardabweichung eines ausgeglichenen Parameters x zu

$$\sigma_x = 3,2\text{mm} \cdot \sqrt{q_{xx}}$$

mit Gewichtskoeffizienten q_{xx} (vgl. z.B. Niemeier 2008).

Obwohl grobe Messabweichungen im stochastischen Modell enthalten sind, ist die minimalvariante erwartungstreue lineare Schätzung zunächst nicht robust. Durch eine Variante des Data Snooping könnten aber im Nachhinein grobe Messabweichungen erkannt und eliminiert werden.

4.3 Maximum-Likelihood-Schätzung

Die Ausgleichung nach kleinsten Quadraten hat bei nicht normalverteilten Messabweichungen im Allgemeinen nicht mehr die Eigenschaft, eine Maximum-Likelihood-Schätzung zu sein. In (Lehmann 2008) wurde eine hinreichende Bedingung abgeleitet, dass das arithmetische Mittel \bar{x} zweier abhängiger Doppelmesswerte x_1 und x_2 mit identischer Verteilung der Messabweichungen eine Maximum-Likelihood-Schätzung ist: Die Log-Dichtefunktion $\log(f)$ der Messabweichungen muss eine symmetrische konkave Funktion sein. Alle drei in Abschnitt 3 genannten Dichtefunktionen sind offenbar symmetrisch zu $\varepsilon=0$, aber nur Hubers Verteilung (6) besitzt eine stets konkave Log-Dichte, weil diese aus zwei konkaven Log-Dichten stetig und konkav zusammengesetzt ist. Wie man sich ebenso leicht überzeugt, besitzt die verallgemeinerte Normalverteilung (4) eine solche immerhin für den praktisch relevanten Fall $\beta \geq 1$.

Ob die Log-Dichte der skalenkontaminierten Normalverteilung (7) konkav ist, kann man nur numerisch ermitteln. Es ist sehr leicht, Parameter p, σ_1, σ_2 zu finden, für die das **nicht** gilt, z.B. die Parameter aus Beispiel 1. Würden die Werte einer Doppelmessung x_1 und x_2 weit genug auseinander liegen, hätte die Likelihood-Funktion am Mittelwert \bar{x} gerade ein Minimum. Symmetrisch dazu finden sich zwei gleichwertige Maxima. Dieses Ergebnis ist wie folgt zu interpretieren: Sehr wahrscheinlich ist mindestens ein Messwert grob falsch. Welcher, das ist so nicht feststellbar. Jedenfalls ist der Mittelwert \bar{x} keine gute Schätzung für den unbekanntem Wert der Messgröße, obwohl er erwartungstreu und minimalvariant ist.

Generell würde die Berechnung der Maximum-Likelihood-Schätzung eine nichtlineare Optimierung erfordern. Bei Ausgleichungsproblemen mit einer hohen Anzahl von Messwerten

ist die Zielfunktion sehr kompliziert aufgebaut und hat oft ein Hauptmaximum und einige Nebenmaxima.

Die Methode der Maximum-Likelihood-Schätzung ist äquivalent zur Methode der M-Schätzung mit einer speziellen Einflussfunktion ψ (vgl. z.B. Huber 1981, Jäger u.a. 2002). Die zur skalenkontaminierten Normalverteilung gehörende Funktion ψ hat leider einen ungewöhnlich komplizierten analytischen Ausdruck, so dass sie praktisch schwer handhabbar und deshalb nicht gebräuchlich ist. Außerdem ist diese M-Schätzung nicht robust in dem Sinne, dass ψ beschränkt ist.

5 Konfidenzintervalle und Hypothesentests

5.1 Konfidenzintervalle

Ein Vorteil der skalenkontaminierten Normalverteilung gegenüber den beiden anderen in Abschnitt 3 genannten Verteilungen ist, dass die kumulative Verteilungsfunktion F_{skN} analytisch angegeben werden kann. Diese gewinnt man leicht aus der Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung (Gaußsches Fehlerintegral) Φ :

$$F_{skN}(\varepsilon) = p\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_1}\right) + (1-p)\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_2}\right) \quad (11)$$

Um Konfidenzintervalle (Vertrauensintervalle) berechnen zu können, benötigt man die inverse Verteilungsfunktion F_{skN}^{-1} . Immerhin steht Φ^{-1} in den meisten Programmierumgebungen zur Verfügung (selbst in Tabellenkalkulationsprogrammen wie Microsoft Excel als Funktion NORM.INV), obwohl kein geschlossener analytischer Ausdruck für Φ^{-1} angegeben werden kann. Mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α sind die Grenzen eines $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervalls

$$\varepsilon_u = F_{skN}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{und} \quad \varepsilon_o = F_{skN}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = -\varepsilon_u.$$

Diese lassen sich folglich als Lösung von

$$\alpha = 2p\Phi\left(\frac{\varepsilon_u}{\sigma_1}\right) + 2(1-p)\Phi\left(\frac{\varepsilon_u}{\sigma_2}\right)$$

und $\varepsilon_o = -\varepsilon_u$ berechnen. Auf diese Gleichung in der Fixpunktform

$$\varepsilon_u = \sigma_2\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha - 2p\Phi\left(\frac{\varepsilon_u}{\sigma_1}\right)}{2(1-p)}\right)$$

kann man in den praktisch relevanten Fällen $p \ll 1$ ein schnell konvergierendes Fixpunkt-Iterationsverfahren anwenden:

$$\varepsilon_u^{(0)} := \sigma_2\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (12a)$$

$$\varepsilon_u^{(i)} := \sigma_2 \Phi^{-1} \left(\frac{\alpha - 2p \Phi \left(\frac{\varepsilon_u^{(i-1)}}{\sigma_1} \right)}{2(1-p)} \right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (12b)$$

(Die Fixpunktiteration ist ein iteratives Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Lösung einer Fixpunktgleichung, also einer Gleichung der Form $x=g(x)$, (vgl. Bronstein und Semendjajew 2003, S. 1138). Die Konvergenz von Fixpunktiterationen wird mittels des Banachschen Fixpunktsatzes untersucht.)

Beispiel 3: Zu berechnen ist das 99%-Konfidenzintervall ($\alpha=0,1$) des Messwertes aus Beispiel 1. Aus $p=0,01$; $\sigma_1=10,4$ mm; $\sigma_2=3$ mm erhält man

$$\varepsilon_u^{(0)} = -7,73 \text{ mm}, \varepsilon_u^{(1)} = -8,33 \text{ mm}, \varepsilon_u^{(2)} = -8,27 \text{ mm}, \varepsilon_u^{(3)} = -8,28 \text{ mm}$$

und ab da ohne signifikante Änderung. Das Konfidenzintervall lautet folglich $[-8,28 \text{ mm} ; 8,28 \text{ mm}]$.

5.2 Hypothesentests

Die klassischen Verfahren zum Testen von Hypothesen in Geodätischen Auswertemodellen setzen normalverteilte Messabweichungen voraus (vgl. Jäger u.a. 2002, Koch 2004, Niemeier 2008). Andernfalls ist man oft auf numerische Verfahren angewiesen, insbesondere bei (4) und (6). Hat man es mit kontaminiert normalverteilten Zufallsvariablen zu tun, so gibt es dennoch analytische Berechnungsmöglichkeiten.

Beispiel 4: Eine Nivellementlinie wurde gemessen, der Höhenunterschied Δh_{IST} wurde erhalten. Der Sollhöhenunterschied Δh_{SOLL} ist fehlerfrei bekannt (z.B. $\Delta h_{SOLL}=0$ bei einer kleinen Schleife). Den einzelnen Messwerten werden identisch skalenkontaminiert normalverteilte Messabweichungen mit $p \ll 1$, σ_1, σ_2 zugeschrieben, also werden entsprechende auch für die Summe bzw. Differenz Δh_{IST} erhalten. Die Parameter ergeben sich durch Fehlerfortpflanzung wie in Abschnitt 4.2. Es soll getestet werden, ob eine signifikante systematische Messabweichung vorliegen könnte:

Nullhypothese: $E(\Delta h_{IST}) = \Delta h_{SOLL}$

Alternativhypothese: $E(\Delta h_{IST}) \neq \Delta h_{SOLL}$

Falls die Nullhypothese stimmt, ist $\Delta h_{IST} - \Delta h_{SOLL}$ näherungsweise skalenkontaminiert normalverteilt mit den Parametern (10b). Es kann zur Irrtumswahrscheinlichkeit α wie in Abschnitt 5.1 ein Konfidenzintervall für $\Delta h_{IST} - \Delta h_{SOLL}$ berechnet werden. Überdeckt es den Wert Null, wird die Nullhypothese angenommen.

Zusammenfassung

In folgender Tabelle geben wir einen Vergleich der drei diskutierten Fehlerverteilungen:

Verteilung	verallgemeinerte Normalverteilung (4)	Hubers Verteilung (6)	skalenkontaminierte Normalverteilung (7)
Berechnung von Varianz und Exzess	(5), benötigt die Gamma-Funktion	nur numerisch möglich	(8), einfache Ausdrücke
kumulative Verteilungsfunktion	benötigt die unvollständige Gamma-Funktion	komplizierter Ausdruck	(11), einfacher Ausdruck
als Sonder- und Grenzfälle enthalten	Normal-, Laplace-Verteilung und Gleichverteilung	Normal- und Laplace-Verteilung	Normalverteilung
Bedeutung in der M-Schätzung	gering, Schätzung i.d.R. nicht robust	ja, Schätzung robust	bisher keine, Schätzung nicht robust
Verteilung von Summen, Differenzen und Mittelwerten	nicht analytisch angebar	nicht analytisch angebar	für $p \ll 1$ näherungsweise vom selben Typ
Log-Dichtefunktion symmetrisch und konkav	für $\beta > 1$	ja	nein
Konfidenzintervalle und Hypothesentests	erfordern aufwändige numerische Verfahren	erfordern aufwändige numerische Verfahren	für $p \ll 1$ durch einfache Fixpunktiteration (12 a,b)

Der Begriff der kontaminierten Normalverteilung wird von einigen Autoren (z.B. Rinne 2008) auch weiter gefasst. Als kontaminierende Verteilung kann z.B. auch die Laplace-Verteilung verwendet werden. Einige der genannten Vorteile gehen dabei verloren, z.B. existiert nichts Vergleichbares wie (9a)-(9c).

Eine sinnvolle Erweiterung auf Zufallsvektoren mit abhängigen Elementen, wie sie für die Normalverteilung bekannt ist, wurde bisher für keine der drei Verteilungen entwickelt.

Literatur

Baarda, W.: A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands Geodetic Commission, Publication on Geodesy, 2(5), Delft, Netherlands 1968.

Bessel, F.W.: Fundamenta Astronomiae. Nicolovius, Königsberg 1818

Bronstein, I. N. ; Semendjajew, K. A.: Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner Verlag Leipzig 2003

Huber P.J.: Robust estimation of a location parameter. Ann. Math. Statist. 35 (1964) 73-101.

Huber P.J.: Robust Statistics. Wiley New York 1981

Jäger, R.; Müller, T.; Saler, H.; Schwäble, R.: Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. Herbert-Wichmann-Verlag Heidelberg 2005

- Koch, K. R.: Parameterschätzung und Hypothesentests, 4. Auflage, Bonn 2004 (online auf www.igg.uni-bonn.de).
- Lehmann, R.: Über die Quantifizierung von Information in der Geodäsie. Zeitschr. f. Verm.-wesen, 8 (1994) 401-416.
- Lehmann, R.: Das arithmetische Mittel von Mehrfachmessungen unter Wiederholbedingungen. Allgemeine Vermessungsnachrichten 01/2008
- Lehmann, R.: Normierte Verbesserungen – wie groß ist zu groß? Allgemeine Vermessungsnachrichten 02/2010
- Lehmann, R.; Scheffler, T.: Zur Grobfehlererkennung in geodätischen Deformationsnetzen. In: A. Sroka, R. Wittenburg (Eds.) 7. Geokinematischer Tag, Verlag Glückauf GmbH Essen 2006
- Lehmann, R.; Scheffler, T.: Monte Carlo based data snooping with application to a geodetic network. Journal of Applied Geodesy (2011) 5 (3-4) 123–134. DOI: 10.1515/JAG.2011.014
- Niemeier, W.: Ausgleichsrechnung – Statistische Auswertemethoden. 2. Auflage. de Gruyter, Berlin / New York 2008
- Nadarajah, S.: A generalized normal distribution, Journal of Applied Statistics, 32:7, 685-694, 2005.
- Rinne H.: Taschenbuch der Statistik. Harri Deutsch Verlag, 2008
- Rousseeuw, P; Leroy, A.M.: Robust regression and outlier detection. Wiley New York 1987
- Wilcox, R.R.: Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing. Elsevier Academic Press Burlington 2005